01;05

Автомодельные распределения при „гигантском“ крипе магнитного потока

© И.Б. Краснюк, Р.М. Таранец

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины,
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
83114 Донецк, Украина
e-mail: taranets_r@yahoo.com

(Поступило в Редакцию 28 ноября 2006 г.)

Рассмотрена задача о проникновении магнитного потока в полупространство в параллельной геометрии во внешнем магнитном поле, которое возрастает со временем по закону $B(0,t,\tau_0) = B_{c_1}(1+t/\tau_0)^m$, $m \geq 0$, $t \geq 0$ (τ_0 — время перераспределения магнитного потока, B_{c_1} — первое критическое поле). Предполагается, что течение вихрей происходит термоактивационным образом в режиме „гигантского“ крипа, т. е. при малом крипе пиннинга и высоких температурах. Получено модельное уравнение, которое описывает эволюцию магнитного потока. Даны аналитические формулы глубины и скорости проникновения магнитного поля. Показано, что режим „гигантского“ крипа устойчив при $0 \leq m \leq 1/2$.

PACS: 75.47.-m

Рассмотрим задачу о проникновении магнитного потока в высокотемпературный сверхпроводник, который занимает полупространство $x \geq 0$, в параллельной геометрии $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_z$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{J} \parallel \mathbf{e}_y$ и $\mathbf{v} \parallel \mathbf{e}_x$, где $\mathbf{e}$ — единичный орт, $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{J}$ — плотность тока, $\mathbf{v}$ — скорость движения вихрей при крипе магнитного потока [1]:

$$v = v_0 \exp\big(-(cU_0 - BJV_c d_p)/cT\big), \tag{1}$$

v_0 — микроскопическая скорость движения вихрей, c — скорость света, d_p — среднее расстояние активации связок вихревых нитей, U_0 — барьер пиннинга, V_c — активационный объем, в котором происходит деформация вихревой решетки под действием потенциала U_0, T — температура. Согласно (1), скорость вихрей зависит от параметра $\mu = U_0/T$, причем $\mu \gg 1$ для обычных жестких сверхпроводников и μ на несколько порядков меньше для высокотемпературных сверхпроводников, что объясняется малой длиной когерентности, которая приводит к малому барьеру пиннинга, и высокими температурами. Этот феномен, который обнаружили Иешурун и Малоземофф [2], называется „гигантским“ крипом магнитного потока.

Соотношение (1) можно записать в безразмерном виде:

$$v = v_0 e^{-\mu(1+\kappa b b_x)} \quad \left(\kappa = \frac{1}{\beta}\,\frac{B_{c_2}^2}{H_c^2}\,\frac{V_c d_p}{\lambda \xi_\parallel a_0^2}\right), \tag{2}$$

где β — постоянная, пропорциональная числу вихревых нитей в связке [3], H_c — термодинамическое критическое поле, B_{c_2} — второе критическое поле, $\xi_\parallel$ — длина когерентности, параллельная вихревой нити, a_0 — постоянная вихревой решетки Абрикосова, λ — глубина проникновения в мейсснеровской фазе, $x \to x/\lambda$.

Предположим, что выполняется условие $\kappa\mu \ll 1$. Тогда из (2) и уравнений Максвелла

$$E = Bv/c, \quad c^{-1}\partial_t B = -\partial_x E$$

(c — скорость света) в линейном приближении получаем уравнение

$$b_{t'} + \sigma^{-1} b_{x'} = \big(b^2 b_{x'}\big)_{x'}\,, \tag{3}$$

где $t' = t/\tau_0$, $x' = x/\lambda$, $D = (\tau_0 v_0/\lambda)k\mu e^{-\mu}$, а τ_0 — время релаксации системы к положению равновесия.

В экспериментах, связанных с крипом, возникает следующее граничное условие на поведение внешнего поля

$$B(0,t,\tau_0) = B_0\big(1+t/\tau_0\big)^m, \quad t \geq 0, \quad m \geq 0, \tag{4}$$

где τ_0 — время выхода системы на скейлинговое поведение [4,5]. Условие (4) можно записать в безразмерном виде:

$$b(0,t') = b_0\big(1+t'\big)^m, \tag{5}$$

где $b_0 = B_0/B_{c_2}$, $B_{c_1} < B < B_{c_2}$. Возрастание поля по закону (5) происходит на конечном интервале времени, а затем поле стабилизируется или убывает таким образом, что

$$\partial_{t'} b(0,t') \to 0 \quad \text{при} \quad t' \to \infty.$$

Тогда задача (3), (5) с начальным распределением $b(x',0) = b_0$ моделирует эволюцию магнитного потока в сверхпроводнике, который предварительно охлажден в нулевом магнитном поле [5, с. 1352]. В дальнейшем „штрихи“ в обозначениях будем опускать.

Пусть решение задачи (3), (5) имеет вид [6]:

$$b(x,t) = b_0\big(1+t\big)^{\alpha}\phi(\eta,t),$$

$$\eta = x\big(1+t\big)^{-\delta}, \quad \alpha > 0, \quad \delta > 0. \tag{6}$$

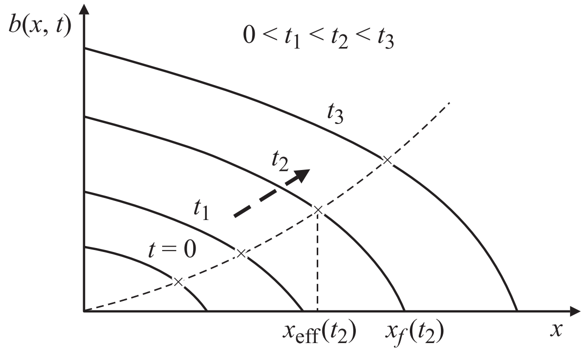

Рис. 1. Типичный профиль амплитуды магнитного поля при степенном возрастании внешнего поля в режиме „гигантского“ крипа; x_f — координата фронта; x_{eff} — эффективная координата фронта, при достижении которой амплитуда уменьшается в два раза.

Тогда подстановка (6) в (3) приводит к уравнению

$$\phi_t - t^{-1}\sigma^{-1}\eta\phi_\eta + \alpha t^{-1}\phi = b_0^2 t^{2\alpha-2\delta}\left(\phi^2\phi_\eta\right)_\eta - \sigma^{-1}t^{-\delta}\phi_\eta \quad (t \to 1+t). \quad (7)$$

При $t \gg 1$ и $\alpha = \delta$ из (7) вытекает уравнение

$$\phi_t = \left(\phi^2\phi_\eta\right)_\eta \quad (t \to b_0^2 t), \quad (8)$$

для которого рассматривается граничное условие

$$\phi(0, t) = (1+t)^p, \quad p \geq 0. \quad (9)$$

Решение задачи (8), (9) имеет вид [6]:

$$\phi_A(\eta, t) = (1+t)^p\theta(\xi), \quad \xi = \eta/(1+t)^{(1+2p)/2}, \quad (10)$$

где функция $\theta(\xi)$ ведет себя так, как на рис. 1. При $p = 1/2$ получаем

$$\theta(\xi) = \left(1 - \sqrt{2}\xi\right)_+^{1/2}.$$

Тогда, в силу (6) и (10), находим, что

$$b(x, t) = b_0(1+t)^{\alpha+1/2}\left(1 - \sqrt{2}x/(1+t)^{\alpha+1}\right)_+^{1/2}. \quad (10')$$

При $p \neq 1/2$

$$b(x, t) = b_0(1+t)^m\theta\big(\xi(x, t, m)\big), \quad m = \alpha + p. \quad (11)$$

При

$$\xi = \xi_{\text{eff}} = \theta^{-1}(1/2)$$

($\theta^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\theta(\cdot)$) эффективная глубина проникновения магнитного поля

$$x_{\text{eff}}(t) = \xi_{\text{eff}}(1+t)^{m+1/2},$$

а скорость распространения магнитного потока

$$v_{\text{eff}}(t) = \xi_{\text{eff}}(m+1/2)(1+t)^{m-1/2}.$$

Запишем полученные соотношения в размерном виде:

$$x_{\text{eff}}(t) = \xi_{\text{eff}}\lambda(1 + Dt/\tau_0)^{m+1/2}, \quad (12)$$

$$v_{\text{eff}}(t) = \xi_{\text{eff}}\lambda(m+1/2)D_{\tau_0}^{-1}(1 + Dt/\tau_0)^{m-1/2}. \quad (13)$$

Пусть $\tau_0 v_0/\lambda = 1$. При $\lambda \sim 10^{-5}$ cm, $\tau_0 \sim 10^{-1}$–10^{-4} s (экспериментальные значения для YBaCuO [4]) получим оценку $10^{-4} < v_0 < 10^{-1}$ cm/s, что сравнимо со скоростью классического крипа [7–9]. Тогда из (12) вытекает соотношение

$$x_{\text{eff}}(t) = \xi_{\text{eff}}\lambda\left(1 + \kappa\mu e^{-\mu}\tau_0^{-1}t\right)^{m+1/2},$$

где $\tau_0 \sim 10^0$–10^4 s и $\partial_t B(0, t) \sim 10^{-3}$–$10^{-6}$ T/s выбраны согласно эксперименту из [4]. Отсюда следует, что при $t \sim \tau_0$ глубина проникновения

$$x_{\text{eff}}(\tau_0) = \xi_{\text{eff}}\lambda\left(1 + \kappa\mu e^{-\mu}\right)^{m+1/2},$$

откуда, в свою очередь, получаем соотношение

$$v_{\text{eff}}(\tau_0) = \xi_{\text{eff}}\lambda(m+1/2)\kappa\mu e^{-\mu}\tau_0^{-1}\left(1 + \kappa\mu e^{-\mu}\right)^{m-1/2}. \quad (14)$$

Из (14) при $m = 1/2$ вытекает равенство

$$v_{\text{eff}}(\tau_0) = \xi_{\text{eff}}\lambda\kappa\tau_0^{-1}\mu e^{-\mu},$$

что приводит к оценке

$$\xi_{\text{eff}}\lambda\kappa\mu e^{-\mu} < v_{\text{eff}}(\tau_0) < 10^4\xi_{\text{eff}}\lambda\kappa\mu e^{-\mu} \text{ cm/s} \quad (\mu = U_0/T),$$

которая дает значения скорости в режиме обычного крипа.

Графическое представление аналитических соотношений (12), (13) дано на рис. 2 и 3 соответственно, из которых вытекает, что с увеличением барьера пиннинга (уменьшением температуры) глубина и скорость проникновения магнитного потока уменьшаются (возрастают) при $\mu > 1$. В режиме вязкого течения аналогичная

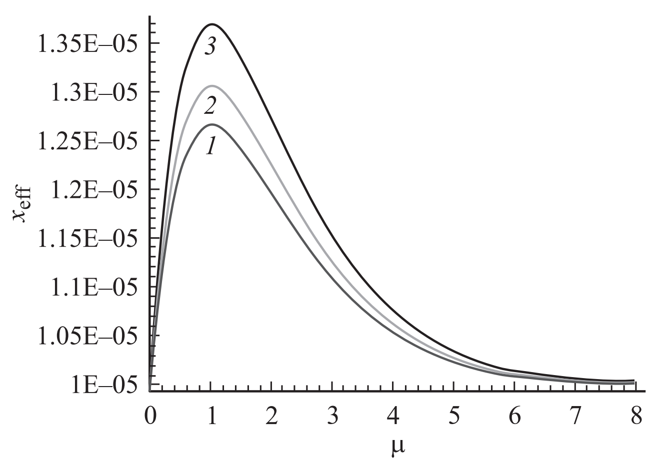

Рис. 2. Зависимость скорости проникновения магнитного потока при „гигантском“ крипе в возрастающем внешнем поле от параметра $\mu = U_0/T$ при $m = 1/4$ (*1*), 1/3 (*2*), 1/2 (*3*).

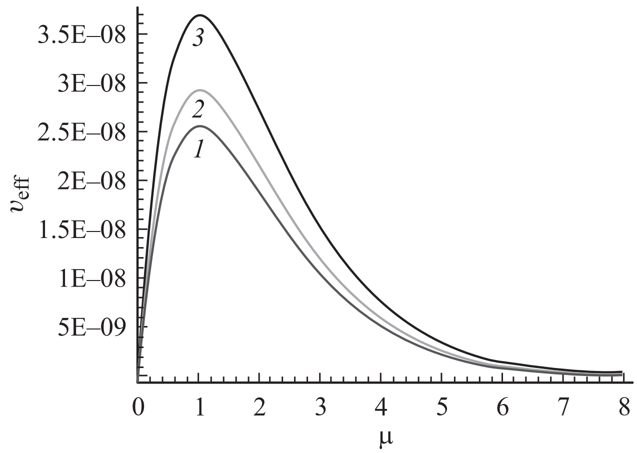

Рис. 3. Зависимость глубины проникновения от параметра μ при $m = 1/4$ (*1*), $1/3$ (*2*), $1/2$ (*3*).

зависимость по температуре получена, например, в статье [10] для модели критического состояния в плоскопараллельной пластине. Случай $\mu < 1$ реализуется при температурах, близких к критической T_c. В этом случае необходимо учитывать зависимость энергии пиннинга от температуры [1]. В такой ситуации тепловая энергия $k_B T$ ($k_B := 1$ — постоянная Стефана–Больцмана) больше энергии активационного барьера, что приводит к термоактивационному возрастанию скорости проникновения магнитного поля. Эта скорость достигает максимального значения, когда соответствующие энергии (тепловая и энергия активации) равны. В дальнейшем при $\mu > 1$ процесс термоактивационного проникновения магнитного потока происходит по стандартному сценарию. Эксперимент, подтверждающий качественное поведение графиков на рис. 2, 3 при $\mu \leq 1$, отсутствует.

Распределение магнитного поля при крипе в возрастающем внешнем поле изображено на рис. 1 и имеет простой физический смысл. Действительно, из (3) вытекает, что при $\sigma \to 0$ распределение магнитного поля в пластине постоянно и, следовательно, зависит лишь от граничных условий, что подтверждается аналитическим представлением решения (10′). При $\sigma > 0$ поток начинает проникать в сверхпроводник термоактивационным образом. Этому процессу (крипа) способствует увеличение внешнего поля, что и приводит в результате к графику на рис. 1.

Аналогичный результат при обычном крипе при линейном возрастании по времени магнитного поля получен в статье [11] для полупространства. Аналогичный теоретический результат в режиме вязкого течения вихрей получен в [12] для модели критического состояния для оксидных высокотемпературных сверхпроводников. При показателе скорости накачки $m > 1/2$ переходим последовательно в режим взякого течения и далее при $B \gg B_{c_1}$ — к возникновению некоторого аналога дендридной структуры [13]. Такая ситуация, отвечающая эксперименту из [14], в данной статье не исследуется.

Приведем пример точного решения уравнения (3) при $m = 1/2$:

$$b(x, t) = [2(\lambda - \sigma^{-1})(\lambda t - x)_+]^{1/2}. \tag{15}$$

Решение (15) удовлетворяет граничному условию $b(0, t) \propto b_0 t^{1/2}$, причем поток проникает со скорсотью $v_{\mathrm{eff}} = \lambda$ при $\lambda > \sigma^{-1}$. В данном случае конвекция не влияет на скорость, но уменьшает глубину проникновения поля. При $\sigma \gg 1$, т.е. когда энергия активации вихревых нитей велика (модель вихревого стекла для очень большого барьера пиннинга), решение (15) качественно совпадает с решением из [5] и близко (по форме) к графику распределения магнитного поля, который получен в [11] при $m = 1$. Из (15) определим плотность тока

$$j(x, t) = \rho[(\lambda t - x)_+]^{-1/2},$$

где $\rho = 2^{-1/2}(\lambda - \sigma^{-1})^{1/2}$, откуда следует закон релаксации для плотности полного тока

$$\langle j(t) \rangle = x_{\mathrm{eff}}^{-1}(t) \int\limits_0^{x_{\mathrm{eff}}(t)} j(s, t)\,ds \propto (1 + t)^{-1/2}. \tag{16}$$

По полному току $\langle j(t) \rangle$ определим магнитный момент:

$$M(t) = \int\limits_0^a x \,\langle j(t) \rangle\, dx = \langle j(t) \rangle \frac{a^2}{2}, \tag{17}$$

где $t^* = x_{\mathrm{eff}}^{-1}(a)$, $2a$ — толщина пластины ($x_{\mathrm{eff}}^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $x_{\mathrm{eff}}(\cdot)$), причем

$$t^* = \frac{\tau_0}{D}\left[\left(\frac{a}{\xi_{\mathrm{eff}}\lambda}\right)^{1/(m+1/2)} - 1\right].$$

Формула (17) применима при сравнении с экспериментом рис. 4 [4] для сверхпроводящей пластины в параллельном магнитном поле. Для полуплоскости формула (17) обобщается следующим образом:

$$M(t) = \langle j(t) \rangle \frac{x_{\mathrm{eff}}^2}{2} \propto (1 + t)^{2m+1/2}.$$

Заметим, что в постоянном внешнем поле распределение магнитного поля (для пластины) имеет вид [3]:

$$B(x, t) = B_0 - x\,\frac{4\pi}{c}\,J_c\left[\frac{T}{T_*}\ln\left(\mathrm{const} + \frac{t}{\tau_0}\right)\right]^{-1/\beta}$$
$$(0.2 < \beta \leq 0.5). \tag{18}$$

Из (18) следует, что релаксация намагниченности со временем происходит по закону

$$M(t) \sim [\ln(\mathrm{const} + t)]^{-1/\beta},$$

где β зависит от размерности связок вихревых нитей, температуры, приложенного магнитного поля, транспортного тока и начальных условий. Соотношение (18) отличается от закона $\ln t$ при крипе потока.

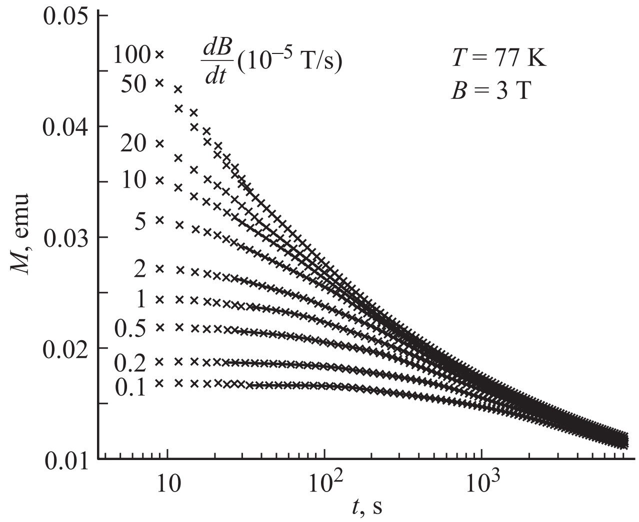

Рис. 4. Релаксационные кривые $M(\ln t)$ при $T = 77\,\text{K}$ и $B = 3\,\text{T}$ при различных скоростях $B_t \cdot 10^{-5}\,\text{T/s}$ скорости накачки внешним магнитным полем (релаксация является логарифмической) [4].

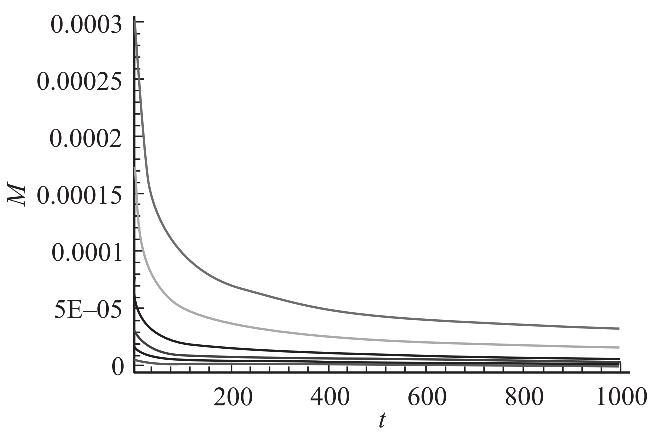

Рис. 5. График намагниченности в возрастающем магнитном поле при „гигантском" крипе при больших временах для сверхпроводящего полупространства в параллельном внешнем поле. Кривые намагниченности отвечают соответствующим кривым на рис. 4 при различной скорости накачки $B_t \cdot 10^{-5}\,\text{T/s}$ внешним магнитным полем. Верхняя кривая отвечает скорости накачки $B_t = 100\,\text{T/s}$, а нижняя — значению $B_t = 1\,\text{T/s}$. Кривые на рис. 4 при $B_t < 1\,\text{T/s}$ соответствуют почти совпадающие кривые на данном рисунке.

В общем случае для плотности тока получаем соотношение

$$j(x, t) = -kb_0(1+t)^{-1/2}\theta'\big(\xi(x, t, m)\big), \tag{19}$$

где $k = cB_{c_2}/(4\pi J_c\lambda)$. Из (19) при $p = 1/2$ и $t \gg \tau_0$ вытекает асимптотика

$$\langle j(t)\rangle \propto (1+t)^{-1/2}.$$

При $p \neq 1/2$ если

$$\theta'(x, t) \sim \text{const} + (1+t)^{-\nu}, \quad \nu > 1/2,$$

асимптотика (16) сохраняется. График намагниченности (17), построенный по формуле (16), изображен на рис. 5. Сравнение графика на рис. 5 с графиком на рис. 4 из [4] показывает, что при больших временах совпадение профилей намагниченности является удовлетворительным. При этом вместо логарифмической релаксации имеется степенная релаксация, что приводит к более медленному уменьшению намагниченности со временем. В статье [16] наблюдался кроссовер (при фиксированной температуре) от логарифмического к экспоненциальному закону убывания намагниченности при термоактивационном крипе магнитного потока. В малых полях поведение намагниченности идентично графикам на начальных интервалах, изображенных на рис. 6. Заметим, что эксперимент из [4] соответствует достаточно большой ($U_0 \gg T$) активационной энергии барьера пиннинга (обычный крип), а эксперимент на рис. 6 из [16] ближе к условиям „гигантского" крипа.

В результате сформулируем следующие утверждения:

— показано, что режим „гигантского" крипа в слабовозрастающем внешнем поле может оказаться устойчивым, если скорость накачки достаточно мала ($m \leq 1/2$);

— слабовозрастающее внешнее поле приводит к тому, что скорость крипа может оказаться на порядок (и более) выше скорости „гигантского" крипа;

— даны аналитические формулы для глубины и скорости проникновения магнитного потока, зависящие от показателя $m > 0$;

— указаны конкретные численные оценки для скорости, которые согласуются с известными экспериментальными оценками, полученными магнитооптическими методами (см. обзор [15]);

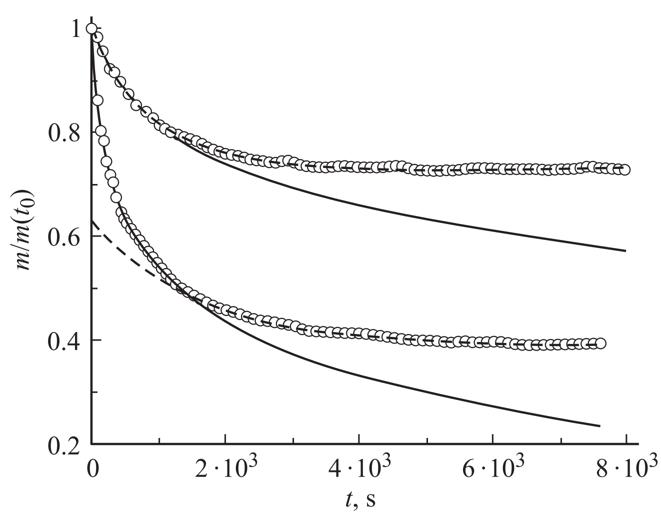

Рис. 6. График намагниченности при $T = 4.5\,\text{K}$ при $\mu_0 = 1.5\,\text{T}$ (○) и $1.7\,\text{T}$ (□). Сплошные (штриховая) линии убывают по логарифмическому (экспоненциальному) закону при малых (больших) временах. Смена режима происходит при критических значениях времени $t_{\text{cr}} = 1500\,\text{s}$ при $\mu_0 H = 1.5\,\text{T}$ и $t_{\text{cr}} = 800\,\text{s}$ при $\mu_0 H = 1.7\,\text{T}$, где μ_0 — магнитная проницаемость среды, H — напряженность магнитного поля. Сверхпроводник имеет форму пластины в параллельном внешнем магнитном поле [16]

.

— показано, что релаксация намагниченности при „гигантском“ крипе может быть степенной, в отличие от логарифмической релаксации при обычном крипе, что приводит к более медленной релаксации к положению равновесия.

Последнее утверждение можно объяснить более высокой скоростью проникновения потока по сравнению со скоростью крипа для обычных сверхпроводников.

Список литературы

[1] *Малоземофф А.П.* // Физические свойства высокотемпературных сверхпроводников / Под ред. Д.М. Гинзбурга, М.: Мир, 1990. С. 69–162.

[2] *Yeshurun Y., Malozemoff A.P.* // Phys. Rev. 1988. Vol. 60. P. 2202–2205.

[3] *Fisher K.H., Nattermann T.* // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 43. N 13. P. 10 372–10 382.

[4] *Gurevich H., Kupfer H.* // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. N 9. P. 6477–6487.

[5] *Blatter G., Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B.* et al. // Rev. Modern Phys. 1994. Vol. 66. N 4. P. 1125–1388.

[6] *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.

[7] *Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Неустойчивости в сверхпроводниках. М.: Наука, 1984. 261 с.

[8] *Beasley M.R., Labush R., Webb W.W.* // Phys. Rev. 1969. Vol. 181. N 2. P. 682–700.

[9] *Тинкхам М.* Введение в сверхпроводимость. М.: Атомиздат, 1980. 310 с.

[10] *Clem J.R., Hao Zhidong.* Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. N 18. P. 13 774–13 784.

[11] *Романовский В.Р.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 13. С. 47–57.

[12] *Brandt E.H.* // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 55. N 21. P. 14 513–14 526.

[13] *Boez U., Biehler B., Scmidt D.* et al. // Evrophys. Lett. Vol. 64. N 4. P. 517–523.

[14] *Shantsev D.V., Bobyl A.V., Galperim Y.M.* et al. // Phys. Rev. B. Vol. 72. 2005. P. 024 541-1–024 541-7.

[15] *Altshuler E., Johensen T.H.* // Rev. Mod. Phys. 2004. Vol. 47. P. 471–487.

[16] *Fabrega L., Martinez B., Fontcuberta J.* et al. Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. N 18. P. 13 840–13 847.