

01;03

К формулировке теории пограничного слоя, связанного с волновым движением на свободной поверхности жидкости

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 19 сентября 2006 г.)

Предложена модифицированная теория пограничного слоя, связанного с периодическим капиллярно-гравитационным волновым движением на свободной поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости. Для описания течения в пограничном слое предложена упрощенная, по сравнению с полной формулировкой, модельная задача, строение решения которой отражает главные черты точного асимптотического решения: быстроту убывания с глубиной вихревой части течения и незначительность некоторых слагаемых полной формулировки. Получена оценка толщины пограничного слоя, при которой различие между точным асимптотическим решением и решением модельной задачи, сформулированной в рамках предложенной теории, может быть задано с заранее оговоренной точностью.

PACS: 61.20.Gy, 47.11.Hj

Введение

Выполненные в последние годы корректные аналитические асимптотические расчеты нелинейного периодического волнового движения на поверхности вязкой жидкости связаны с крайне громоздкими даже при использовании компьютерных пакетов аналитических вычислений расчетами [1–4]. Чрезвычайная сложность подобных расчетов резко тормозит темпы и качество исследований многочисленных нелинейных эффектов, реализующихся на свободной поверхности вязкой жидкости. Это заставляет искать пути упрощения математической процедуры отыскания параметров периодических нелинейных волн и, в частности, реанимировать проблему построения корректной теории пограничного слоя у свободной поверхности жидкости. Основой общепринятых представлений о пограничном слое вблизи свободной поверхности вязкой жидкости до сих пор считаются результаты исследования, выполненного М.С. Лонгет-Хиггинсом [5]. Настоящая работа посвящена критическому анализу и доработке результатов Лонгет-Хиггинса по оценке толщины пограничного слоя вблизи свободной поверхности вязкой жидкости и моделированию течения в этом слое.

Хорошо известно, что на границе области, в которой имеет место ламинарное течение маловязкой несжимаемой жидкости, возникает интенсивное вихревое движение, быстро затухающее по мере удаления от границы, так, что имеется возможность выделить приповерхностную область с наиболее интенсивным вихревым движением в так называемой ламинарный пограничный слой. При этом движение жидкости за пределами пограничного слоя считается потенциальным. Такой прием позволяет в общем случае весьма сложную задачу строгого аналитического расчета движения вязкой жидкости в области с заданными границами свести к двум более

простым: расчету потенциального движения невязкой жидкости в объеме и расчету вихревого движения вязкой жидкости в пограничном слое [6–9]. Граница области движения жидкости может быть твердой поверхностью, границей раздела двух несмешивающихся жидкостей или свободной поверхностью.

Правильная оценка толщины пограничного слоя в каждой отдельно взятой задаче существенно упрощает расчет течения жидкости при заданных граничных условиях и облегчает качественный анализ его свойств. В то же время само понятие толщины пограничного слоя не обладает той строгостью, которая присуща другим механическим величинам. В истинном течении компоненты ротора скорости плавно уменьшаются по абсолютной величине при выходе из пограничного слоя в область почти потенциального течения. Выделение четкой границы, разделяющей движение на область с вихревым движением и без него, означает условное установление порога, начиная с которого ротор скорости в задаче считается нулевым (что, в конечном итоге, приводит к ограничению точности проводимых расчетов). Сам порог может быть выбран по-разному в зависимости от целей исследования. Именно поэтому оценочные выражения для толщины пограничного слоя, используемые на практике, как правило, содержат безразмерный множитель, выбор которого диктуется сравнением с экспериментом, свойствами известного приближенного решения или какими-либо вспомогательными соглашениями.

Объектом настоящего исследования является течение в пограничном слое, возникающем под свободной поверхностью бесконечно глубокой маловязкой жидкости, по которой распространяется капиллярно-гравитационная волна. В большинстве классических монографий по гидродинамике [6–8] для оценки толщины δ такого пограничного слоя используется выражение,

предложенное в [5]:

$$\delta = C\sqrt{\nu/\omega}. \quad (1)$$

Здесь ω — циклическая частота периодической капиллярно-гравитационной волны; ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости; C — безразмерный параметр, значение которого в [5] принято равным $\sqrt{2}$. Соотношение (1) сформулировано на основании анализа точного решения задачи о расчете течения жидкости, связанного с капиллярно-гравитационной волной, распространяющейся по поверхности бесконечно глубокой маловязкой жидкости в линейном по амплитуде волны приближении [6]. Значение $C = \sqrt{2}$ выбрано таким образом, чтобы в известном приближенном решении закон убывания с глубиной h амплитуды ротора скорости течения жидкости описывался через параметр δ наиболее просто — выражением вида: $\exp(-h/\delta)$. Очевидно, такой выбор C в выражении для δ не гарантирует достаточной подавленности вихревого движения на глубине, большей, чем δ , и неясно, каким нужно взять значение толщины слоя, чтобы охарактеризовать положение уровня, ниже которого вихрь скорости можно положить равным нулю с заранее заданной точностью для отыскания характеристик течения. Известно, что при распространении по свободной поверхности слоя жидкости конечной толщины периодической капиллярно-гравитационной волны глубина в половину длины волны является тем уровнем, начиная с которого дно и свободная поверхность перестают „чувствовать“ друг друга [10,11]. Представляет интерес формулировка аналогичного критерия относительно вихревой составляющей течения, порожденного поверхностными волнами, т.е. возможность получения ответа на вопрос: начиная с какой глубины в количественных расчетах течения вязкой жидкости и в качественных рассуждениях можно полагать вихревое движение, порожденное свободной поверхностью, полностью подавленным, не влияющим на потенциальное течение в объеме.

В нижеследующем изложении движение жидкости, возникающее при распространении периодической капиллярно-гравитационной волны по поверхности маловязкой бесконечно глубокой жидкости, будет аппроксимироваться с помощью модельного течения, состоящего из вихревой части внутри приповерхностного пограничного слоя и потенциальной части во всем объеме жидкости. Будут выведены уравнения и граничные условия, к которым задача расчета модельного течения сводится методами теории пограничного слоя, имеющие более простой вид по сравнению с традиционными. Будет найдено оптимальное значение C в формуле (1).

Математическая формулировка и известное решение задачи

Примем, что несжимаемая жидкость с кинематической вязкостью ν , плотностью ρ и коэффициентом по-

верхностного натяжения γ в декартовой системе координат $Oxyz$, с осью Oz , направленной вертикально вверх, в поле сил тяжести $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$ заполняет полупространство $z < 0$ и граничит с вакуумом. Рассмотрим линейризованную по амплитуде возмущения задачу определения спектра капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности жидкости.

Пусть $u = u(x, z, t)$ и $v = v(x, z, t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей течения жидкости, связанного с периодическим волновым движением ее свободной поверхности, которые для простоты считаются не зависящими от координаты y . Тогда отклонение свободной поверхности жидкости $\xi = \xi(x, t)$ от равновесной плоской в поле сил тяжести формы $z = 0$ и поле скоростей $\mathbf{U} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_z$ в приближении волн малой амплитуды удовлетворяют соотношениям

$$z < 0: \quad \partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{U} = \mathbf{0}; \quad \nabla \mathbf{U} = \mathbf{0}; \quad (2)$$

$$z = 0: \quad \partial_t \xi - v = 0; \quad -\rho g \xi + p - 2\rho \nu \partial_z v + \gamma \partial_{xx} \xi = 0; \\ \partial_z u + \partial_x v = 0; \quad (3)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0; \quad (4)$$

t — время; p — добавка к равновесному значению давления внутри жидкости; ∂_t и ∂_x — частные производные по времени и координате; \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_z — орты осей Ox и Oz

Решение сформулированной задачи хорошо известно и может быть записано в виде [1,6]:

$$\xi = \frac{1}{2} \alpha \exp(\theta) + K.C.; \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{r}, t) \\ v(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(p)}(\mathbf{r}, t) \\ v^{(p)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^{(e)}(\mathbf{r}, t) \\ v^{(e)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} u^{(p)}(\mathbf{r}, t) \\ v^{(p)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} -i(S + 2\nu k^2) \\ S + 2\nu k^2 \end{pmatrix} \exp(kz) \exp(\theta) + K.C.;$$

$$\begin{pmatrix} u^{(e)}(\mathbf{r}, t) \\ v^{(e)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} 2\nu k q \\ -2\nu k^2 \end{pmatrix} \exp(qz) \exp(\theta) + K.C.;$$

$$p(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \alpha \rho S \left(\frac{S}{k} + 2\nu k \right) \exp(kz) \exp(\theta) + K.C.;$$

$$q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}}; \quad \theta \equiv St - ikx.$$

Поле скоростей течения жидкости представлено в виде суперпозиции потенциальной $u^{(p)}, v^{(p)}$ и вихревой $u^{(e)}, v^{(e)}$ компонент; α — комплексная амплитуда поверхностной волны, определяемая из начальных условий; аббревиатура „ $K.C.$ “ обозначает комплексно сопряженные слагаемые к выписанным; i — мнимая единица; k — волновое число; $\text{Re}(q) > 0$ — характерный масштаб

скорости экспоненциального убывания амплитуды вихревого движения с глубиной; S — комплексная частота, являющаяся решением дисперсионного уравнения

$$\left(2k^2 + \frac{S}{\nu}\right)^2 + \omega_0^2 - 4\nu^2 \left(k^2 + \frac{S}{\nu}\right)^{3/2} = 0; \quad \omega_0^2 \equiv gk \left(1 + \frac{\nu}{\rho g} k^2\right). \quad (7)$$

Здесь ω_0^2 имеет смысл квадрата комплексной частоты S^2 при $\nu \rightarrow 0$, иными словами, ω_0 — есть частота капиллярно-гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости.

В пределе малой (но ненулевой) вязкости комплексная частота S и вспомогательный параметр q выражаются в явном виде: $S \approx i\omega_0 - 2\nu k^2$; $q \approx (1+i)\sqrt{\omega_0/(2\nu)}$. Если в соотношениях (5), (6) параметры S и q выразить по этим формулам, то получится асимптотическое по малой вязкости решение задачи (2)–(4), в котором поле скоростей описывается соотношениями

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{r}, t) \\ v(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(p)}(\mathbf{r}, t) \\ v^{(p)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^{(e)}(\mathbf{r}, t) \\ v^{(e)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} u^{(p)} \\ v^{(p)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \omega_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(kz) \exp(\theta) + K.C.; \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} k\sqrt{2\nu\omega_0}(1+i)i \\ -2\nu k^2 \end{pmatrix} \exp(q\delta) \exp(\theta) + K.C.; \quad (10)$$

$$S = i\omega_0 = 2\nu k^2; \quad q = \frac{1+i}{\delta_L}; \quad \delta_L \equiv \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_0}}. \quad (11)$$

Здесь δ_L — характерная толщина пограничного слоя по Лонгет-Хиггинсу [5], определяющая глубину, на которой амплитуда ротора скорости $|\partial_x v - \partial_z u|$ поля скоростей (8) уменьшается в $e \approx 2.73$ раз.

Если учесть, что в реальных условиях маловязкой жидкости толщина пограничного слоя обычно много меньше длины волны $\delta_L \ll \lambda = 2\pi/k$, то из формулы (8) следует, что структура аналитического выражения для поля скоростей является типичной для теории пограничного слоя: потенциальная (основная) часть течения плюс вихревая (погранслоиная) часть. Для нижеследующего существенно, что потенциальное течение с компонентами скорости $u^{(p)}, v^{(p)}$ играет важную роль во всем объеме, тогда как вихревая часть течения с компонентами $u^{(e)}, v^{(e)}$ при малой вязкости существенна только в тонком слое вблизи свободной поверхности. Действительно, амплитуда потенциальных компонент поля скоростей $u^{(p)}, v^{(p)}$ уменьшается с глубиной пропорционально $\exp(kz) \equiv \exp(z/2\pi\lambda)$, а амплитуда вихревых компонент скорости $u^{(e)}, v^{(e)}$ уменьшается при малой величине коэффициента кинематической вязкости (когда $\text{Re}(q) \gg k$) значительно быстрее: по закону

$$\exp(\text{Re}(q)z) \equiv \exp(z/\delta_L) \equiv \exp\left(z\sqrt{\omega_0/2\nu}\right).$$

Вихревые компоненты поля скоростей $u^{(e)}, v^{(e)}$ стремятся к нулю в пределе $\nu \rightarrow 0$ на любой глубине. Из непрерывности $u^{(e)}, v^{(e)}$ следует, что при малой, но отличной от нуля, вязкости вихревая составляющая течения является малой добавкой к основному потенциальному движению во всей области течения, в том числе и в приповерхностном пограничном слое. Таким образом, даже в области пограничного слоя основную составляющую течения маловязкой жидкости следует считать потенциальной. Наличие этой составляющей движения — главное отличие в течении жидкости внутри пограничного слоя, формирующегося вблизи свободной поверхности (рассматриваемая ситуация) от течения в пограничном слое вблизи твердой стенки, когда значительность потенциальной составляющей движения по сравнению с вихревой не принимается во внимание [7].

Модельная задача

Сформулируем модельную задачу, которой будем аппроксимировать точное решение (8)–(11) и которая получается из задачи (2)–(4) на основании представлений о погранслоином строении ее решения. Для достижения этой цели будем исходить из предположения, что вихревая часть модельного течения сосредоточена только в пограничном приповерхностном слое, и ротор скорости модельного течения обращается в нуль на нижней границе этого слоя.

В исходных уравнениях (2)–(4) скорость \mathbf{U} состоит из погранслоиной (вихревой) и основной (потенциальной) составляющих движения. Чтобы воспользоваться фактом погранслоиности строения решения, эти две составляющие необходимо разделить и уравнения для потенциальной составляющей решать во всей области $z \leq 0$, а уравнения для погранслоиной вихревой добавки только в узком слое $-\delta \leq z \leq 0$. Толщину пограничного слоя δ пока будем считать определенной с точностью до постоянного множителя G , и в соответствии с (1), (11) удовлетворяющей соотношению

$$\delta \equiv G\sqrt{2\nu/\omega_0} \equiv G\delta_L \quad (12)$$

и малой по сравнению с длиной волны $\delta/\lambda \ll 1$.

Будем искать поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, разрешающее задачу (2)–(4) на основании теоремы Гельмгольца [12], в виде суперпозиции потенциального $\mathbf{U}^{(p)}(\mathbf{r}, t)$ и вихревого соленоидального $\mathbf{U}^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ течений

$$z \leq 0: \quad \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}^{(p)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{U}^{(e)}(\mathbf{r}, t); \quad (13)$$

$$z \leq 0: \quad \mathbf{U}^{(p)}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla\varphi(\mathbf{r}, t); \quad \nabla \cdot \mathbf{U}^{(e)} = 0;$$

$$-\delta \leq z \leq 0: \quad \nabla \times \mathbf{U}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_y;$$

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) \equiv \partial_x v^{(e)}(\mathbf{r}, t) - \partial_z u^{(e)}(\mathbf{r}, t).$$

Здесь $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — скалярный гидродинамический потенциал основного течения; $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t)$ — ротор поля скоростей течения жидкости. Из соленоидальности $\mathbf{U}^{(e)}$

и уравнения неразрывности следует, что поле $\mathbf{U}^{(p)}$ тоже соленоидально: $\nabla \cdot \mathbf{U}^{(p)} \equiv \Delta \varphi = 0$. Из соленоидальности $\mathbf{U}^{(e)}$, т.е. условия $\partial_x u^{(e)} + \partial_z v^{(e)} = 0$, следует существование потенциальной функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ с дифференциалом $d\psi = v^{(e)} dx = u^{(e)} dz$, откуда $u^{(e)} = -\partial_z \psi$; $v^{(e)} = \partial_x \psi$. При этом $\Delta \psi = \partial_x v^{(e)} - \partial_z u^{(e)} \equiv \Omega$. К обеим частям линеаризованного уравнения Навье-Стокса (2) применим операцию rot и получим уравнение для отыскания вихревой компоненты течения

$$\partial_t \Omega(\mathbf{r}, t) - \nu \Delta \Omega(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Окончательно получим отдельные уравнения для функции $\varphi(\mathbf{r}, t)$, отвечающей за основное потенциальное течение, и для функций $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Omega(\mathbf{r}, t)$, через которые определяется погранслоное вихревое движение

$$z \leq 0: \quad \Delta \varphi = \partial_{xx} \varphi + \partial_{zz} \varphi = 0; \quad (14)$$

$$-\delta \leq z \leq 0: \quad \partial_t \Omega - \nu \Delta \Omega = 0; \quad \Omega = \Delta \psi. \quad (15)$$

В уравнениях (15) функция Ω является вспомогательной. Из этих соотношений следует определить функцию ψ , поскольку все граничные условия на границе слоя $-\delta \leq z \leq 0$ возможно записать в форме, которая содержит только ψ и не содержит Ω . В линейной по амплитуде волны теории для системы (15) существует процедура исключения вспомогательной функции Ω , описанная, например, в [6], где (15) сводится к одному уравнению относительно ψ , отвечающей за вихревое движение: $\partial_t \psi - \nu \Delta \psi = 0$. Однако процедура такого упрощения основана на линейности уравнений (15). В нелинейном по амплитуде волны приближении скалярный ротор скорости Ω удовлетворяет нелинейному уравнению $\partial_t \Omega + (\mathbf{U} \nabla \mathbf{U}) - \nu \Delta \Omega = 0$ [8]. В паре с уравнением $\Delta \psi = \Omega$ оно обобщает систему (15) на общий случай волнового движения с произвольной амплитудой. Но для такой ситуации неизвестна процедура исключения из имеющейся пары уравнений функции Ω . Для единообразия с последующими исследованиями, в которых аналогичная задача будет рассматриваться в нелинейной постановке, соотношения на функцию ψ используются в форме (15).

Теперь учтем, что если вихревое (погранслоное) течение сосредоточено только в узком приповерхностном слое, то компоненты скорости этого течения поперек пограничного слоя изменяются на характерном линейном масштабе δ , а вдоль слоя — на характерном линейном масштабе, равном длине волны λ . Поэтому отношение производных от этих величин вдоль Oz к производным вдоль Ox имеет порядок $\sim \lambda/\delta$. Здесь и далее знак „ \sim “ имеет смысл символа отношения „сравнение по порядку величины“. Мы приняли, что $\delta/\lambda \ll 1$ и $\delta \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow 0$ (см. (1)). Отсюда получают оценки

$$\nu \rightarrow 0: \quad \left| \frac{\partial_x v^{(e)}}{\partial_z v^{(e)}} \right| = \left| \frac{\partial_{xx} \psi}{\partial_{xz} \psi} \right| \sim O\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \rightarrow 0;$$

$$\left| \frac{\partial_x u^{(e)}}{\partial_z u^{(e)}} \right| = \left| \frac{\partial_{xz} \psi}{\partial_{zz} \psi} \right| \sim O\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \rightarrow 0.$$

Несложно сделать выводы, что интересующий нас класс решений должен удовлетворять условию

$$\nu \rightarrow 0: \quad \left| \frac{\partial_{xx} \psi}{\partial_{zz} \psi} \right| = \left| \frac{\partial_{xx} \psi}{\partial_{xz} \psi} \right| \left| \frac{\partial_{xz} \psi}{\partial_{zz} \psi} \right| \sim O\left(\frac{\delta^2}{\lambda^2}\right) \rightarrow 0. \quad (16)$$

Граничные условия (3), (4) превращаются в граничные условия на функции φ, ψ, Ω , если учесть, что входящие в них компоненты скорости выражаются через введенные скалярные функции по формулам

$$u^{(p)} = \partial_x \varphi; \quad v^{(p)} = \partial_z \varphi; \quad u^{(e)} = -\partial_z \psi; \quad v^{(e)} = \partial_x \psi. \quad (17)$$

Во второе из соотношений (3) входит давление p на уровне $z = 0$. Чтобы обойтись без поиска давления во всем объеме, дополним граничные условия проекцией уравнения Навье-Стокса (2) на ось Ox . Оно вместе с динамическим граничным условием (3) будет содержать функцию $p = p(t, x) \equiv p(t, x, z = 0)$, которая в процессе решения исключится. В полученном соотношении нужно учесть, что для горизонтальной компоненты потенциальной части течения выполняется условие:

$$\partial_{xx} u^{(p)} + \partial_{zz} u^{(p)} = \Delta u^{(p)} = \Delta(\partial_x \varphi) = \partial_x(\Delta \varphi) = 0.$$

Наконец, примем во внимание обращение в нуль ротора скорости Ω на нижней границе слоя. В результате (14), (15) будут дополнены граничными условиями

$$z = 0: \quad \partial_t^\xi - (v^{(p)} + v^{(e)}) = 0; \quad (18)$$

$$-\rho g \xi + p - 2\rho \nu \partial_z (v^{(p)} + v^{(e)}) + \gamma \partial_{xx} \xi = 0; \quad (19)$$

$$\rho \partial_t (u^{(p)} + u^{(e)}) + \partial_x p - \rho \nu (\partial_{xx} u^{(e)} \partial_{zz} u^{(e)}); \quad (20)$$

$$\partial_z (u^{(p)} + u^{(e)}) + \partial_x (v^{(p)} + v^{(e)}) = 0; \quad (21)$$

$$z = -\delta: \quad \Omega = 0; \quad (22)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad u^{(p)} \rightarrow 0; \quad \nabla^{(p)} \rightarrow 0. \quad (23)$$

Соотношения (14)–(23) представляют собой формулировку модельной задачи, в которую преобразуется исходная задача (2)–(4) на основании представлений о погранслоной структуре ее решения. Несложно видеть, что в пределе $\delta \rightarrow \infty$ формулировка модельной задачи (14)–(23) полностью эквивалентна формулировке исходной задачи (2)–(4), переписанной через вспомогательные скалярные функции φ, ψ, Ω . Значит, решения модельной и исходной задач в пределе $\delta \rightarrow \infty$ совпадают. Но это утверждение не конструктивно. Целесообразно рассмотреть вопрос, при каком конкретном численном значении толщины пограничного слоя δ можно говорить о близости точного и модельного решений.

Решение модельной задачи

Для неизвестных величин $\xi = \xi(x, t)$, $p = p(x, t)$, $\varphi = \varphi(x, z, t)$, $\psi = \psi(x, z, t)$ будем искать решение в виде бегущей волны $\sim \exp(\theta)$:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ p \\ \varphi \\ \psi \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ f(z) \\ h(z) \\ r(z) \end{pmatrix} \exp(\theta). \quad (24)$$

Подставив выражение для φ в уравнение Лапласа (14) и учитывая (23), найдем, что

$$f(z) = a \exp(kz),$$

где a — неопределенная константа. Подставив выражение для Ω в (15) с учетом граничного условия (22), найдем

$$r(z) = b \sinh(q(z + \delta)),$$

где b — неопределенная константа. Теперь из второго уравнения (15), выбрав решение, удовлетворяющее условию (16), можно получить

$$h(z) = (b/q^2) \sinh(q(z + \delta)).$$

Подставив эти выражения в (24), приходим к выражениям для неизвестных функций

$$\begin{pmatrix} \xi \\ p \\ \varphi \\ \psi \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ a \exp(kz) \\ \frac{b}{q^2} \sinh(q(z + \delta)) \\ b \sinh(q(z + \delta)) \end{pmatrix} \exp(\theta). \quad (25)$$

Подставив (25) в (17), а полученные выражения — в граничные условия (18)–(21), получим систему четырех линейных однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных констант α, β, a, b , которая в матричной форме записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} S & 0 & -k & \frac{ik}{q^2} \sinh(q\delta) \\ -\frac{\rho}{k} \omega_0^2 & 1 & -2\rho v k^2 & \frac{2i\rho v k}{q} \cosh(q\delta) \\ 0 & -ik & -i\rho k S & -\rho \frac{S+v(k^2-q^2)}{q} \cosh(k\delta) \\ 0 & 0 & -2ik^2 & -\frac{(k^2+q^2)}{q^2} \sinh(q\delta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Условие нетривиальной разрешимости этой системы — обращение в нуль определителя коэффициентов при

неизвестных α, β, a, b — приводит к дисперсионному уравнению

$$4\rho v k^3(S + vk^2) - q(\rho\omega_0^2 + (S - 2vk^2)^2) \tanh(q\delta) = 0. \quad (27)$$

Полагая, согласно (12)

$$v = \Lambda \delta^2; \quad \Lambda = \frac{\delta^2 \omega_0}{2G},$$

и определив решение (27) с точностью до слагаемых $\sim \delta^2$, находим, что

$$S \approx i\omega_0 - 2\Lambda \delta^2 k^2 = i\omega_0 - 2vk^2.$$

Иными словами, независимо от выбора значения G в формуле (12), исследуемое волновое движение в модельном течении подчиняется при малой вязкости дисперсионному соотношению, которое получается в точном решении. При таком значении S выражение для параметра q в пределе малой вязкости примет вид

$$q \equiv \sqrt{k^2 + S/v} \approx (1+i)\sqrt{\omega_0/(2v)} \equiv (1+i)/\delta_L,$$

что совпадает со вторым соотношением (11).

Выполнение соотношения (27) гарантирует линейную зависимость системы уравнений (26). Поэтому константы β, a, b можно выразить через амплитуду волны α , оставив три уравнения с ненулевым определителем из коэффициентов при β, a, b . Взяв первое, третье и четвертое уравнения, получим:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \times \begin{pmatrix} \rho S(S(k^2 + q^2) - 2kq(S + v(k^2 - q^2))) \frac{\coth(q\delta)}{k(k^2 - q^2)} \\ -S \frac{k^2 + q^2}{k(k^2 - q^2)} \\ \frac{S}{\sinh(q\delta)} \frac{2ikq^2}{(k^2 - q^2)} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что компоненты потенциальной части поля скоростей модельной задачи определяются по тем же формулам (9), что и компоненты потенциальной части поля скоростей точного решения задачи (2)–(4).

Для погранслойной части решения модельной задачи получаются формулы, отличные от выражений (10) для вихревой составляющей точного поля скоростей в приближении малой вязкости

$$\begin{pmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} ki(1+i)\sqrt{2v\omega_0} \frac{\cosh(q(z+\delta))}{\sinh(\delta q)} \\ -2vk^2 \frac{\sinh(q(z+\delta))}{\sinh(\delta q)} \end{pmatrix} \times \exp(St - ikx) + K.C. \quad (28)$$

Здесь S и q вычисляются по формулам (11).

Упрощение модельной задачи

Математическая формулировка модельной задачи без ущерба для вида решения в пределе малой вязкости может быть упрощена с помощью построений, аналогичных тем, что используются в традиционной теории пограничного слоя [7], с некоторым различием в представлении о строении течения в пограничном слое, связанном с наличием свободной поверхности. Нижеследующее упрощение основано на оценочных рассуждениях, которые легко провести даже без знания точного решения. Но для проверки полученных выводов, там, где это важно, проводится сравнение свойств моделируемого решения со свойствами точного (8)–(11).

Выделив наиболее существенные свойства точного решения рассматриваемой задачи вблизи свободной поверхности, примем следующее соглашение о строении течения в пограничном слое вблизи свободной поверхности. Течение состоит из главной (потенциальной) и добавочной погранслоевой (вихревой) частей. Вихревая часть течения является малой, исчезающей в пределе $v \rightarrow 0$, добавкой к основной части течения. Для основной части движения характерный линейный масштаб, на котором изменяются компоненты скорости, одинаков во всех направлениях. Для вихревой части течения характерный линейный масштаб, на котором изменяются компоненты скорости в направлении, перпендикулярном пограничному слою, равен толщине слоя, а вдоль слоя — определяется характерным горизонтальным размером поверхностного возмущения.

На основании изложенного введем правила оценки производных от искомых величин по пространственным координатам. Для φ , $u^{(p)}$, $v^{(p)}$ будем пользоваться следующим формальным правилом построения оценки сравнения: ∂_x переходит в $1/\lambda$ и ∂_z переходит в $1/\lambda$. Например: $\partial_x u^{(p)} \sim u^{(p)}/\lambda$. Для погранслоевых величин ψ , Ω , $u^{(e)}$, $v^{(e)}$ правило оценки производных другое: ∂_x переходит в $1/\lambda$, а ∂_z переходит $1/\delta$, например, $\partial_x u^{(e)} \sim u^{(e)}/\lambda$, но $\partial_z u^{(e)} \sim u^{(e)}/\delta$.

Воспользуемся малостью толщины пограничного слоя δ по сравнению с длиной волны λ и упростим формулировку модельной задачи (18)–(23), пренебрегая в суммах вида $\Xi = A + B$ слагаемым B , если $B/A \sim O(\delta^2/\lambda^2)$:

$$A + B = A \left(1 + \frac{B}{A} \right) = A \left(1 + O \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right) \right) \approx A.$$

В используемом приближении в (15) можно опустить слагаемые $\partial_{xx}\Omega$ и $\partial_{xx}\psi$. Тогда основные уравнения (15) модельной задачи упростятся до соотношений

$$z < 0: \quad \Delta\varphi = 0; \quad (29)$$

$$-\delta < z < 0: \quad \partial_t \Omega - v \partial_{zz} \Omega = 0; \quad \partial_z \psi = \Omega. \quad (30)$$

Упростим и граничные условия. Заметим, что условие (21) с учетом определения функции $\Omega = \partial_x v - \partial_z u$ можно переписать в виде

$$z = 0: \quad \Omega = 2\partial_x v = 2\partial_x (v^{(p)} + v^{(e)}). \quad (31)$$

Пусть W — характерное значение скорости потенциального течения на уровне $z = 0$. При потенциальном волновом течении частицы жидкости двигаются по траекториям, близким к окружностям [6–9]. Поэтому горизонтальную и вертикальную компоненты скорости потенциального течения будем считать величинами одного порядка

$$\frac{u^{(p)}}{W} \sim \frac{v^{(p)}}{W} \sim O(1). \quad (32)$$

Из (31), (32), оценки $\partial_x v \sim v/\lambda$ и малости $v^{(e)}$ в сравнении с $v^{(p)}$ следует

$$\Omega \sim \frac{W}{\lambda}. \quad (33)$$

Из условия солениодальности вихревой части поля скоростей $\partial_x u^{(e)} + \partial_z v^{(e)} = 0$ следует, что $\partial_x u^{(e)} \sim \partial_z v^{(e)}$. Отсюда можно получить оценки

$$\frac{v^{(e)}}{u^{(e)}} \sim O \left(\frac{\delta}{\lambda} \right); \quad \frac{\partial_x v^{(b)}}{\partial_z u^{(b)}} \sim O \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right). \quad (34)$$

Значит, в левой части соотношения $\Omega = \partial_x v^{(e)} - \partial_z u^{(e)}$ главным является второе слагаемое, и поэтому $\Omega \sim u/\delta$. Сравнив эту оценку с (33) и (34), получим:

$$\frac{u^{(e)}}{W} \sim O \left(\frac{\delta}{\lambda} \right); \quad \frac{v^{(e)}}{W} \sim O \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right). \quad (35)$$

Из оценок (34) и определения Ω следует, что (21) можно записать в другом виде

$$z = 0: \quad \partial_z u^{(p)} + 2\partial_x (v^{(p)} + v^{(e)}) = 0. \quad (36)$$

Если в (10) учесть, что кинематическая вязкость ν пропорциональна δ^2 , то несложно убедиться, что оценочные соотношения (34)–(36) действительно выполняются для точно вычисленных компонент $u^{(e)}$ и $v^{(e)}$.

За характерное время, в течение которого изменяются функции, входящие в задачу, естественно принять $T = \omega_0^{-1}$, где ω_0 — характерная циклическая частота волнового движения в пределе идеальной жидкости.

Несложно показать, что в условии (19) в приближении малой вязкости можно пренебречь слагаемым $2\rho\nu\partial_z v^{(b)}$. Действительно, из кинематического условия (18), оценки (32) и малости $v^{(e)}$ в сравнении с $v^{(p)}$ имеем $\xi \sim W/\omega_0$. Кроме того, воспользуемся тем, что $v \sim \omega_0\delta^2$. Тогда легко оценить отношение слагаемого $2\rho\nu\partial_z v^{(e)}$ ко второму слагаемому левой части (19):

$$\frac{2\rho\nu\partial_z v^{(e)}}{\rho g \xi} \sim \frac{\omega_0\delta^2}{g(W/\omega_0)} \frac{W}{\delta} \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right) = \frac{\delta\omega_0^2}{g} \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right).$$

Произведение величины порядка δ^2/λ^2 на малую $\delta\omega_0^2/g$ при $\delta \rightarrow 0$ дает величину более высокого порядка малости, чем $\sim \delta^2/\lambda^2$.

Аналогичным образом можно убедиться в возможности пренебречь в (20) слагаемым $\rho v \partial_{xx} u^{(e)}$, сравнив его с первым слагаемым этого условия:

$$\frac{\rho v \partial_{xx} u^{(e)}}{\rho \partial_t u^{(p)}} \sim \frac{\omega_0 \delta^2 W}{\omega_0 W \lambda^2} \left(\frac{\delta}{\lambda} \right) = \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^3.$$

Проведя аналогичный анализ для всех остальных слагаемых, входящих в граничные условия, можно убедиться, что они в рамках выбранного приближения должны быть сохранены.

Собрав все соотношения упрощенной модельной задачи, получим математическую формулировку модельной задачи, которая получалась в результате применения теории пограничного слоя

$$\begin{aligned} z < 0: & \quad \Delta \varphi = 0; \\ -\delta < z < 0: & \quad \partial_{zz} \psi = \Omega; \quad \partial_t \Omega - v \partial_{zz} \Omega = 0. \\ z = -\delta: & \quad \Omega = 0; \quad u^{(p)} = \partial_x \varphi; \quad v^{(p)} = \partial_z \varphi; \\ & \quad u^{(e)} = \partial_z \varphi; \quad v^{(e)} = \partial_x \varphi; \\ z = 0: & \quad \partial_t \xi - (v^{(p)} + v^{(e)}) = 0; \\ & \quad -\rho g \xi - p - 2\rho v \partial_z (v^{(p)}) + \gamma \partial_{xx} \xi = 0; \\ & \quad \rho \partial_t (u^{(p)} + u^{(e)}) + \partial_x p - \rho v \partial_{zz} u^{(e)}; \\ & \quad \partial_z u^{(p)} + 2\partial_x (v^{(p)} + v^{(e)}) = 0; \\ z \rightarrow -\infty: & \quad u^{(p)} \rightarrow 0; \quad v^{(p)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Видно, что в формулировке упрощенной модельной задачи отсутствует условие (16), но это не означает, что оно не учитывается: условие было использовано на этапе упрощения уравнений, и для искомых решений оно удовлетворяется.

Решение упрощенной задачи

Принцип решения упрощенной модельной задачи (37) такой же, как у модельной задачи (14)–(23). Но объем вычислений заметно меньше. Отличие состоит в том, что другим получается явный вид параметра q , а вместо (26) получается система уравнений

$$\begin{pmatrix} S & 0 & -k & \frac{ik}{q^2} \sinh(q\delta) \\ -\frac{\rho}{k} \omega_0^2 & 1 & -2\rho v k^2 & 0 \\ 0 & -ik & -i\rho k S & -\rho \frac{(S-vq^2)}{q} \cosh(k\delta) \\ 0 & 0 & -2ik^2 & -\frac{(2k^2+q^2)}{q^2} \sinh(q\delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ d \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дисперсионное уравнение после сокращения на $ik\rho \sinh(q\delta)$ принимает вид

$$(S + 2vk^2)^2 + \omega_0^2 = 0,$$

и в приближении малой вязкости из него получаются известные соотношения (11). Вычисление компонент поля скоростей в приближении малой вязкости приводит к прежним соотношениям: (9) — для потенциальной части течения и (28) — для вихревой (погранслоевой).

Получилось, что в приближении малой вязкости при моделировании решения (2)–(4) с помощью задачи, в которой вихревое движение сосредоточено в пограничном слое толщиной δ , без ущерба для вида финальных выражений можно использовать не полные уравнения и граничные условия модельной задачи (14)–(23), а упрощенные уравнения (37). Упрощенные уравнения получаются из (14)–(23) с помощью теории пограничного слоя, модифицированной для расчета течения вблизи подвижной свободной поверхности жидкости. В отличие от теории пограничного слоя вблизи твердой стенки, в теории пограничного слоя вблизи свободной поверхности нужно учитывать значительность потенциальной составляющей течения в пограничном слое. Причем на компоненты этой составляющей не распространяются упрощения теории пограничного слоя, основанные на утверждении о малости производных от компонент скорости вдоль слоя по сравнению с производными от тех же компонент поперек слоя.

Подбор толщины пограничного слоя

Независимо от выбора уравнений модельной задачи (14)–(23) или (37) в пределе малой вязкости получились соотношения, которые отличаются от решений (8)–(11) исходной задачи (2)–(4) только в выражениях для компонент скорости послойной добавки $u^{(e)}$ и $v^{(e)}$: вместо (10) получились соотношения (28). Исследуем, насколько хорошо соотношения (28) аппроксимируют выражения (10) в зависимости от значения параметра δ , а конкретней — от значения безразмерного параметра G в формуле (12).

Растянем вертикальную координату в δ раз перпендикулярно пограничному слою:

$$\Pi = z/\delta. \quad (38)$$

Согласно (11)–(12), в приближении малой вязкости

$$q = (1+i)/\delta_L = G(1+i)/\delta.$$

Поэтому, учитывая (38), можно записать:

$$qz = G(1+i)\Pi; \quad q\delta = G(1+i);$$

$$q(z+\delta) = G(1+i)(1+\Pi);$$

$$vq = v(1+i)G/\delta = \sqrt{v\omega_0}(1+i)/\sqrt{2}.$$

Таким образом, через растянутую вертикальную координату (38), которая равна нулю на уровне $a = 0$ и минус единице на границе пограничного слоя, соотношения (10) и (28) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} k \sqrt{2\nu\omega_0} (1+i) i \exp(G(1+i)\Pi) \\ -2\nu k^2 \exp(G(i+1)\Pi) \end{pmatrix} \times \exp(\theta) + K.C.; \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} u_*^{(e)} \\ v_*^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} k \sqrt{2\nu\omega_0} (i+1) i F(G, \Pi) \\ -2\nu k^2 \Phi(G, \Pi) \end{pmatrix} \exp(\theta) + K.C.; \quad (40)$$

$$F(G, \Pi) = \frac{\cosh(G(1+i)(1+\Pi))}{\sinh(G(1+i))}; \quad (41)$$

$$\Phi(G, \Pi) = \frac{\sinh(G(1+i)(1+\Pi))}{\sinh(G(1+i))}. \quad (42)$$

Звездочкой обозначены компоненты погранслошной добавки к основному полю скоростей, рассчитываемые из решения модельной задачи, а для компонент точного решения (2)–(4) сохранено прежнее обозначение.

Из (39) следует, что точность аппроксимирования функций $u^{(e)}, v^{(e)}$ функциями $u_*^{(e)}, v_*^{(e)}$ при фиксированном значении параметра $G = G_0$ полностью определяется тем, насколько точно зависимость $\eta_{G_0}(\Pi) = \exp(G_0(1+i)\Pi)$ аппроксимируется функциями $F_{G_0}(\Pi) = F(G_0, \Pi)$ и $\Phi_{G_0} = \Phi(G_0, \Pi)$ на промежутке $-1 \leq \Pi \leq 0$. Выясним, насколько близки эти функции при толщине пограничного слоя, определяемой по Лонгет-Хиггинсу [1], т.е. когда $\delta = \delta_L$, что, согласно (12), означает выбор $G = 1$.

На рис. 1 показано, как ведут себя действительные и мнимые части сравниваемых функций на промежутке $-1 \leq \Pi \leq 0$. Из рис. 1 видно, что при $G = 1$ зависимости действительной и мнимой частей функции (41) и (42) от параметра Π заметно отличаются от действительной и мнимой частей функции $\exp((1+i)\Pi)$ на всем промежутке $-1 \leq \Pi \leq 0$. В частности, модельное решение прогнозирует уменьшение вертикальной компоненты скорости на нижней границе слоя от нуля, а не в $e \approx 2.7$ раза, как в точном решении. Кроме того, на верхней границе слоя аппроксимирующая функция $u_*^{(e)}$ имеет заметную ненулевую отрицательную мнимую часть (см. поведение $\text{Im}(F(1, \Pi))$ на рис. 1, *b*), что означает наличие в законе эволюции вихревого движения фазового сдвига по отношению к волновому возмущению ξ . Другими словами, при моделировании возникает фиктивный эффект наличия конечного времени релаксации — характерного времени, в течение которого вихревое движение на верхней границе слоя реагирует на изменения, происходящие на свободной поверхности. В точном решении такого эффекта нет: $\text{Im}(\exp((i+1)\Pi)) = 0$ при $\Pi = 0$.

Таким образом, при выборе толщины пограничного слоя по Лонгет-Хиггинсу представление о существовании вихревого движения только в приповерхностном

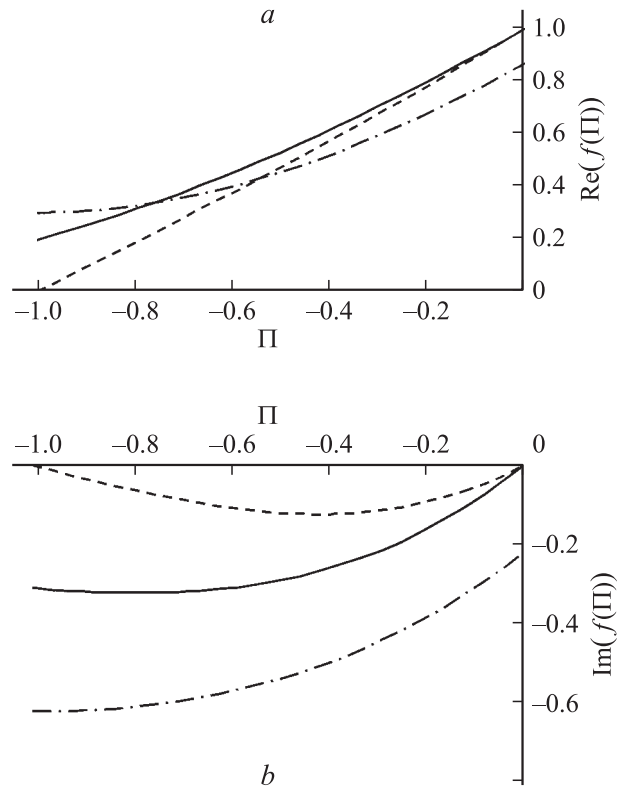


Рис. 1. Сравнение зависимости амплитудных множителей при периодической части волнового решения от безразмерной глубины Π : точного (сплошная линия) и модельных (пунктир — горизонтальная компонента скорости, штрихпунктир — вертикальная), построенные при $G = 1$. Сплошная линия — функция $f(\pi) = \exp((1+i)G\Pi)$, пунктир — $f(\Pi) = \Phi(G, \Pi)$, штрихпунктир — $f(\Pi) = F(G, \Pi)$. *a* — действительная часть комплексного амплитудного множителя, *b* — мнимая.

слое толщиной δ_L приводит к существенным ошибкам: при моделировании течения получаются неверные значения для компонент скоростей вихревой составляющей течения и появляется фиктивный релаксационный эффект. Эти ошибки моделирования принципиальны в ситуации, когда рассматриваемый метод применяется для расчета влияния на движение свободной поверхности релаксационных эффектов (релаксации заряда, поверхностно-активных веществ и т.п.) ввиду их чувствительности к поведению поля скоростей непосредственно в приповерхностной области течения [3,4].

На рис. 2–4 построены зависимости действительных и мнимых частей функций $\exp(G(i+1)\Pi)$, $\Phi(G, \Pi)$ и $F(G, \Pi)$ на промежутке $-1 \leq \Pi \leq 0$ при различных значениях G . Из рисунков видно, что при увеличении значения G разница между рассматриваемыми функциями быстро уменьшается. Конкретней, уменьшается абсолютная погрешность, с которой функции $\Phi(G, \Pi)$ и $F(G, \Pi)$ модельного решения (40) аппроксимируют функцию $\exp(G(i+1)\Pi)$ точного решения (39). Расчеты показывают, что погрешность аппроксимации, понимаемая в смысле абсолютного значения максимального

отклонения аппроксимирующих функций от точной величины, достигает максимума на нижней границе слоя при $\Pi = -1$. На большей части пограничного слоя $0.8 \leq \Pi \leq 0$ эта погрешность при $G \geq 4$ примерно на порядок меньше (см. рис. 3, 4). При $G = 4$ сравнение действительных частей функций $\exp(G(i + 1)\Pi)$, $\Phi(G, \Pi)$ и $F(G, \Pi)$ (рис. 4, а) обнаруживает погрешность ≈ 0.01 ,

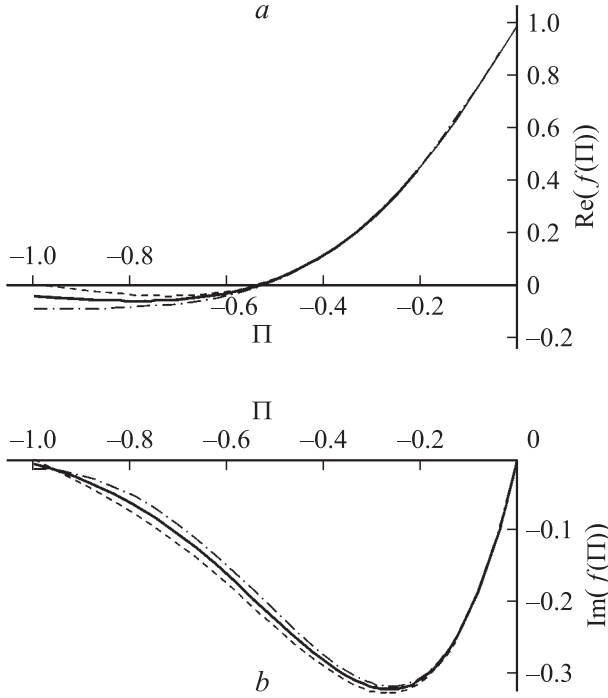


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, $G = 3$.

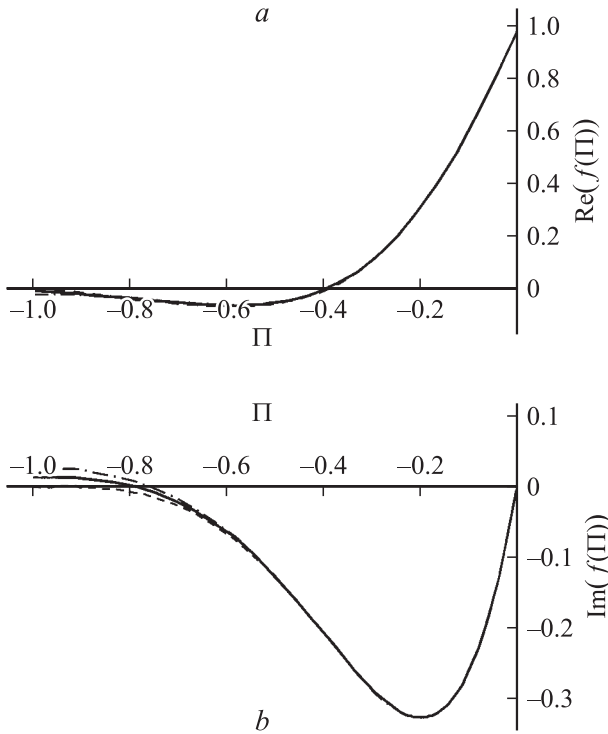


Рис. 3. То же, что и на рис. 1, $G = 4$.

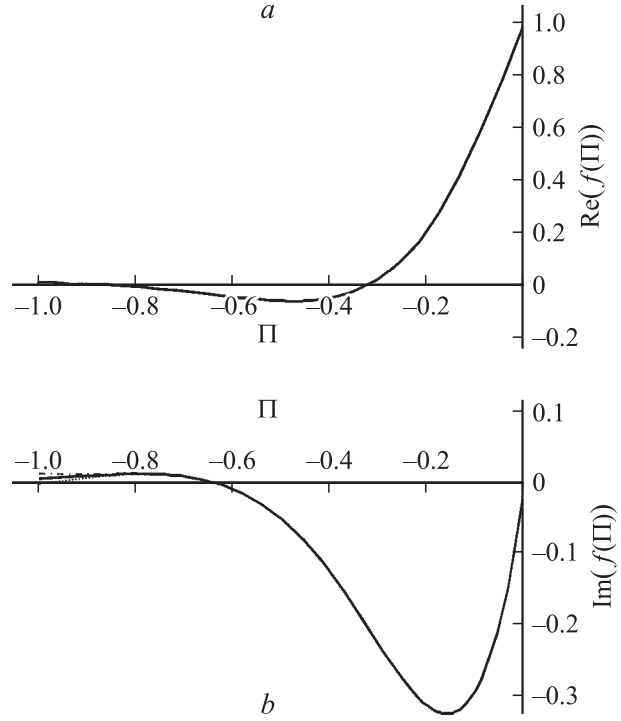


Рис. 4. То же, что и на рис. 1, $G = 5$.

а сравнение мнимых частей этих функций приводит к погрешности ≈ 0.03 . При $G < 4$ соответствующие погрешности увеличиваются (рис. 1, 2), а при $G > 4$ — уменьшаются (см. рис. 4, на котором различия между кривыми порядка толщины линии). С определенным запасом точности можно утверждать, что при $G = 4$ абсолютная погрешность, с которой функции $\Phi(4, \Pi)$ и $F(4, \Pi)$ аппроксимируют функцию $\exp(4(i + 1)\Pi)$, не превышает 5% от значения этой функции на верхней границе слоя

$$\exp(4(i + 1)\Pi)|_{\Pi=0} = 1.$$

Рассмотрев строение модельных (40) и точных (39) выражений, несложно заключить, что аналогичное утверждение имеет место относительно характера аппроксимации соотношений (29) выражениями (30). Так, для горизонтальной компоненты скорости имеем

$$u^{(e)} - u_*^{(e)} = \Delta u^{(e)} = \frac{1}{2} \alpha k \sqrt{2\nu\omega_0} (1 + i) i \Delta\Phi \exp(\theta) + K.C.;$$

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi(G, \Pi) = \exp(G(1 + i)\Pi) - \Phi(G, \Pi).$$

Отсюда на основании (39) и выполненных оценок получаем

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta u^{(e)}|}{|u^{(e)}|_{\Pi=0}} &= \frac{|\Delta\Phi|}{|\exp(G(1 + i)\Pi)|_{\Pi=0}} = |\Delta\Phi| \\ &= \sqrt{\text{Re}(\Delta\Phi)^2 + \text{Im}(\Delta\Phi)^2} \approx \sqrt{0.01^2 + 0.03^2} \approx 0.03. \end{aligned}$$

Таким образом, можно утверждать, что модельные выражения для вихревых компонент поля скоростей (40)

при выборе $G = 4$ аппроксимируют точные компоненты (39) вихревой составляющей поля скоростей с погрешностью не более 5% от значения этих компонент на верхней границе слоя. Точность аппроксимации увеличивается с ростом значений G и снижается при уменьшении G .

Можно утверждать, что $G = 4$ — это то значение, начиная с которого толщина пограничного слоя $\delta = G\delta_L$ может быть принята за глубину, на которой вихревое движение, порождаемое движением свободной поверхности, существенно подавлено. На глубине более, чем δ , оно настолько незначительно, что при изменении полной формулировки задачи расчета течения на формулировку с дополнительным условием исчезновения ротора скорости при $z \leq \delta$ решение измененной задачи слабо отличается от точного: ошибка лежит в пределах нескольких процентов от значения вихревой компоненты скорости на верхней границе слоя.

Заключение

Теория пограничного слоя может быть с успехом использована для аналитического расчета течений жидкости, связанных с капиллярно-гравитационными волнами на свободной поверхности маловязкой жидкости. Но при этом необходимо принимать во внимание, что хорошее приближение к точному решению можно получить только при достаточно большой толщине пограничного слоя (не менее чем в четыре раза большей традиционно используемых). Структура поля скоростей течения жидкости в пограничном слое вблизи свободной поверхности отличается от строения погранслоного течения вблизи твердой стенки: при наличии свободной поверхности имеется потенциальное течение, доминирующее во всей области движения, в том числе и в пограничном слое; в самом пограничном слое на потенциальное течение аддитивно накладывается вихревое; однако выводы классической теории пограничного слоя о быстром изменении компонент скорости в направлении, перпендикулярном границе, по сравнению с их изменением вдоль границы справедливы только для компонент поля скоростей вихревого движения и неприменимы к компонентам потенциальной части течения.

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ МД-1990.2005.1 и гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

- [1] Longuet-Higgins M.S. // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.
- [2] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184–192.
- [3] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 29–37.
- [4] Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 37–44.
- [5] Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 9–17.
- [6] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 538 с.
- [7] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
- [8] Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. М.: Постмаркет, 2001. 560 с.
- [9] Бэтчелор Дж.К. Введение в динамику жидкости. М.–Ижевск: Изд-во НИЦ. Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 768 с.
- [10] Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч. 1. М.: Мир, 1981. 480 с.
- [11] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 3. С. 9–16.
- [12] Морс Ф., Фейнбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.