01;09

Автопараметрическая система с запаздыванием и инерционностью

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники РАН,
141190 Фрязино, Московская область, Россия
e-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

(Поступило в Редакцию 23 ноября 2006 г.)

Предложена новая модель, описывающая генератор с запаздыванием и инерционностью, содержащий фильтрующий элемент. Приведены результаты численного анализа. Рассмотрена модификация модели, в которой наряду с добавлением в колебательный контур нелинейной возвращающей силы обеспечено автопараметрическое самовоздействие. Показано, что в модифицированной модели автопараметрическая обратная связь даже при слабой нелинейности обеспечивает возбуждение развитого хаоса, обладающего широким спектром мощности.

PACS: 05.45.-a

Введение

Генераторы с запаздыванием, обладающие хаотической динамикой, в настоящее время хорошо известны и находят широкое практическое применение [1]. При их изучении рассматривались различные математические модели, в той или иной мере отражающие особенности формирования хаотических колебаний [2–6]. С целью лучшего понимания хаотического поведения автоколебательных систем с запаздыванием и возможностей управления спектром генерируемых колебаний исследовались также неавтономные генераторы [7,8] и связанные системы [9]. В то же время одна из простых математических моделей, отображающая основные особенности генератора с запаздывающей обратной связью, не была рассмотрена.

В настоящей работе исследуется модель, основанная на усилителе с запаздыванием при учете инерционных свойств системы. Дополненная нелинейной возвращающей силой в колебательном контуре и автопараметрической обратной связью, позволяющей управлять колебаниями, предложенная модель изучена численными методами.

Математические модели

Структурная схема автоколебательной системы с запаздыванием и инерционностью представлена на рис. 1. Генератор состоит из замкнутых в кольцо нелинейного усилителя (*1*), фильтра второго порядка (*2*), линии задержки (*3*) и фильтра первого порядка (*4*). Процессы в этой системе при отмеченной на рис. 1 последовательности расположения пассивных элементов *2–4* (после усилителя) могут быть описаны уравнениями

$$
\begin{aligned}
dx/dt &= y - \mu x,\\
dy/dt &= F(z) - x,\\
dz/dt &= [x(t-\tau) - z]/\delta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $F(z)$ — амплитудная характеристика усилителя, τ — время задержки сигнала, μ — параметр диссипации фильтра второго порядка, δ — постоянная времени фильтра первого порядка. Переменные $y, x, x(t-\tau)$ и z отображают колебательные процессы на выходах элементов *1, 2, 3* и *4* соответственно.

При изменении последовательности расположения пассивных элементов схемы относительно нелинейного усилителя несколько видоизменяются уравнения, описывающие происходящие в ней процессы. Так, при расположении элементов после усилителя *1* в порядке *4, 3, 2* будем иметь

$$
\begin{aligned}
dx/dt &= y - \mu x,\\
dy/dt &= z(t-\tau) - x,\\
dz/dt &= [F(x) - z]/\delta,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

а при реализации расположения пассивных элементов в последовательности *4, 2, 3* уравнения системы принимают вид

$$
\begin{aligned}
dx/dt &= y - \mu x,\\
dy/dt &= z - x,\\
dz/dt &= \{F[x(t-\tau) - z]\}/\delta.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Уравнения (1), а также системы (2) и (3) можно использовать для приближенного моделирования процес-

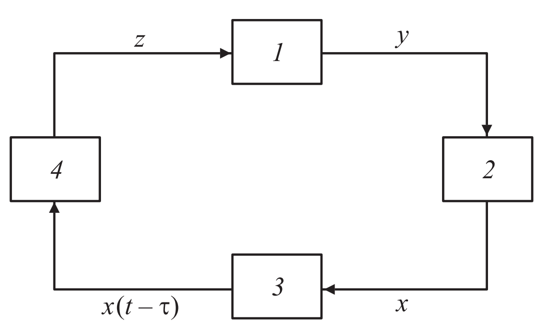

Рис. 1. Структурная схема генератора с запаздыванием и инерционностью.

сов в генераторе с запаздыванием, созданном на основе лампы бегущей волны (ЛБВ), так как используемые в ЛБВ замедляющие системы, обладающие затуханием, обеспечивают наряду с задержкой сигнала и инерционность системы. Уравнения (1) при $\delta \approx 0$ можно использовать также для приближенного анализа процесса хаотизации в генераторе с запаздыванием, исследованном в [10], в котором в качестве нелинейного усилителя применен многорезонаторный клистрон. При этом, естественно, необходим и выбор адекватной аппроксимации нелинейности амплитудной характеристики. Достаточно широкое варьирование ее формой возможно при использовании (применительно к записи уравнений в форме (1)) выражения, используемого в [11], а именно

$$F(z) = Bz/(1+z^n), \tag{4}$$

где B — параметр усиления, n — параметр нелинейности.

Система (1) является частным случаем модели [4], содержащей помимо элементов, указанных на рис. 1, дифференцирующее устройство. Из записи системы в форме (2), (3) при $\tau = 0$ получаются уравнения

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - \mu x, \\ dy/dt &= z - x, \\ dz/dt &= [F(x) - z]/\delta, \end{aligned} \tag{5}$$

детально исследованные в работе [12] при аппроксимации амплитудной характеристики рэлеевским законом, а именно

$$F(x) = Bx\exp(-x^2). \tag{6}$$

Если в схеме рис. 1 вместо обычного фильтра второго порядка использовать колебательный контур, описываемый нелинейным уравнением Матье [13], то уравнение (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - \mu x, \\ dy/dt &= F(z) - \{[1+\alpha\cos(\Omega t)]x + \beta x^3\}, \\ dz/dt &= [x(t-\tau) - z]/\delta, \end{aligned} \tag{7}$$

где α, Ω — амплитуда и частота параметрической накачки, β — параметр нелинейной возвращающей силы.

В системе (7) параметрическое воздействие можно заменить автопараметрическим самовоздействием (АПС), если обеспечить дополнительную обратную связь на время T, достаточное для того, чтобы рассматриваемая система воспринимала задержанный сигнал как „внешний“. В этом случае α приобретает смысл параметра, определяющего АПС, и вместо (7) получим

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - \mu x, \\ dy/dt &= F(z) - \{[1+\alpha x(t-T)] + \beta x^2\}x, \\ dz/dt &= [x(t-\tau) - z]/\delta. \end{aligned} \tag{8}$$

Аналогичные системы с АПС можно получить, используя соотношения (2) или (3). Например, в случае системы (2) при обеспечении АПС будем иметь

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - \mu x, \\ dy/dt &= z(t-\tau) - \{[1+\alpha x(t-T)] + \beta x^2\}x, \\ dz/dt &= [F(x) - z]/\delta. \end{aligned} \tag{9}$$

Численный анализ системы (8), а также ее частного случая (при $\alpha = \beta = 0$), описываемого уравнениями (1), проводился методом Рунге–Кутта четвертого порядка. Аппроксимация нелинейной характеристики осуществлялась с помощью выражения (4). При отсутствии дополнительной обратной связи шаг интегрирования определялся значением 0.04, а при ее наличиии — вдвое меньшей величиной. Неизменяемый параметр $\mu = 0.1$.

Влияние нелинейности амплитудной характеристики при малой инерционности

В случае малой инерционности (при $\delta \ll 1$) при отсутствии автопараметрической обратной связи и нелинейной возвращающей силы в системе, описываемой уравнениями (1) (при $\alpha = \beta = 0$ — уравнениями (8)), хаотизация колебаний возникает при различных нелинейностях амплитудной характеристики. Она облегчается, как и в других моделях с запаздывающим аргументом, при относительно большой нелинейности. При этом, естественно, имеет значение и время запаздывания в цепи обратной связи.

На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая изменение максимальных значений колебательного процесса $x(t)$ (обозначенных $[x]$) в зависимости от параметра усиления. Диаграмма рассчитана при $n = 2$, когда при запаздывании в цепи обратной связи, равном $\tau = 8$, параметр инерционности равен $\delta = 0.1$.

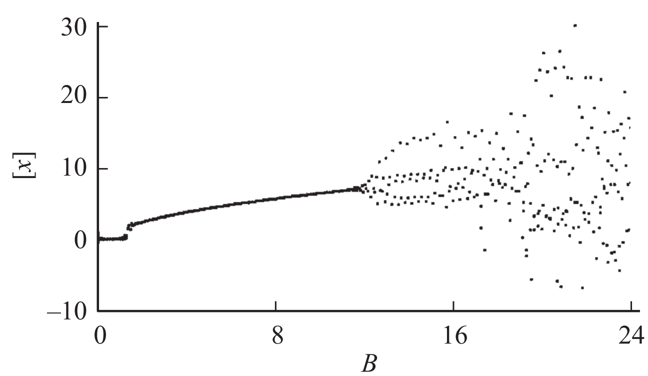

Рис. 2. Изменение максимальных значений колебательного процесса $x(t)$ (при $n = 2$, $\tau = 8$, $\delta = 0.1$) в зависимости от параметра усиления.

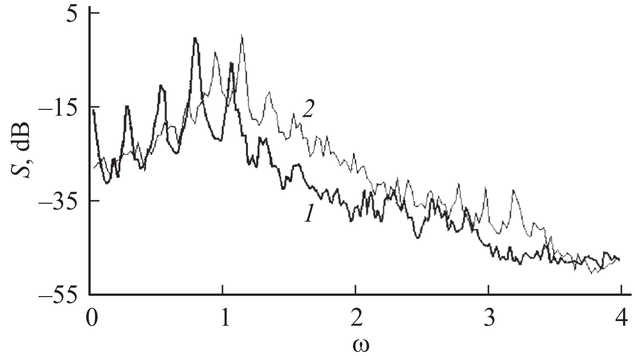

Рис. 3. Спектры мощности, возбуждающиеся при $B = 20$, $\delta = 0.1$, $\tau = 8$.

Как видно, возбуждение колебаний (бифуркация Андронова–Хопфа) происходит при достижении параметром усиления величины $B \approx 1.5$. Сплошная линия, определяющая максимальные значения колебательного процесса, свидетельствует о том, что устанавливаются однотактные колебания, которым в фазовом пространстве соответствует простой предельный цикл. При дальнейшем адиабатическом увеличении параметра усиления происходит бифуркация перехода к сложным (пятитактным) колебаниям (при $B \approx 12$), а при $B > 17$ реализуется хаос: разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса, становится нерегулярным.

При увеличении параметра нелинейности до значения $n = 4$, когда абсолютная величина производной падающего участка характеристики в 4.5 раза больше, чем при $n = 2$, сразу (при $B \approx 1.5$) возбуждаются сложные (четырехтактные) колебания. Заметим, при $B > 4$, реализуется хаос. В то же время при большем значении параметра нелинейности в рассматриваемом интервале изменения параметра усиления возможно возникновение дехаотизации колебаний. Так, в случае $n = 6$, когда абсолютная величина производной падающего участка амплитудной характеристики в 8.3 раза больше, чем при $n = 2$, в интервале $B \in [14, 22]$ наблюдается переход к регулярным движениям. В этом интервале изменения параметра усиления происходят сложные переходы между многотактными колебательными процессами.

При обратном изменении параметра усиления бифуркационные диаграммы иные: проявляется гистерезис. Например, при $n = 2$ хаотические колебания, определяемые нерегулярным разбросом точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса, при уменьшении параметра усиления затягиваются до величины $B \approx 18$, после чего реализуются сложные, а при снижении параметра усиления до величины $B \approx 14$ — пятитактные движения, сохраняющиеся при уменьшении параметра усиления до значения $B \approx 4$. Затем устанавливаются колебания, которым в фазовом пространстве соответствует простой предельный цикл.

На рис. 3 приведены характерные спектры мощности, соответствующие колебаниям, возникающим при $B = 20$, когда $n = 2$ (кривая *1*) и 4 (кривая *2*). Остальные параметры те же, что и при расчете диаграммы, представленной на рис. 2. Как видно, более развитый хаос наблюдается при $n = 4$. При $n = 2$ хаотизация слабее и реализуется на основе пятитактных колебаний.

Приведенные результаты свидетельствуют о возможности хаотизации колебаний при малой инерционности и относительно большом запаздывании в цепи обратной связи. При $n = 4$ хаотизация колебаний является более развитой, чем при $n = 2$, в том смысле, что спектр мощности при том же параметре усиления занимает более широкую область частот. В то же время в случае $n = 6$ при выбранных параметрах наблюдается ухудшение процесса хаотизации.

Влияние инерционности при различных величинах запаздывания

При относительно большом времени запаздывания τ, когда в системе, описываемой уравнениями (1) (или (8) при $\alpha = \beta = 0$), возбуждается хаос, увеличение параметра инерционности приводит к дехаотизации автоколебаний. В то же время при отсутствии запаздывания, в соответствии с результатами работы [12] (в системе, описываемой уравнениями (5), (6)), хаотические колебания реализуются именно при больших величинах δ.

На рис. 4 приведены бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие изменение максимальных значений колебательного процесса в системе (4), (8) в зависимости от параметра инерционности, рассчитанные при $B = 6$, $n = 4$ и различных величинах запаздывания в

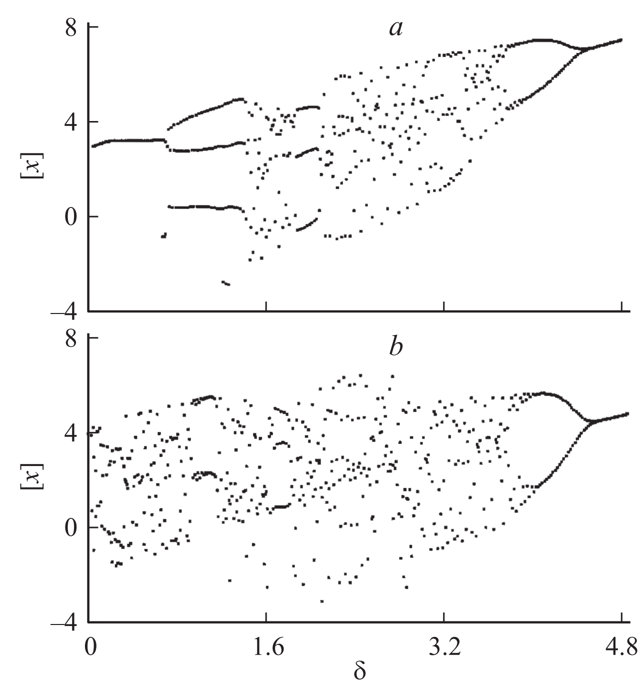

Рис. 4. Изменение максимальных значений колебательного процесса $x(t)$ (при $B = 6$) в зависимости от параметра инерционности.

цепи обратной связи: $\tau = 0.08$ (a), 0.8 (b). При $n = 4$ характеристика, описываемая соотношением (4), близка к характеристике, определяемой выражением (6). При малом запаздывании (a) диаграмма практически не отличается от случая, когда $\tau = 0$. По мере увеличения параметра инерционности после бифуркации Андронова–Хопфа происходит переход (при $\delta \approx 0.7$) к трехтактным колебаниям, на базе которых в окрестности $\delta \approx 1.6$ реализуются хаотические движения. После возбуждения колебаний, которым соответствует пятиоборотный предельный цикл (при $\delta \in [2.2, 2.6]$), происходит переход через хаос к регулярным колебаниям. Последние путем обратных бифуркаций удвоения периода приводят к движениям, которым (при $\delta > 4.4$) в фазовом пространстве соответствует простой предельный цикл. Небольшое увеличение запаздывания приводит к расширению интервалов хаотических движений и к смещению их в область меньших величин параметра инерционности. Так, при $\tau = 0.4$ хаотические движения происходят в интервалах значений параметра инерционности $\delta \in [0.6, 1.7]$ и $\delta \in [2.4, 3.9]$. При $\tau = 0.8$ (b) влияние запаздывания, в смысле способствования развитию хаоса, близко к оптимальному. Хаотические колебания реализуются практически при всех значениях параметра инерционности $\delta < 3.8$, за исключением узких областей двухтактных (при $\delta \approx 1.1$) и трехтактных (при $\delta \approx 1.7$) движений. Переход к однотактным колебаниям происходит при достижении значения $\delta \approx 4.4$. При $\tau = 1.2$ значение параметра инерционности, при котором реализуется переход от двухтактных колебаний к однотактным, снижается до $\delta \approx 4$. При этом уменьшается разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса. При $\tau = 1.6$ значительно снижается бифуркационное значение параметра инерционности, соответствующего переходу к однотактным колебаниям (до $\delta \approx 1.2$). При этом существенно сужается область хаотических движений, а разброс точек, отображающих изменение максимальных значений колебательного процесса, уменьшается.

Результаты численного анализа показывают, что при наличии инерционности хаотизация становится более развитой лишь при относительно малых задержках сигнала в цепи обратной связи. Большие задержки приводят к дехаотизации колебаний даже при малых величинах параметра инерционности.

Влияние нелинейной возвращающей силы и параметрической обратной связи

При воздействии нелинейной возвращающей силы хаотизация колебаний возникает при меньших величинах параметра усиления. Введение дополнительной обратной связи приводит к хаосу с существенным расширением спектра мощности в широком интервале изменения параметра усиления. Это следует из диаграмм, представленных на рис. 5, которые рассчитаны по уравнениям (8); остальные параметры те же, что и в случае рис. 2.

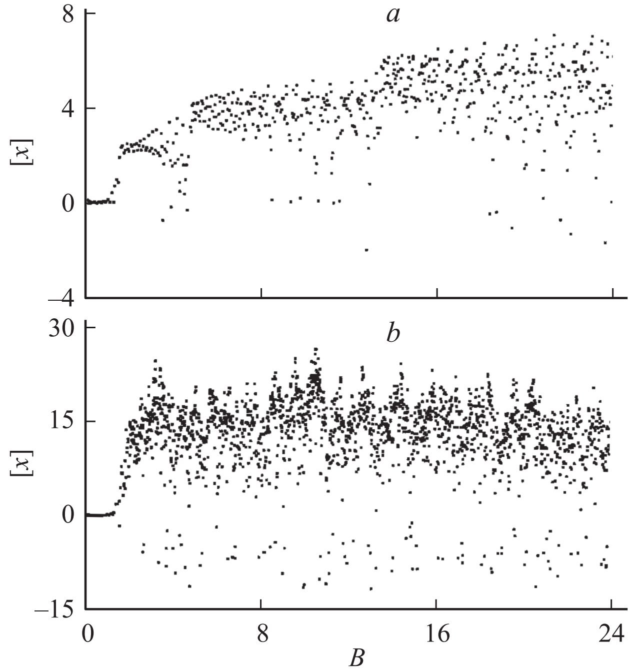

Рис. 5. Изменение максимальных значений колебательного процесса $x(t)$ в зависимости от параметра усиления при наличии нелинейной возвращающей силы (a) и наряду с ней дополнительной обратной связи (b): a — $\alpha = 0$, $\beta = 0.4$; b — $\alpha = 4$, $\beta = 0.4$.

Как видно, нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса $x(t)$, при наличии нелинейной возвращающей силы возникает по достижении параметром усиления $B \approx 8$ (a), а при введении дополнительной автопараметрической обратной связи ≈ 1.5 (b). При АПС хаос возникает жестким образом и реализуется во всем интервале значений параметра усиления, в котором, в соответствии с рис. 2, возможны автоколебания.

При обратном адиабатическом изменении параметра усиления проявляется гистерезис. Нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса $x(t)$, при наличии нелинейной возвращающей силы сохраняется при снижении параметра усиления до $B \approx 12.8$. При введении дополнительной автопараметрической обратной связи колебания, максимальным значениям которых соответствует нерегулярный разброс точек, „затягиваются“, занимая весь интервал изменения параметра усиления.

При больших нелинейностях амплитудной характеристики, в частности при $n = 4$ и 6, в случае введения дополнительной автопараметрической обратной связи хаос также возникает жестким образом, и бифуркационные диаграммы подобны диаграмме, показанной на рис. 5, b. При этом области дехаотизации отсутствуют.

При работе системы с дополнительной автопараметрической обратной связью повышается средняя частота

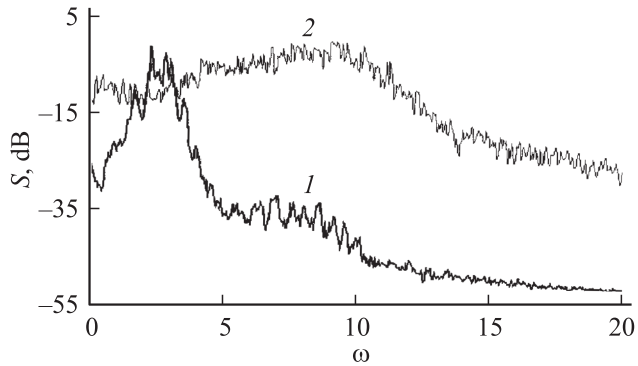

Рис. 6. Спектры мощности в случаях наличия нелинейной возвращающей силы (кривая *1*; $\alpha = 0$, $\beta = 0.4$) и обеспечения наряду с ней дополнительной обратной связи (кривая *2*; $\alpha = 4$, $\beta = 0.4$).

хаотических движений, чему, в частности, способствует наличие нелинейной возвращающей силы. При этом реализуется большее перемешивание фазовых траекторий, а спектр мощности расширяется. Изменение спектра мощности иллюстрируется рис. 6. Спектрограммы рассчитаны при $\tau = 8$, $\delta = 0.1$, $B = 12$ в случае работы системы с нелинейной возвращающей силой (кривая *1*) и при наличии (наряду с этой силой) АПС, обеспечиваемого при $T = 9.6$ (кривая *2*).

Приведенные результаты свидетельствуют о возможности использования АПС для получения хаотических колебаний с широким спектром мощности при различных величинах запаздывания и инерционности, причем даже при слабой нелинейности амплитудной характеристики. При создании автопараметрической обратной связи отсутствуют области дехаотизации колебаний.

Заключение

Рассмотренная новая модель генератора с запаздыванием и инерционностью, дополненная нелинейной возвращающей силой и автопараметрической обратной связью, позволяет формировать хаотические колебания с широким спектром мощности. При этом возбуждение хаоса возможно как при сильной, так и при слабой нелинейности амплитудной характеристики, а также при различных значениях запаздывания и инерционности. Приведенная математическая модель пригодна для описания основных процессов хаотизации в различных автоколебательных системах с запаздыванием, в том числе и систем сверхвысоких частот, основанных на усилителях бегущей волны или на многорезонаторных усилительных клистронах. Она пригодна также для шифрования информации методом [14], основанным на использовании хаотических решений детерминированных уравнений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-02-16536).

Список литературы

[1] *Залогин Н.Н., Кислов В.В.* Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнике и информационные системы. М.: Радиотехника, 2006. 208 с.

[2] *Кислов В.Я.* Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Кн. 5. Саратов: Изд-во СГУ, 1980. С. 25–77.

[3] *Кац В.А., Кузнецов С.П.* // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 12. С. 727–733.

[4] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 2. С. 87–91.

[5] *Владимиров С.Н.* // Изв. вузов. Физика. 1998. Т. 41. № 2. С. 104–113.

[6] *Рыскин Н.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. № 2. С. 129–142.

[7] *Ланда П.С., Перминов С.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 3. С. 437–439.

[8] *Кальянов Э.В., Старков С.О.* // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 23. С. 49–52.

[9] *Беляев Р.В., Кальянов Э.В., Кислов В.Я.* и др. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 8. С. 33–38.

[10] *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В.* и др. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 105–110.

[11] *Глас Л., Мэки М.* От часов к хаосу: Ритмы жизни / Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 248 с.

[12] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.

[13] *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем / Пер. с англ. М.: Мир, 1969. 400 с.

[14] *Кальянов Г.Н., Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 24. С. 45–50.