

# Поверхностные токи сверхпроводящего осесимметричного тела, экранирующие внешнее соосное магнитное поле

© А.О. Савченко,<sup>1</sup> О.Я. Савченко<sup>2</sup><sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия  
e-mail: savch@ommfao1.sccc.ru

(Поступило в Редакцию 8 ноября 2006 г.)

Предложен экономичный метод нахождения токов на поверхности сверхпроводящего осесимметричного тела, когда его ось симметрии и ось симметрии внешнего магнитного поля совпадают, который сводится к решению одномерного интегрального уравнения. Для сверхпроводника, имеющего форму эллипсоида вращения, помещенного в однородное поле, и для шара, помещенного в магнитное поле, значение которого меняется как полином на оси симметрии, приведено аналитическое решение. Для нахождения плотности тока на поверхности произвольного осесимметричного тела, помещенного в произвольное магнитное поле, предложен численный метод решения интегрального уравнения, являющийся комбинацией метода итеративной регуляризации и проекционного метода с проектором в виде  $B$ -сплайнов. Приведены результаты численного восстановления искоемых функций для некоторых частных случаев предложенным методом.

PACS: 74.90.+n

## Введение

Осесимметричное внешнее магнитное поле, созданное вне сверхпроводящего тела, имеющего ту же ось симметрии, что и магнитное поле, индуцирует круговые токи вокруг его оси только на поверхности. Круговой ток с линейной плотностью  $j_0(x)$  для участка оси  $dx$  на расстоянии  $h$  от центра круга радиуса  $r(x)$  создает магнитное поле

$$dB = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{r^2(x)}{[r^2(x) + h^2]^{1.5}} j_0(x) dx,$$

а все поверхностные токи создают следующее магнитное поле на общей оси (см. рисунок)

$$B(s) = \frac{1}{2} \mu_0 \int_0^l \frac{r^2(x)}{[r^2(x) + (s-x)^2]^{1.5}} j_0(x) dx, \quad 0 < s < l, \quad j_0(x) \neq 0, \quad (1)$$

где  $B(s)$  — осевое магнитное поле на расстоянии  $s$  от начала координат,  $r(x)$  — радиус сечения тела на расстоянии  $x$  от начала координат;  $j_0(x) = \frac{dJ(x)}{dx}$ ,  $J(x)$  — полный круговой ток тела левее  $x$ ,  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

Поверхностные токи создают на оси внутри тела магнитное поле, равное по величине, но противоположно направленное внешнему полю. Суммарное поле в этом случае внутри тела равно нулю не только на оси, но и во всем объеме, так как каждое из этих соосных полей удовлетворяет уравнению Лапласа [1]. Отсюда следует, что токи  $j$  для сверхпроводника, помещенного во внешнее осесимметричное поле, принимающее значения  $H(s)$

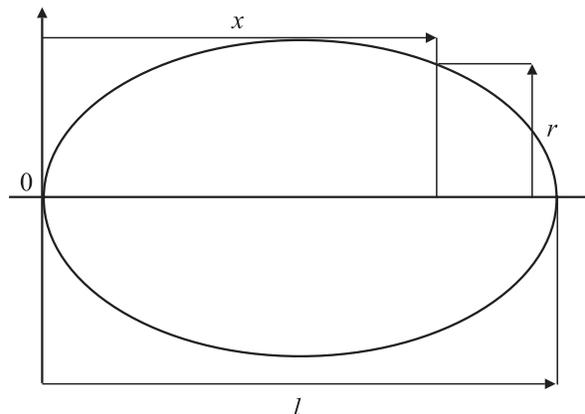
на оси, могут быть однозначно определены из решения уравнения

$$\frac{1}{2} \mu_0 \int_0^l \frac{r^2(x)}{[r^2(x) + (s-x)^2]^{1.5}} j_0(x) dx = -H(s), \quad 0 < s < l, \quad j_0(x) \neq 0, \quad (2)$$

где  $H(s)$  — внешнее осевое магнитное поле,  $j_0(x)$  — линейная плотность тока, связанная с искомой поверхностной плотностью тока  $j(x)$  следующей формулой:

$$j(x) = j_0(x) \left( \frac{\partial l}{\partial x} \right)^{-1}, \quad (3)$$

где  $\partial l$  — элемент длины контура осесимметричного сечения тела.



### Аналитическое определение поверхностных токов

Для сверхпроводящего эллипсоида вращения, который помещается в однородное постоянное магнитное поле, направленное по оси эллипсоида, уравнение (2) имеет аналитическое решение. Для удобства записи примем постоянную величину магнитного поля равной  $-\frac{1}{2}\mu_0$ , а длину оси эллипсоида равной единице. Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$\gamma^2 \int_0^1 \frac{x(1-x)}{[(x-s)^2 + \gamma^2 x(1-x)]^{1.5}} j_0(x) dx = 1, \quad (4)$$

где максимальный диаметр сечения, перпендикулярного оси, равен  $\gamma$ , но

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)}{[(x-s)^2 + \gamma^2 x(1-x)]^{1.5}} dx = \begin{cases} \frac{2}{(\gamma^2-1)} \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}} \arccos \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \right) & \text{при } \gamma \geq 1, \\ \frac{2}{(1-\gamma^2)} \left[ \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \ln \left( \frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1} \right) \right] & \text{при } \gamma \leq 1, \end{cases} \quad (5)$$

что можно проверить непосредственным интегрированием. Поэтому, согласно (3), искомые значения поверхностной плотности тока для эллипсоида вращения, помещенного в однородное поле, будут:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{2 \left[ \frac{\gamma^2-1}{\sqrt{\gamma^2-1}} \arccos \frac{1}{\gamma} - 1 \right] \sqrt{\frac{x(1-x)}{x(1-x)+\gamma^2(x-0.5)^2}}}{2 \left[ \frac{\gamma^2-1}{\sqrt{\gamma^2-1}} \arccos \frac{1}{\gamma} - 1 \right]} & \text{при } \gamma \geq 1, \\ \frac{1-\gamma^2}{2 \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{\sqrt{1-\gamma^2}} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} \right) \right]} \sqrt{\frac{x(1-x)}{x(1-x)+\gamma^2(x-0.5)^2}} & \text{при } \gamma \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Для сверхпроводящего шара аналитическое решение находится в случае, когда внешнее магнитное поле меняется на оси как полином степени  $n$ . Уравнение (2) принимает следующий вид:

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)}{[(x-s)^2 + x(1-x)]^{1.5}} j_0(x) dx = H(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i. \quad (7)$$

Непосредственным интегрированием можно проверить, что токи  $j_0(x)$  — также полиномы степени  $n$

$$j_0(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i, \quad (8)$$

коэффициенты которых  $c_i$  связаны с коэффициентами  $b_i$  уравнением

$$FC = B, \quad (9)$$

где  $C = (c_0, \dots, c_n)^T$ ,  $B = (b_0, \dots, b_n)^T$ ,  $F = \{F_{ik}\}$ ,  $i, k = 0, \dots, n$ , а элементы матрицы  $F$  определяются

Таблица 1.

$i$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
0	0.75	0	0	0	0	0
1	-0.25	1.25	0	0	0	0
2	0	-15/16	35/16	0	0	0
3	0	3/16	-42/16	63/16	0	0
4	0	0	35/32	-210/32	231/32	0
5	0	0	-5/32	135/32	-495/32	429/32

следующим образом:

$$F_{ik} = \frac{1}{k!} \int_0^1 \left[ \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left( \frac{1}{[(x-s)^2 - x(1-x)]^{1.5}} \right) \right]_{s=0} x^{i+1} (1-x) dx. \quad (10)$$

В табл. 1 в явном виде приводятся значения вектора  $C$ , когда  $H(s) = s^i$  для  $i$ , принимающего целые значения от 0 до 5, получаемого путем решения уравнения (9). В случае, когда  $H(s)$  является полиномом 5-й степени,  $j_0(x)$  равно суперпозиции токов, полученных из табл. 1, умноженных на коэффициенты при соответствующей степени этого полинома.

### Численный метод расчета плотности тока, численные эксперименты и обсуждение результатов расчета

Целью данного параграфа является приближенное нахождение плотности тока для произвольного осесимметричного тела, помещенного в произвольное внешнее соосное магнитное поле, путем численного решения уравнения (2). Это уравнение является уравнением Фредгольма 1-го рода, и для его решения существует большое количество методов (см., например, [2]). В данной работе для решения уравнения Фредгольма предложена комбинация двух методов: проекционного и метода итеративной регуляризации. Идея данного подхода состоит в том, чтобы получить достаточно хорошее приближение на редкой сетке проекционным методом, которое затем уточняется методом итеративной регуляризации на густой сетке.

Рассмотрим подробней первую часть предложенного метода. В качестве проектора искомой функции выберем кубические  $B$ -сплайны [3]. Для заданной сетки по переменной интегрирования  $x$  с общим числом точек  $n_0$  определим сетку по переменной правой части  $s$  с таким же количеством точек. Поскольку сплайн кубический, доопределим исходную сетку по  $x$  двумя дополнительными узлами по обе стороны отрезка интегрирования. Тогда, подставив в интегральное уравнение вместо искомой функции ее представление в виде сплайна, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов сплайна с квадратной матрицей. Перед решением полученной системы линейных уравнений

Таблица 2.

$\gamma^2$	0.1 ( $n_0 = 22$ )	1 ( $n_0 = 16$ )	2 ( $n_0 = 12$ )	10 ( $n_0 = 8$ )
$j_0(0)$	0.556711	0.75	0.875969	1.422481
$\varepsilon, n = 100$	0.12418 $e^{-6}$	0.25359 $e^{-3}$	0.35630 $e^{-3}$	0.63906 $e^{-3}$
$s, n = 100$	0.21393 $e^{-6}$	0.31597 $e^{-3}$	0.51768 $e^{-3}$	0.84994 $e^{-3}$
$\varepsilon, n = 500$	0.10180 $e^{-8}$	0.11331 $e^{-5}$	0.41243 $e^{-5}$	0.77881 $e^{-4}$
$s, n = 500$	0.40540 $e^{-8}$	0.14006 $e^{-5}$	0.53530 $e^{-5}$	0.12534 $e^{-3}$
$\varepsilon, n = 1000$	0.10309 $e^{-8}$	0.37803 $e^{-7}$	0.32512 $e^{-6}$	0.85612 $e^{-4}$
$s, n = 1000$	0.41242 $e^{-8}$	0.49337 $e^{-7}$	0.41050 $e^{-6}$	0.15137 $e^{-3}$

Таблица 3.

$j_0(x)$	$x^2 + 1$	$x^4$	$\exp(x)$	$1 + \sin(2\pi x)$	$1 + \sin(4\pi x)$
$\varepsilon_0, n = 100$	0.902886 $e^{-3}$	0.330140 $e^{-3}$	0.112158 $e^{-2}$	0.609466 $e^{-3}$	0.525538 $e^{-2}$
$s_0, n = 100$	0.168520 $e^{-2}$	0.758569 $e^{-3}$	0.216789 $e^{-2}$	0.107456 $e^{-2}$	0.668694 $e^{-2}$
$\varepsilon_0, n = 500$	0.409174 $e^{-5}$	0.232333 $e^{-5}$	0.508992 $e^{-5}$	0.911245 $e^{-4}$	0.213449 $e^{-2}$
$s_0, n = 500$	0.746125 $e^{-5}$	0.381405 $e^{-5}$	0.963108 $e^{-5}$	0.127376 $e^{-3}$	0.289765 $e^{-2}$
$\varepsilon_0, n = 1000$	0.175347 $e^{-6}$	0.139527 $e^{-5}$	0.733598 $e^{-6}$	0.901907 $e^{-4}$	0.213620 $e^{-2}$
$s_0, n = 1000$	0.292240 $e^{-6}$	0.187477 $e^{-5}$	0.104719 $e^{-5}$	0.122233 $e^{-3}$	0.289914 $e^{-2}$

необходимо найти собственные числа интерполяционной матрицы. Уже при сравнительно малом порядке эта матрица может быть близка к вырожденной. Таким образом, максимальное возможное значение порядка матрицы  $n_0$  выбирается из условия, что ее минимальное собственное число по модулю будет превосходить некоторое заранее выбранное достаточно малое положительное число  $\varepsilon$ . По найденным значениям коэффициентов сплайна проводится восстановление значений искомой функции в  $n_0$  узлах интерполяции. Число  $n_0$  зависит от спектральных свойств интерполяционной матрицы, и оно, как правило, невелико. Таким образом, возникает необходимость нахождения численного решения на более густой сетке. Так как коэффициенты  $B$ -сплайна уже найдены, то вполне естественно получить приближенные значения искомой функции во внутренних точках между узлами интерполяции исходя из ее приближенного представления в виде  $B$ -сплайна. Эти приближенные значения и выбираются как начальное приближение для последующего итерационного метода.

Необходимо отметить, что желательно аппроксимировать интегралы квадратурами в итерационном методе с возможно большей точностью. В противном случае сходимость погрешности метода к нулю при увеличении числа итераций может гарантировать нахождение надлежащего численного решения только для выбранной квадратуры, но не для исходного интеграла. Это обстоятельство обуславливает выбор как достаточно большого числа дополнительных узлов между узлами исходной интерполяции, так и достаточно точных квадратурных формул.

Для численного решения уравнения (2) в качестве метода итеративной регуляризации был выбран метод Фридмана [2], который был модифицирован путем

замены квадратурной формулы трапеций на формулу Симпсона. Для апробации предложенного метода были численно решены задача (4) с различными значениями максимального диаметра сечения эллипсоида  $\gamma$  и (7) с различными значениями правой части  $H(s)$ .

Рассмотрим сначала (4). Для характеристики используемого численного метода бралось среднее и среднеквадратичное отклонения от точных значений для выбранного параметра  $\gamma$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |j(x_i) - \tilde{j}(x_i)|,$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{j}(x_i) - j(x_i))^2},$$

где  $j(x_i)$  — точное значение для плотности тока, вычисленное по формуле (6);  $\tilde{j}(x_i)$  — приближенные значения для плотности тока, полученные с использованием численного алгоритма для  $n$  точек  $x_i$  на оси эллипсоида,  $x_i = \frac{1}{n-1}(i-1)$ .

В табл. 2 приведено среднее отклонение  $\varepsilon$  и среднеквадратичное отклонение  $s$  для различных значений параметра  $\gamma$  и различного количества значений точек  $n$  на оси эллипсоида.

Для каждого значения параметра  $\gamma$  указано максимально допустимое значение начальных узлов интерполяции  $n_0$  при условии, что минимальное собственное число интерполяционной матрицы по модулю больше, чем  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-8}$ . Результаты, приведенные в табл. 2, позволяют сделать заключение о том, что приближенные значения плотности тока, полученные

с применением данного численного метода, хорошо аппроксимируют точные значения поверхностной плотности тока, особенно для эллипсоида вытянутой формы и формы, близкой к шару. Ухудшение результатов численных расчетов для сильно сплющенного эллипсоида при  $\gamma^2 = 10$ , вероятно, связано с увеличением неоднородности распределения поверхностной плотности тока с увеличением  $\gamma$ . Например, экран, имеющий вид эллипсоида вращения с осью, направленной вдоль однородного магнитного поля, имеет в пределе нулевую поверхностную плотность тока в вершинах эллипсоида, а отношение поверхностной плотности тока на максимальном удалении от оси к поверхностной плотности тока на участках, которые удалены от оси на расстояние в два раза меньше, равно  $\sqrt{1 + \gamma^2}$ . Поэтому при  $\gamma^2 = 10$  плотность тока на максимальном удалении от оси более чем в 10 раз превышает плотность тока на расстоянии, в 2 раза меньшем. При численном решении для сплющенного эллипсоида с  $\gamma^2 = 10$  интерполяционная матрица обладала наихудшими спектральными свойствами ( $n_0 = 8$ ), что означало восстановление начальных значений для итерационного метода на всем отрезке интегрирования только по 6 посчитанным значениям функции.

Рассмотрим теперь численное решение задачи (7) с различными значениями правой части  $H(s)$ . В табл. 3 приведено среднее отклонение  $\varepsilon_0$  и среднеквадратичное отклонение  $s_0$ , вычисленные по формулам:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |j_0(x_i) - \tilde{j}_0(x_i)|,$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{j}_0(x_i) - j_0(x_i))^2},$$

где  $j_0(x_i)$  — известные значения искомой функции в точках сетки  $x_i$ , подлежащие восстановлению;  $\tilde{j}_0(x_i)$  — приближенные значения для плотности тока, полученные численным решением уравнения (7). Коэффициенты полинома  $H(s)$  определялись из уравнения (9).

Поскольку шар является частным случаем эллипсоида с параметром  $\gamma = 1$  и количество узлов начальной интерполяции зависит только от ядра интегрального уравнения и не зависит от правой части, то в данном случае  $n_0 = 16$ . Данные расчетов свидетельствуют о хорошем восстановлении искомой функции, являющейся монотонной или обладающей небольшим числом экстремумов на интервале интегрирования, особенно с ростом числа узлов сетки для итерационного метода. Более скромный результат для двух последних функций, вероятно, связан с погрешностями приближения искомых функций кубическими сплайнами. Кроме того, точное значение правой части для последних функций было неизвестно и находилось из квадратуры Симпсона с большим числом узлов.

## Список литературы

- [1] Erdelyi A. Singularities of Generalized Axially Symmetric Potentials // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1956. Vol. IX. P. 403–414.
- [2] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, решения, алгоритмы. Киев: Наукова думка, 1986.
- [3] Шикин Е.В., Плис А.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. М.: Диалог-МИФИ, 1996.