

01;03

# Гидродинамическое взаимодействие двух испаряющихся капель одинакового радиуса с учетом квадратичных поправок по числу Кнудсена

© С.И. Гращенков

Псковский государственный педагогический университет им. С.М. Кирова,  
180760 Псков, Россия  
e-mail: grasi@mail.ru

(Поступило в редакцию 14 марта 2006 г. В окончательной редакции 8 сентября 2006 г.)

На основе модифицированного автором приближенного гидродинамического метода отражений и его обобщения на тепловые и диффузионные поля проведена оценка влияния квадратичных по числу Кнудсена поправок на движение двух взаимодействующих капель одинакового размера одной и той же жидкости, вызванное их испарением. Показано, что характер зависимости скорости термофоретического движения капель от расстояния между ними практически не зависит от физико-химических характеристик жидкости, за исключением теплоты испарения. Выяснены условия, при которых поправки по числу Кнудсена оказывают заметное влияние на характер этой зависимости.

PACS: 67.55.Fa

## Введение

Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в неограниченной среде играет важную роль во многих процессах. При малом размере движущихся в вязкой среде частиц во многих случаях число Рейнольдса настолько мало, что его можно считать равным нулю. Кроме того, при достаточно малых концентрациях частиц и их хаотическом распределении наиболее вероятны сближения пар частиц. Поэтому изучению гидродинамического взаимодействия двух сферических частиц при малых числах Рейнольдса посвящено большое количество работ (см., например, обзор [1]).

Наиболее подробно рассмотрено движение сферических частиц вдоль оси, проходящей через их центры. В этом случае исследовано гидродинамическое взаимодействие двух капель, обусловленное их испарением, с учетом линейных поправок по числу Кнудсена (отношению средней длины свободного пробега молекул газа к радиусу аэрозольной частицы) [2]. Однако при таких предположениях можно проводить анализ движения капель радиусом  $10\lambda$  и выше, где  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега молекул газа. Для более мелких капель требуется учет квадратичных поправок по числу Кнудсена, поэтому в настоящей работе рассматривается движение испаряющихся или конденсирующихся капель с учетом влияния таких поправок.

## Теоретический анализ

Прежде чем исследовать движение капель, необходимо найти распределения температуры и концентрации в окрестности капель. Будем считать, что процесс испарения капель квазистационарен и происходит при малых относительных перепадах температуры, а времена

тепловой и диффузионной релаксации много меньше времени испарения капель. Будем также считать, что концентрация  $C_1$  молекул испаряющегося вещества подчиняется условию  $C_1 \ll 1$  ( $C_1 = n_1/n_\infty$ ,  $n_\infty = n_1 + n_2$ , где  $n_1, n_2$  — соответственно концентрация молекул паров испаряющегося вещества и молекул второго компонента газовой смеси, не поглощаемого поверхностью капель). При  $C_1 \ll 1$  основное влияние на процесс переноса молекул оказывает молекулярная диффузия. В связи с этим считается, что испарение капель в случае  $C_1 \ll 1$  протекает в диффузионном режиме [3]. Коэффициенты теплопроводности и диффузии будем считать постоянными.

Рассмотрим сначала одну каплю. В этом случае математическая модель задачи для установления распределения температур среды и капель, а также концентрации молекул паров испаряющегося вещества в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , начало которой совпадает с центром капли, имеет вид [4,5]:

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta T_i = 0, \quad \Delta C_1 = 0, \quad (1)$$

$$r = R : \quad T_e - T_i = K_T^T \frac{\partial T_e}{\partial r} + K_T^n T_{e\infty} \frac{\partial C_1}{\partial r}, \quad (2)$$

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial r} - k_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = k_L \frac{\partial C_1}{\partial r}, \quad (3)$$

$$C_{ie} = K_s C_{1s}(T_{is}^0) + K_n^n \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} + \frac{K_n^T}{T_{e\infty}} \frac{\partial T_e}{\partial r}, \quad (4)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad C_{1e} = C_\infty, \quad T_e = T_{e\infty}, \quad (5)$$

$$K_s = \left( 1 - \frac{2m_1 n_\infty \sigma}{\rho_i R p} \right), \quad K_L = L m_1 n_\infty D_{12}.$$

Выражение  $K_s$  учитывает зависимость концентрации насыщенного пара от кривизны поверхности капли;  $C_{1s}$  — концентрация насыщенных паров испаряющегося

с поверхности капле вещества;  $m_1$  — масса молекулы испаряющегося вещества;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, составляющей каплю;  $\rho_i$  — плотность этой жидкости;  $R$  — радиус капли;  $p$  — давление;  $T_e$  — распределение температур в окрестности капле;  $T_i$  — распределение температур внутри капле;  $T_{is}^0$  — средняя температура поверхностей капле;  $K_T^T$ ,  $K_T^n$ ,  $K_n^n$ ,  $K_n^T$  — коэффициенты скачков температуры и концентрации паров на поверхности капле;  $k_e$  — коэффициент теплопроводности газовой смеси;  $k_i$  — коэффициент теплопроводности вещества частиц;  $L$  — теплота фазового перехода;  $D_{12}$  — коэффициент взаимной диффузии газовой смеси. При записи граничных условий было учтено, что распределение температур и концентраций в окрестности одиночной капле сферически симметрично.

Решение системы уравнений (1)–(5) ввиду сферической симметрии задачи можно искать в виде [6,7]

$$T_e = T_{e\infty} + \frac{A_0^T}{r}, \quad T_i = T_{e\infty} + B_0^T, \quad C_1 = C_\infty + \frac{C_0^T}{r}, \quad (6)$$

где  $A_0^T$ ,  $B_0^T$  и  $C_0^T$  — неизвестные коэффициенты.

Подставив (6) в (2)–(5) и решив полученную систему уравнений, получим:

$$B_0^T = T_{is}^0 - T_{e\infty}, \quad A_0^T = \frac{K_L}{k_e} C_0^T, \\ C_0^T = R \frac{K_s C_{1s}(T_{is}^0) - C_\infty}{\frac{K_n^n}{R} - \frac{K_L}{k_e} \frac{K_n^T}{T} \frac{1}{T_{e\infty}} + 1}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь термосферическое движение двух близко расположенных частиц, вызванное их испарением или конденсацией. Расчет проведем на основе метода отражений, аналогично тому, как это было сделано в [8]. Подробное изложение метода отражений с различными модификациями можно найти в работе [9].

Будем сначала считать одну из частиц неподвижной (для определенности — первую). Испарение этой частицы вызывает появление градиентов температуры и концентрации в окрестности второй частицы. Эти градиенты вызывают соответственно термофоретическое и диффузиофоретическое движение второй капле.

Пусть при известном пространственно неоднородном распределении концентраций и температур установившаяся (т.е. определяемая из условия равенства нулю равнодействующей всех сил, действующих на частицу) скорость одиночной капле, обусловленная заданными на большом расстоянии от частицы скоростью  $U_\infty$  окружающего газа, градиентом  $(\nabla T_e)_\infty$  температуры и градиентом  $(\nabla C_1)_\infty$  концентрации, определяется выражением

$$U_0 = (\nabla T_e)_\infty U_{T0} + (\nabla C_1)_\infty U_{D0} + U_\infty, \quad (8)$$

где  $U_{T0}$  и  $U_{D0}$  — постоянные величины.

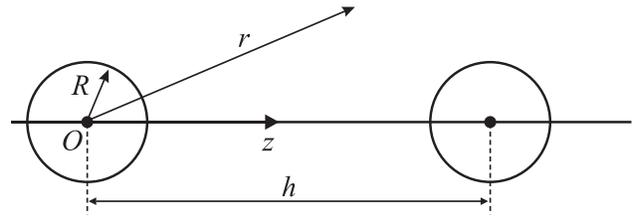


Рис. 1.

В первом приближении скорость второй частицы дается выражением

$$U_0 = (\nabla T_e)_0 U_{T0} + (\nabla C_1)_0 U_{D0} + u_v. \quad (9)$$

Здесь  $(\nabla T_e)_0$  — градиент температуры на расстоянии  $h$  от центра первой частицы, обусловленный ее испарением, где  $h$  — расстояние между центрами частиц (рис. 1);  $(\nabla C_1)_0$  — градиент на расстоянии  $h$  от центра первой капле. Эти градиенты легко вычисляются исходя из выражений (6), (7). Последнее слагаемое в (9), соответствующее слагаемому  $U_\infty$  уравнения (8), учитывает стефановский поток газа в окрестности второй частицы, создаваемый первой частицей в результате ее испарения. При этом  $u_v$  представляет собой скорость этого потока на расстоянии  $h$  от центра первой капле:

$$u_v = \alpha_v \left. \frac{\partial C_1}{\partial r} \right|_{r=h} = -\alpha_v \frac{C_0^T}{h^2},$$

где  $\alpha_v = \frac{m_1 n_\infty D_{12}}{\rho}$ ,  $\rho$  — плотность газовой среды. Выражения для  $U_{T0}$  и  $U_{D0}$  будем считать известными, так как решение задачи о термофорезе и диффузиофорезе одиночной капле чистой жидкости опубликовано в [4,10] (точные аналитические выражения для  $U_{T0}$  и  $U_{D0}$  для настоящего рассмотрения несущественны, главное, что они постоянны).

В следующем приближении учтем одновременное движение обеих частиц. Движущаяся со скоростью  $U$  частица на расстоянии  $h$  генерирует поток газа со скоростью  $U(R/h)^3$  [9]. Поэтому если первая частица движется со скоростью, модуль которой равен  $U$ , удаляясь от второй частицы, то скорость установившегося движения второй частицы будет даваться выражением  $U_0 = -U(R/h)^3$ . Но, с другой стороны, так как в рассматриваемом случае скорости частиц по модулю равны, то эта скорость будет также равна  $U$ , т.е.

$$U = U_0 - U \left( \frac{R}{h} \right)^3,$$

следовательно,

$$U = \frac{U_0}{1 + (R/h)^3}. \quad (10)$$

В Приложении обоснование результата приведено в рамках традиционного метода отражений. Использо-

ванная при выводе результата относительно легкая и простая процедура является авторской модификацией метода, изложенного в [8].

В итоге из (6), (7), (9)–(10) получаем

$$U = \frac{K_s C_{1s}(T_{is}^0) - C_\infty}{R \left(1 + \frac{K_n^n}{R} - \frac{K_L^T}{R} \frac{K_L}{k_e} \frac{1}{T_{e\infty}}\right)} k_u F(x), \quad (11)$$

где

$$k_u = \left( \frac{K_L}{k_e} U_{T0} - U_{D0} + \alpha_v \right), \quad (12)$$

$$F(x) = \frac{x^2}{1+x^3}, \quad (13)$$

$$x = \frac{h}{R}.$$

Поскольку  $U$  фактически представляет собой проекцию скорости второй частицы на ось, направленную от центра первой частицы к центру второй, то положительное значение скорости означает, что капли удаляются друг от друга, отрицательное — что сближаются. Развернутое выражение для  $k_u$  приведено в Приложении.

Для расчета скорости капель по полученным формулам необходимо знать среднюю температуру  $T_{is}^0$  поверхности капель, которая входит в выражения (7). Эта температура находится из условия равенства скорости поглощения количества теплоты, идущей на фазовый переход на поверхности капли, величине теплового потока, подводимого к поверхности частицы из газовой среды в результате теплопроводности. В свою очередь, скорость поглощения тепла, идущего на фазовый переход, определяется диффузионным потоком молекул вещества, испаряющегося с поверхности капель. Таким образом, значение средней температуры капель зависит от значений тепловых и диффузионных потоков. Проведем учет взаимного влияния капель на эти потоки методом, подобным методу отражений, рассмотренному выше при учете влияния гидродинамического взаимодействия капель на скорость их движения.

Пусть  $J_c$  — диффузионный поток молекул, отводимый от поверхности одиночной испаряющейся капли. Исходя из закона Фика и уравнений (6), (7) нетрудно получить, что

$$J_c^0 = 4\pi D_{12} n_\infty C_T^0 = 4\pi D_{12} n_\infty k_c (K_s C_{1s}(T_{is}^0) - C_\infty), \quad (14)$$

где

$$k_c = \frac{R}{\frac{K_n^n}{R} - \frac{K_L^T}{k_e} \frac{K_L}{R} \frac{1}{T_{e\infty}} + 1}. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь две капли. Как следует из (6), испарение первой частицы увеличивает среднюю концентрацию молекул испаряющегося вещества в области второй частицы на величину  $C_0^T/h$ , что, в свою очередь, приводит к уменьшению потока молекул вещества, испаряющегося с поверхности второй частицы. В первом приближении это уменьшение можно учесть заменой в (14)  $C_\infty$  на  $C_\infty + C_0^T/h$ . Таким образом, поток  $J_c$

молекул испаряющегося вещества с поверхности второй частицы с учетом влияния первой

$$\begin{aligned} J_c &= 4\pi D_{12} n_\infty k_c (K_s C_{1s}(T_{is}^0) - C_\infty) - 4\pi D_{12} n_\infty k_c \frac{C_0^T}{h} \\ &= J_c^0 - 4\pi D_{12} n_\infty k_c \frac{C_0^T}{h}. \end{aligned} \quad (16)$$

В следующем приближении учтем, что вследствие симметрии задачи поток молекул с поверхности первой частицы также равен  $J_c$ . Поэтому при расчете  $C_0^T$  для подстановки в (16) мы должны исходить не из уравнения (14), а из условия

$$J_c = 4\pi D_{12} n_\infty C_T^0.$$

Следовательно,

$$J_c = J_c^0 - \frac{k_c}{h} J_c. \quad (17)$$

Исходя из (17), (14) получим

$$J_c = \frac{4\pi D_{12} n_\infty R}{\frac{K_n^n}{R} - \frac{K_L^T}{k_e} \frac{K_L}{R} \frac{1}{T_{e\infty}} + 1 + \frac{R}{h}} (K_s C_{1s}(T_{is}^0) - C_\infty). \quad (18)$$

Вывод для потока тепла, подводимого к частице из окружающей газовой среды, проводится аналогичным образом исходя из закона Фурье и уравнений (2), (3), (6), (7). В результате получается следующее выражение для теплового потока  $J_T$ :

$$J_T = \frac{4\pi k_e R}{\frac{K_n^n}{R} - \frac{k_e}{K_L} \frac{K_n^n}{R} T_{e\infty} + 1 + \frac{R}{h}} (T_{is}^0 - T_{e\infty}). \quad (19)$$

Условие равенства теплового потока, подводимого к поверхности частицы из газовой среды в результате теплопроводности, скорости поглощения количества теплоты, идущей на фазовый переход на поверхности капли, приводит к выражению

$$J_T = Lm_1 J_c. \quad (20)$$

В итоге из уравнений (18)–(20) получаем следующее трансцендентное уравнение для вычисления  $T_{is}^0$ :

$$T_{e\infty} - T_{is}^0 = \frac{\frac{R}{h} + \frac{K_n^n}{R} - \frac{k_e}{K_L} \frac{K_n^n}{R} T_{e\infty} + 1}{\frac{R}{h} + \frac{K_n^n}{R} - \frac{K_L^T}{k_e} \frac{K_L}{R} \frac{1}{T_{e\infty}} + 1} \frac{K_L}{k_e} (K_s C_{1s}(T_{is}^0) - C_\infty). \quad (21)$$

При решении этого уравнения значение  $C_{1s}$  можно вычислять по формуле (11)

$$C_{1s}(T) = A \exp(-B/T).$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  в заданном интервале температур  $[T_0, T_1]$  могут быть вычислены по табличным экспериментальным данным при помощи следующих соотношений:

$$B = \ln \frac{C_{1s}(T_1)}{C_{1s}(T_0)} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right)^{-1}, \quad A = \frac{C_{1s}(T - 0)}{\exp(-B/T_0)}.$$

## Обсуждение результатов

Так как используемая модель является приближенной, то необходимо хотя бы грубо оценить точность описания движения частиц на основе используемого подхода. Для этой оценки воспользуемся формулами, полученными в [2] на основе точного решения в бисферической системе координат, для задачи, аналогичной рассматриваемой в данной статье. В этой работе учитывались только линейные поправки по числу Кнудсена (в частности, коэффициенты  $K_T^n$  и  $K_n^T$  полагались равными нулю), и потому ситуация, рассмотренная в [2], является частным случаем ситуации, рассмотренной в данной работе. Для сравнения были проведены расчеты скорости капель без учета квадратичных поправок по числу Кнудсена для капель воды радиусом  $1 \mu\text{m}$ , испаряющихся в воздухе при температуре  $20^\circ\text{C}$ , давлении  $10^5 \text{Pa}$  и различных значениях влажности. Результаты расчетов представлены на рис. 2. Сплошными линиями показаны зависимости скорости от расстояния между центрами частиц, рассчитанные по формулам данной статьи; пунктир — по формулам работы [2]. Из рис. 2 видно, что точность используемой в данной статье математической процедуры весьма высока при  $R \ll h$  и вполне позволяет получить решение, пригодное для оценки скоростей движения частиц при  $h \sim R$ .

В выражение (21) не входит теплопроводность вещества капли, а также вязкость веществ капель и окружающего их газа. А в выражение (11) эти параметры входят только в не зависящий от расстояния между частицами коэффициент  $k_u$ . Таким образом, хотя эти величины и влияют на абсолютное значение скорости, они не влияют на характер зависимости скорости от расстояния между частицами. Кроме того, в выражении (21) плотность вещества капель и коэффициент поверхностного натяжения входят только в коэффициент  $K_s$  для учета зависимости концентрации насыщенного пара от кривизны поверхности капли. Как видно из (21), этот коэффициент не оказывает существенного влияния на зависимость температуры капель от расстояния между ними, хотя и влияет на зависимость значения температуры капли от влажности воздуха. Таким образом, величины, характеризующие вещество капель, за исключением теплоты фазового перехода, практически не оказывают существенного влияния на характер зависимости скоростей частиц от расстояния между ними. Кроме того, как видно из выражений (12), (21), хотя скачки температуры и концентрации и влияют на абсолютное значение скорости капель, существенное влияние на характер зависимости скорости капель от расстояния между ними они могут оказывать только в том случае, если значение выражения  $\frac{K_T^T}{R} - \frac{k_e}{K_L} \frac{K_n^T}{R} T_{e\infty} + 1$  или  $\frac{K_n^n}{R} - \frac{K_L}{k_e} \frac{K_n^T}{R} \frac{1}{T_{e\infty}} + 1$  по модулю меньше или сравнимо с минимальным значением  $\frac{R}{h}$ , т. е. с  $\frac{1}{2}$ .

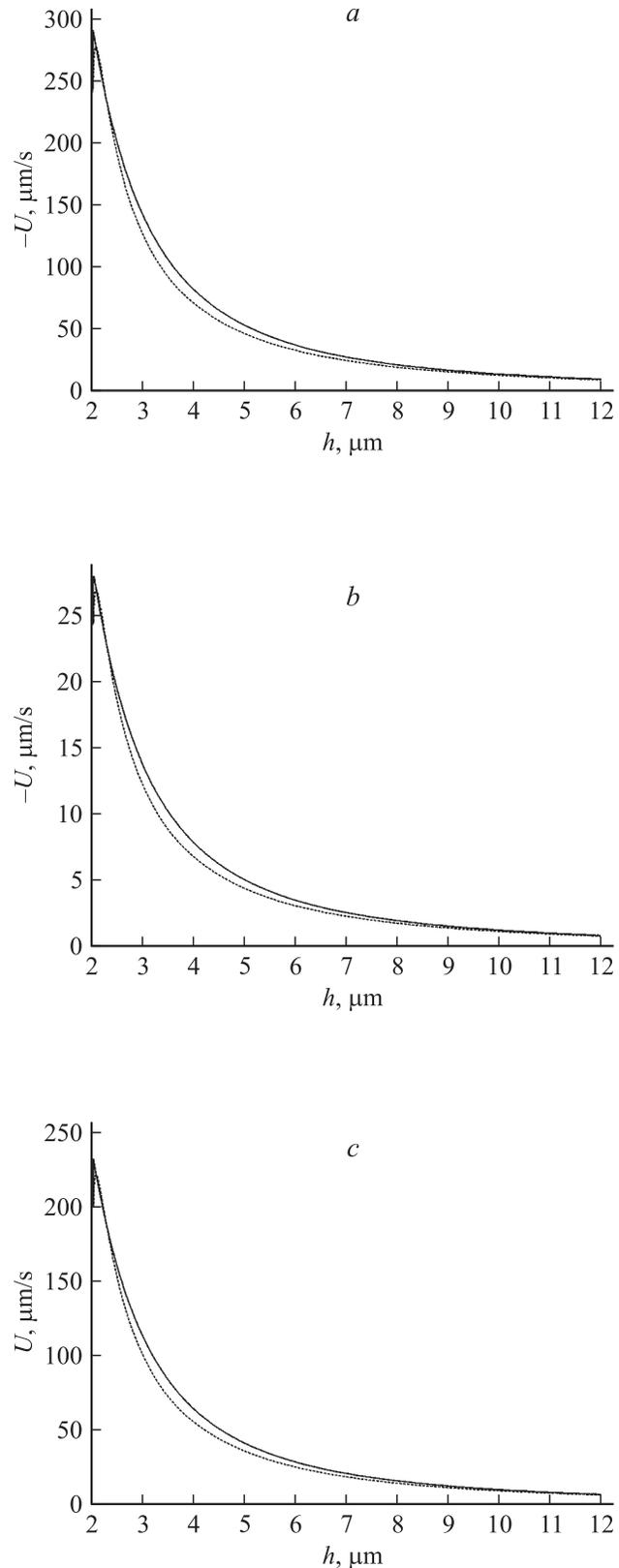


Рис. 2. Скорости капель при влажности воздуха 99 (a), 100 (b), 101% (c).

## Приложение

1. Выражение для  $k_u$ , полученное из формул, приведенных в [10], с учетом условия  $C_1 \ll 1$ :

$$\begin{aligned}
 k_u = & \alpha_v \frac{2}{3 \left( 1 + 2 \frac{C_m}{R} + \frac{2}{3} \frac{\mu_e}{\mu_i} \right)} \\
 & \times \left\{ \frac{R}{3\mu_i} \frac{\partial \sigma}{\partial T} T_{e\infty} \left[ b_{10}b_5 + b_4 - b_{14}b_{10} - \frac{K_T^n}{R} (1 + 2b_9) \right] \right. \\
 & + \frac{\mu_e}{\mu_i} v_e \left[ 3b_{14} - 9b_5 - c_p \left( b_1 - 2b_5 + \frac{2}{3} b_{14} \right) \right] \\
 & + K_{Tsl} v_e \left[ (b_1 + b_5 - b_{14}) \left( 1 + \frac{\beta'_R}{R} + \frac{\beta_B}{R} \right) \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\beta_R}{R} - \frac{\beta_B}{R} \right) (b_1 - 2b_5 + 2b_{14}) \right] \\
 & + K_{Dsl} D_{12} \left[ (b_4 + b_5b_7) \left( 1 + \frac{\beta''_R}{R} - 2 \frac{\beta^c_R}{R} + 3 \frac{\beta^R_{sl}}{R} \right) \right. \\
 & - \left. \left( \left( 1 + \frac{\beta''_R}{R} + \frac{\beta_{sl}}{R} \right) (1 + b_{14}b_7 - b_9) \right) \right. \\
 & + \left. \left. \left( \frac{\beta^c_R}{R} - \frac{\beta^R_{sl}}{R} \right) (1 - 2(b_{14}b_7 - b_9)) \right) \right] \\
 & - \frac{C_v}{R} v_e \left[ (b_1 + b_5 - b_{14}) \left( 1 + 6 \frac{C_m}{R} + 2 \frac{\mu_e}{\mu_i} \right) \right] \\
 & + \alpha_v \left[ \left( b_5b_7 + b_4 + \frac{1}{2} - b_{14}b_7 + b_9 \right) \left( 1 + 6 \frac{C_m}{R} + 2 \frac{\mu_e}{\mu_i} \right) \right. \\
 & \left. + (2b_1 + 1) \left( \frac{n_{10e}}{n_{10i}} + \frac{m_2}{m_1} \frac{n_{20e}}{n_{10i}} \right) \right] \Bigg\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{K_L}{k_e} \frac{1}{T_{e\infty}}, & b_2 &= K_s C_{1s} (T_{is}^0), \\
 b_3 &= K_s \frac{\partial C_{1s}(T)}{\partial T} \Bigg|_{T=T_{is}^0} T_{e\infty}, & b_4 &= b_1 b_8, & b_5 &= b_1 b_{13}, \\
 b_6 &= 1 + 2 \left( \frac{K_n^n}{R} - \frac{K_T^n}{R} \right), \\
 b_7 &= \frac{1}{b_6} \left[ b_2 \left( 1 + 2 \frac{K_T^n}{R} \right) + 2 \frac{K_T^n}{R} \right], \\
 b_8 &= \frac{1}{b_6} \left[ b_2 \left( 1 - 2 \frac{K_T^n}{R} \right) - \frac{K_T^n}{R} \right], \\
 b_9 &= \frac{1}{b_6} \left[ 1 + b_2 \frac{K_T^n}{R} - \frac{K_n^n}{R} \right], \\
 b_{10} &= 1 + 2 \left( \frac{K_T^n}{R} + \frac{K_n^n}{R} b_7 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= 1 - \frac{K_T^n}{R} + 2 \frac{K_n^n}{R} b_8, \\
 b_{12} &= 2 \frac{k_e}{k_i} \left( 1 - \frac{C_q}{R} + b_1 b_7 \right) + b_{10}, \\
 b_{13} &= \frac{1}{b_{12}} \left[ \frac{k_e}{k_i} \left( 1 + 2 \frac{C_q}{R} - 2b_4 \right) - b_{11} \right], \\
 b_{14} &= \frac{1 + 2b_9}{b_{12}} \left[ \frac{k_e}{k_i} b_1 + \frac{K_T^n}{R} \right].
 \end{aligned}$$

Здесь  $C_m$ ,  $K_{Tsl}$ ,  $K_{Dsl}$  — коэффициенты изотермического, теплового и диффузионного скольжений соответственно;  $\mu_i$  — динамическая вязкость вещества капли;  $\mu_e$  — динамическая вязкость газовой смеси;  $v_e$  — кинематическая вязкость газовой смеси;  $n_{10e}$ ,  $n_{20e}$  — численные концентрации первого и второго компонентов газовой смеси в отсутствие возмущающих ее градиентов температуры и концентраций;  $n_{10i}$  — численная концентрация молекул вещества капли;  $m_2$  — масса молекулы второго компонента газовой смеси;  $c_p$ ,  $\beta'_R$ ,  $\beta''_R$ ,  $\beta^c_R$ ,  $\beta_R$ ,  $\beta_B$ ,  $\beta_{sl}$ ,  $\beta^R_{sl}$ ,  $C_v$ ,  $C_q$  — газокинетические коэффициенты, связанные с учетом различных эффектов в слое Кнудсена. Указанные коэффициенты скольжений и газокинетические коэффициенты находятся методами кинетической теории газов, их вычислению посвящено значительное число работ, см. например [12–15].

2. Проведем вывод выражения (10) на основе подхода, изложенного в [8].

Пусть в первом приближении обе капли движутся в противоположных направлениях со скоростями, значения которых определяются испарением капель без учета их гидродинамического взаимодействия, вызванного их движением, т. е. скорость второй частицы  $U_0$ .

Скорость первой частицы в этом случае равна  $-U_0$ . Движущаяся со скоростью  $-U_0$  первая частица на расстоянии  $h$  генерирует поток газа со скоростью  $-U_0 \left( \frac{R}{h} \right)^3$  [9], что приводит к изменению скорости второй частицы на величину

$$U_2^{(1)} = -U_0 \left( \frac{R}{h} \right)^3.$$

Соответственно движение второй частицы изменяет скорость первой на величину

$$U_1^{(1)} = U_0 \left( \frac{R}{h} \right)^3.$$

Изменение скорости первой частицы на  $U_1^{(1)}$  приводит, в свою очередь, к дополнительному изменению скорости второй частицы на величину

$$U_2^{(2)} = U_1^{(1)} \left( \frac{R}{h} \right)^3 = U_0 \left( \frac{R}{h} \right)^6.$$

Продолжив описанную процедуру и используя алгебраическое равенство

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \dots,$$

в итоге получим

$$\begin{aligned}
 U &= U_0 + U_2^{(1)} + U_2^{(2)} + U_2^{(3)} + U_2^{(4)} + \dots \\
 &= U_0 \left( 1 - \left( \frac{R}{h} \right)^3 + \left( \frac{R}{h} \right)^6 - \left( \frac{R}{h} \right)^9 + \left( \frac{R}{h} \right)^{12} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2 + (R/h)^3} U_0,
 \end{aligned}$$

что совпадает с (10).

## Список литературы

- [1] *Ying R. and Peters M.H.* // *Aerosol Sci. Technol.* 1991. Vol. 14. N 4. P. 418.
- [2] *Гращенко С.И.* // *Коллоидный журн.* 2002. Т. 64. № 3. С. 317–324.
- [3] *Фукс Н.А.* Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
- [4] *Яламов Ю.И., Галоян В.С.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985.
- [5] *Шукин Е.Р., Карева Н.Н., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л.* // *ЖТФ.* 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 21–27.
- [6] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
- [7] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
- [8] *Reed L.D., Morrison F.A.* // *J. Aerosol Sci.* 1975. Vol. 6. P. 349–369.
- [9] *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1986. (*Happel J. and Brenner H.* Low Reynolds Number Hydrodynamics. Leyden: Noordhoff, 1965).
- [10] *Малай Н.В.* Избранные проблемы физической кинетики и гидродинамики дисперсных систем. М., 1987. Деп. 2675–в87.
- [11] *Daniels F. and Alberty R.* *Physical Chemistry.* 2nd ed. New York; Wiley, 1961.
- [12] *Поддоскин А.Б., Яламов Ю.И., Юшканов А.А.* // *Письма в ЖТФ.* 1982. Т. 8. Вып. 23. С. 1438–1441.
- [13] *Поддоскин А.Б., Яламов Ю.И., Юшканов А.А.* // *ЖТФ.* 1982. Т. 52. Вып. 11. С. 2253–2261.
- [14] *Маясов Н.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 4. Вып. 6. С. 498–502.
- [15] *Яламов Ю.И., Юшканов А.А., Савков С.А.* // *ДАН.* 1988. Т. 301. № 5. С. 1111–1114.