

Электрическая проводимость тонкой цилиндрической проволоки в продольном магнитном поле

© Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов

Московский государственный университет леса,
141005 Мытищи, Московская область, Россия
e-mail: yushkanov@mtu-net.ru

(Поступило в Редакцию 30 мая 2006 г. В окончательной редакции 1 ноября 2006 г.)

Вычислена электрическая проводимость металлической цилиндрической проволоки в продольном магнитном поле. Рассмотрен случай, когда радиус проволоки во много раз меньше ее длины. В качестве граничного условия задачи принято условие диффузного отражения электронов от внутренней поверхности проволоки. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

PACS: 72.15.-v

Введение

Электрические свойства проводников, линейный размер которых R сравним с длиной свободного пробега электронов Λ , существенно отличаются от свойств „масивных“ проводников [1].

В фундаментальной работе [2] впервые была рассчитана электрическая проводимость тонкой цилиндрической проволоки (отношение ее радиуса к длине много меньше единицы). Вопросы, касающиеся проводимости тонкой цилиндрической проволоки, помещенной в магнитное поле, обсуждались в работах [3–7]. В упомянутых работах применялся подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов в металле.

В работе [4] для чисто диффузного граничного условия была рассмотрена задача о влиянии продольного магнитного поля на электрическую проводимость металлической цилиндрической проволоки. Автору [4] не удалось получить аналитического выражения для расчета проводимости, численными методами были получены результаты только для отдельных значений параметров задачи.

Заметим, что задачи о проводимости тонких металлических проволок становятся особенно актуальными в связи с бурным развитием микроэлектроники, где такие проволоки широко применяются.

В настоящей работе кинетическим методом рассчитана функция распределения, описывающая линейный отклик электронов в однородной цилиндрической проволоке, помещенной в продольное магнитное поле, на переменное электрическое поле, ориентированное вдоль оси симметрии проволоки. По найденной функции распределения удается рассчитать зависимость интегральной проводимости от величины внешнего магнитного поля, от отношения радиуса проволоки к длине свободного пробега электронов и частоты.

Математическая модель и расчет

Рассматривается прямая цилиндрическая проволока из немагнитного металла радиуса R и длины L (считаем, что $L \gg R$), помещенная в магнитное поле с индукцией \mathbf{B} , к концам которой приложено переменное напряжение частоты ω . При этом направления электрического и магнитного полей совпадают с осью симметрии проволоки. Скин-эффект не учитывается (предполагается, что $R < \delta$ — глубины скин-слоя).

Однородное периодическое по времени электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

действует на электроны проводимости внутри проволоки (они рассматриваются как вырожденный ферми-газ) и вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской f_0 (предполагается, что ферми-поверхность имеет сферическую форму):

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор (начало координат выбирается на оси проволоки), \mathbf{v} — скорость электрона, m — эффективная масса электрона в металле.

Это приводит к возникновению высокочастотного тока

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3(m\mathbf{v})}{h^3} = 2e \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int \mathbf{v} f_1 d^3v, \quad (2)$$

где e — заряд электрона, h — постоянная Планка.

Задача сводится к отысканию отклонения f_1 функции распределения электронов от равновесной f_0 , возникающего под действием высокочастотного поля (1). В линейном приближении по внешнему полю функция f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению [8–10]

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v}\mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + \frac{e}{m} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{f_1}{\tau}, \quad (3)$$

где предполагается стационарная зависимость от времени ($f_1 \sim \exp(-i\omega t)$), а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации электронов τ .

Для однозначного определения функции f_1 необходимо задать для нее граничное условие на цилиндрической поверхности проволоки. В качестве такового принимаем условие диффузного отражения электронов от этой поверхности [2]:

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R \\ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0 \end{cases},$$

где \mathbf{r}_\perp и \mathbf{v}_\perp — соответственно компоненты радиус-вектора электрона \mathbf{r} и его скорости \mathbf{v} в плоскости, перпендикулярной оси симметрии проволоки.

При вычислении интеграла (2) (после решения кинетического уравнения (3)) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат (r_\perp, γ, z ; полярная ось Z ; вектор \mathbf{E}_0 параллелен оси Z), так и в пространстве скоростей (v_\perp, α, v_z ; полярная ось v_z). Ось симметрии проволоки совпадает с осью Z . Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь z -компоненту:

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z; \quad E_z = E_0 \exp(-i\omega t).$$

Соответственно и ток (2) обладает лишь z -компонентой (линии тока являются прямыми, параллельными оси Z):

$$j_z = \frac{3ne^2 E_z}{2\pi m v_f^3} \times \int_0^{v_f} \int_0^{2\pi} v_\perp \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} \frac{(1 - \exp(-vt'))}{v} dv_\perp d\alpha. \quad (4)$$

Здесь n — концентрация электронов проводимости в металле проволоки, v_f — скорость Ферми, $v = (1/\tau) - i\omega$ — комплексная частота рассеяния электронов.

Параметр t' в выражении (4) имеет смысл времени движения электрона вдоль траектории от границы, на которой происходит отражение, до точки \mathbf{r} со скоростью \mathbf{v} .

Определение этого параметра является центральным моментом данной задачи, так как наличие продольного магнитного поля приводит к тому, что часть электронов при отражении от границы проволоки движется до следующего соударения с границей по винтовой линии, а траектория остальных электронов с границей проволоки не пересекается ($t' \rightarrow \infty$)!

Рассмотрим проекцию траектории электрона на плоскость, перпендикулярную оси проволоки. Эта проекция имеет вид дуги окружности. Понятно, что в случае пересечения с границей

$$t' = \delta\varphi/v_\perp,$$

где $\delta = mv_\perp, eV$ — радиус дуги, а φ — соответствующий данной дуге центральный угол.

Для дальнейших вычислений и анализа результатов введем новые переменные

$$\xi = \frac{r_\perp}{R}, \quad \rho = \frac{v_\perp}{v_f}, \quad \mu = \frac{eR}{mv_f} B,$$

$$\begin{aligned} \Delta = v \frac{R}{v_f} &= \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) \frac{R}{v_f} = \frac{R}{\tau v_f} - i \frac{R\omega}{v_f} \\ &= \frac{R}{\Lambda} - i \frac{R\omega}{v_f} = \lambda - i\Omega. \end{aligned}$$

Тогда формулу (4) можно представить как

$$j_z = \frac{3ne^2 R E_z}{2\pi m v_f} \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1 - \rho^2} \frac{1 - \exp(-\Delta\varphi/\mu)}{\Delta} d\rho d\alpha. \quad (5)$$

Для интегрирования выражения (5) угол φ (центральный угол дуги окружности, по которой движется электрон в случае пересечения его траектории с границей проволоки) необходимо связать с углом α в пространстве скоростей (это угол между векторами \mathbf{r}_\perp и \mathbf{v}_\perp).

После проведения вычислений в комплексной плоскости получим, что

$$\varphi = 2 \operatorname{arccctg} \left[\frac{2\rho\xi\mu \cos \alpha - \sqrt{D}}{\mu^2(\xi^2 - 1)} \right],$$

$$D = 4\rho^2(\rho^2 - 2\rho\xi\mu \sin \alpha + \xi^2\mu^2) - [\xi^2\mu^2 + 2\rho^2 - 2\rho\xi\mu \sin \alpha - \mu^2]^2.$$

Траектория электронов пересекается с границей проволоки, когда $D > 0$. При этом время движения электронов по траектории (параметр t') — конечная положительная величина.

Когда $D < 0$, траектория электронов не пересекается с границей проволоки ($t' \rightarrow \infty$). В этом случае при проведении вычислений нужно учесть, что в выражении (5) пропадает член, содержащий экспоненту. Проинтегрировав выражение (5), определим полный ток I через поперечное сечение цилиндрической проволоки

$$I = \frac{3ne^2 R^3 E_z}{m v_f} \int_0^1 \xi d\xi \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1 - \rho^2} \frac{1 - \exp(-\Delta\varphi/\mu)}{\Delta} d\rho d\alpha.$$

Затем, формально воспользовавшись законом Ома в виде $I = GU$ (U — напряжение на концах проволоки), получим формулу для расчета интегральной проводимости

проволоки G (электрическое поле внутри проволоки однородное, поэтому $U = E_z L$):

$$G = \frac{3ne^2R^3}{mv_fL} \int_0^1 \xi d\xi \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1-\rho^2} \frac{1 - \exp(-\Delta\varphi/\mu)}{\Delta} d\rho d\alpha. \quad (6)$$

При отсутствии внешнего магнитного поля ($\mu = 0$) в случае стационарного электрического поля (когда $\Omega = 0, \Delta = \lambda = R/\Lambda$) выражение (6) совпадает с результатом работы [2]:

$$G = \frac{6ne^2R^3}{mv_fL\Delta} \int_0^1 \xi d\xi \int_0^1 \int_0^\pi \rho \sqrt{1-\rho^2} \times \left[1 - \exp\left(-\Delta\left(\xi \cos \alpha + \sqrt{1-\xi^2 \sin^2 \alpha}\right)/\rho\right) \right] d\rho d\alpha.$$

Интегральную проводимость (6) (заметим, что она является комплексной величиной) представим в виде

$$G = G_0 P(\lambda, \Omega, \mu),$$

где

$$G_0 = \frac{3ne^2R^3}{mv_fL},$$

$$P(\lambda, \Omega, \mu) = \int_0^1 \xi d\xi \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1-\rho^2} \frac{1 - \exp(-\Delta\varphi/\mu)}{\Delta} d\rho d\alpha.$$

Численный расчет модуля $M(\lambda, \Omega, \mu)$ и аргумента $A(\lambda, \Omega, \mu)$ (фазы) безразмерной интегральной проводимости $P(\lambda, \Omega, \mu)$ вытянутой цилиндрической проволоки представлен на рис. 1–3.

Обсуждение результатов

На рис. 1 представлены зависимости модуля M безразмерной интегральной проводимости проволоки P от безразмерной индукции внешнего магнитного поля μ в случае стационарного электрического поля ($\Omega = 0$). Значение безразмерной обратной длины свободного пробега электронов λ равно 0.1 (радиус проволоки значительно меньше длины свободного пробега электронов Λ). Представляет интерес анализ вклада в полную проводимость от электронов, сталкивающихся с поверхностью проволоки, и электронов, которые с поверхностью не сталкиваются. В связи с этим на

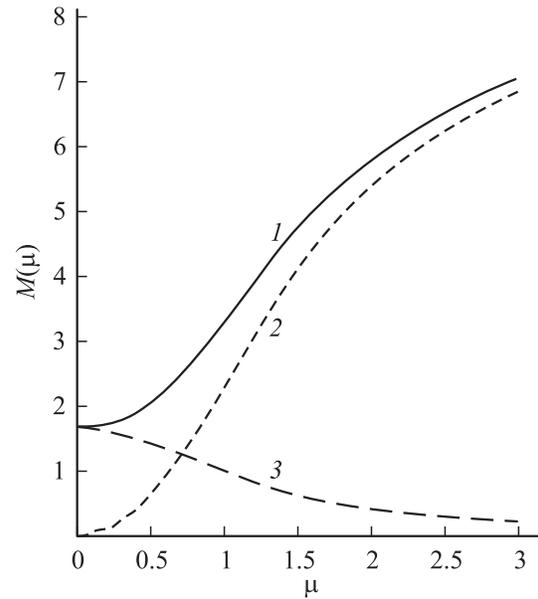


Рис. 1. Зависимость M от μ ($\lambda = 0.1, \Omega = 0$).

рис. 1 имеются три кривые: 1 соответствует модулю полной безразмерной интегральной проводимости проволоки P , 2 и 3 соответствуют ее частям. Такое разбиение возникает в результате численного расчета модуля проводимости при интегрировании по переменной ρ (безразмерной перпендикулярной составляющей скорости электрона). Кривая 2 на рис. 1 соответствует части безразмерной интегральной проводимости, вклад в которую вносят электроны с траекториями, не пересекающимися с внутренней поверхностью проволоки (объемная часть полной безразмерной интегральной проводимости). Кривая 3 соответствует части безразмерной интегральной проводимости, вклад в которую вносят электроны с траекториями, пересекающимися с внутренней поверхностью проволоки (поверхностная часть полной безразмерной интегральной проводимости). Поведение кривых 2 и 3 поясняется исходя из следующих соображений. При относительно небольшом значении безразмерной индукции внешнего магнитного поля μ ($\mu \ll 1$) доминирует вклад в интегральную проводимость проволоки от электронов, рассеивающихся на поверхности. Дальнейшее увеличение безразмерной индукции внешнего магнитного поля μ приводит к тому, что постепенно возрастает вклад в проводимость от электронов с траекториями, не пересекающимися с внутренней поверхностью проволоки (их число возрастает), и уменьшается вклад в проводимость от электронов с траекториями, пересекающимися с внутренней поверхностью проволоки (таких электронов становится меньше). Поэтому по мере увеличения безразмерной индукции внешнего магнитного поля μ кривые 1 и 2 на рис. 1 асимптотически приближаются друг к другу, а кривая 3 плавно стремится к нулю. Причем скорость сближения кривых 1 и 2 (как и скорость убывания

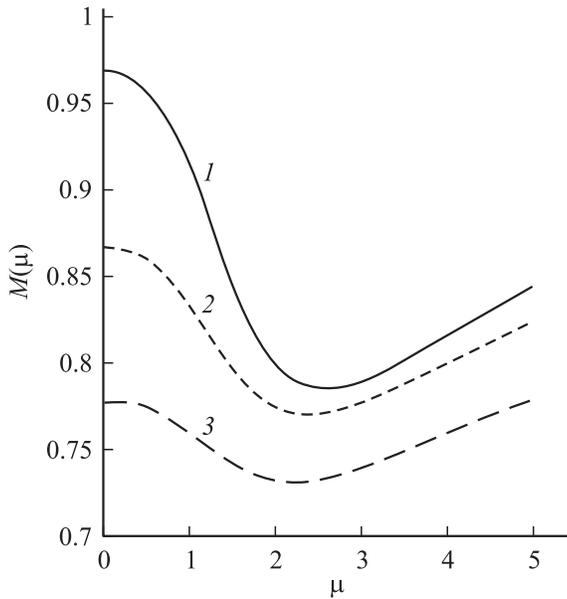


Рис. 2. Зависимость M от μ .

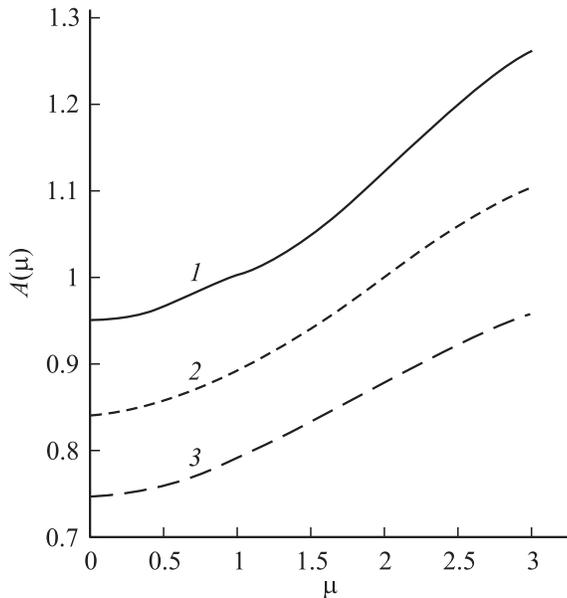


Рис. 3. Зависимость A от μ .

кривой 3) зависит от значения безразмерной обратной длины свободного пробега электронов λ . В случае проволоки с достаточно большой безразмерной обратной длиной свободного пробега электронов ($\lambda \gg 1$, т. е. $R \gg \Lambda$) интегральная проводимость P слабо зависит от безразмерной индукции внешнего магнитного поля μ , из-за того что при этом условии вклад в проводимость поверхностного рассеяния электронов невелик. Заметим, что при расчете электрической проводимости проволоки в случае переменных электрических полей указанные выше зависимости качественно сохраняются.

На рис. 2, 3 помещены графики зависимостей модуля M и аргумента A (фазы) безразмерной интегральной проводимости проволоки P от безразмерной индукции внешнего магнитного поля μ в случае переменных электрических полей. Безразмерная обратная длина свободного пробега электронов λ разная для каждой из пар кривых на этих рисунках (для кривых 1 — 0.1, для 2 — 0.3, для 3 — 0.5). Безразмерная частота электрического поля Ω для каждой кривой одинаковая ($\Omega = 1$). Из рис. 2 видно, что модуль безразмерной интегральной проводимости наиболее велик (при каждом значении безразмерной индукции внешнего магнитного поля μ) для проволоки с наибольшей длиной свободного пробега электронов (т. е. с наименьшей λ). Отметим, что графики этой зависимости имеют очевидные минимумы, приходящиеся на разные значения безразмерной индукции магнитного поля. С помощью рис. 3 можно сделать вывод о том, что аргумент A (фаза) безразмерной интегральной проводимости проволоки P монотонно возрастает (стремясь к $\pi/2$) с увеличением безразмерной индукции внешнего магнитного поля μ . При этом для каждого значения безразмерной индукции магнитной величина аргумента A (фазы) наиболее велика для проволоки с наибольшей длиной свободного пробега электронов.

Список литературы

- [1] Петров Ю.И. Физика малых частиц. М.: Наука, 1984.
- [2] Dingle R.B. // Proc. Roy. Soc. 1950. Vol. A201. P. 545–560.
- [3] MacDonald D.K.C. // Nature. 1949. Vol. 163. P. 637–638.
- [4] Chambers R.G. // Proc. Roy. Soc. 1950. Vol. A202. P. 378–394.
- [5] MacDonald D.K.C. // Proc. Phys. Soc. 1950. Vol. A63. P. 290–292.
- [6] Chambers R.G. // Proc. Phys. Soc. 1952. Vol. A65. P. 458–459.
- [7] White G.K., Woods S.B. // Phill. Mag. 1956. Vol. 1. P. 846–853.
- [8] Харрисон У. Теория твердого тела. М.: Мир, 1972.
- [9] Займан Дж. Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962.
- [10] Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971.