

03:08

К теории акустических солитонов в жидкости с распределенными пузырьками газа

© Д.Ч. Ким

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
630102 Новосибирск, Россия
e-mail: dck@neic.nsk.su

(Поступило в Редакцию 26 октября 2006 г.)

Найдена тесная связь между численными решениями двух систем: „двухуровневой нелинейной волновой динамической модели жидкости с пузырьками газа“ и уравнением Кортевега и де Фриза. В длинноволновом приближении в рамках модели выведены уравнения КдФ для любой зависимой переменной газожидкостной смеси. Ранее опубликованные уравнения КдФ, полученные с помощью радикально других приближений, являются частными случаями наших уравнений.

PACS: 47.55.Ca

Введение

Нелинейные и уединенные волны — солитоны — стали традиционными объектами естественных наук и техники [1,2]. Жидкость с пузырьками газа является уникальной нелинейной диспергирующей средой. Многим нелинейным эффектам из различных областей механики, физики и нелинейной оптики спустя некоторое время находились аналоги в жидкости с газовыми пузырьками [3]. Так, с помощью аналогии между волнами сжатия в рассматриваемой среде и гравитационными волнами на поверхности мелкой воды впервые в работе [4] было получено уравнение Кортевега и де Фриза (КдФ) для возмущения газового давления в приближении, что колебание пузырька — линейное и изотермическое, а амплитуда гидродинамических возмущений конечна. В работе [5] при выводе уравнения КдФ для параметра гидродинамической скорости также использовались приближения, как в [4]. Кроме того, в [5] помимо указанных приближений вводится дополнительное допущение о нелокальной связи между давлением и плотностью смеси.

Существование стационарных уединенных волн-солитонов обусловлено взаимной компенсацией нелинейных и дисперсионных эффектов. При этом нелинейность среды складывается из нелинейностей жидкости, уравнений гидродинамики и пульсации пузырьков. Однако в [4,5] и всех последующих работах (например, [6]) по теории нелинейных волн в жидкости с пузырьками газа никак не обосновываются принятые авторами приближения о предпочтительности сохранения гидродинамической конвективной нелинейности по сравнению с нелинейностью пульсации пузырьков. Между тем теоретические оценки, проведенные в работе [7], указывают, что и в области низких частот $\omega \ll \omega_0$ (длинные волны) определяющей является нелинейность пузырьков, которая превосходит гидродинамическую нелинейность на два порядка. Таким образом, нет никаких оснований полагать, что предпочтительнее сохранять гидродинамическую нелинейность по сравнению с нелинейностью

пузырьков. Результаты работы [7] говорят об обратном: уравнения гидродинамики можно линеаризовать, оставив нелинейность пузырьков. Действительно, в работе [8] было получено уравнение КдФ для возмущения радиуса пузырьков, при линеаризации уравнений гидродинамики и сохранении нелинейности уравнения движения пузырьков Рэлея–Лэмба.

Целями настоящего сообщения являются изучение эволюции длинноволновых возмущений в жидкости пузырьковой структуры, вывод самосогласованным образом остальных уравнений КдФ для любого параметра смеси в рамках „двухуровневой нелинейной волновой динамической модели жидкости с пузырьками газа“.

Формулировка задачи

Математические уравнения данной модели [8,9] содержат линеаризованные уравнения гидродинамики жидкости на макроуровне, нелинейное уравнение Рэлея–Лэмба, описывающее радиальное движение пузырьков на микроуровне, и предполагается, что пузырьки могут только пульсировать, т.е. пренебрегается их смещением. Сформулированная модель в одномерной записи, которая является гамильтоновой, имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \lg(1 - \varphi), \quad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho_0} (P_g - P), \quad (3)$$

$$P - P_0 = c^2(\rho - \rho_0), \quad (4)$$

$$P_g = P_0 \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^{3\gamma}, \quad (5)$$

$$\varphi = \frac{4}{3} \pi n R^3. \quad (6)$$

Здесь и далее: t — время, V — гидродинамическая скорость частиц жидкости, P — давление жидкости, R — радиус пузырьков, γ — показатель политропы дисперсной газовой фазы, P_g — давление газа в пузырьках, ρ — плотность несущей жидкости, c — скорость звука в жидкости без пузырьков, φ — объемное содержание газа, n — число монодисперсных пузырьков в единице объема. Индекс „0“ относится к параметрам невозмущенного состояния газожидкостной смеси.

Уравнение (1) является линеаризованным уравнением неразрывности, в котором возмущение плотности исключено с помощью уравнения состояния жидкости. Его правая часть представляет газовую фазу [10]. Уравнение (2) является линеаризованным уравнением сохранения импульса [10]. Для численных расчетов уравнения неразрывности (1) и сохранения импульса (2) удобно преобразовать в одно неоднородное волновое уравнение типа Лайтхилла [10]

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln(1 - \varphi) \right). \quad (7)$$

Условие совместного деформирования фаз связывает давление жидкости, газа и радиус пузырька. Таким условием является уравнение Рэля–Лэмба (3) или его модификации. Формула (4) является акустическим уравнением состояния жидкости [3]. Уравнение (5) выражает политропный закон поведения газа в пульсирующем пузырьке. Объемное газосодержание монодисперсионных пузырьков определяется обычным образом формулой (6).

Подчеркнем отличительные особенности построенной полулинейной модели (1)–(6). Полагаем справедливым основное допущение механики сплошной среды — расстояния, на которых параметры течения смеси меняются существенно (вне поверхности раздела фаз), много больше размера пузырьков и расстояния между ними. Это позволяет описать газожидкостную смесь как совокупность континуумов, заполняющих один и тот же объем. В каждой точке объема, занятого смесью, можно ввести макроскопические скорости фаз, давления, объемные содержания фаз, средней плотности и т. д.; затем уравнения гидродинамики смеси переписать в терминах истинной плотности, давления и т. д. для компонентов смеси, что впервые было сделано в [10]. Так как уравнения гидродинамики линеаризованы, то нелинейные и дисперсионные эффекты вносятся только дискретной газовой фазой. Представленная модель позволяет корректно провести асимптотический переход $\varphi \rightarrow 0$ от двухфазной среды к однофазной жидкости. В представленной модели не используются параметры фиктивной гомогенной среды (плотность смеси, давление смеси и т. п.), что позволяет избежать ряда противоречий, присущих гомогенным моделям.

Граничные и начальные условия

Любое заданное возмущение распространяется в положительном направлении оси x . Волновое уравнение (7) интегрируется как начально-краевая задача.

В начальный момент времени среда покоится, поэтому начальные условия для него задаются в виде

$$P(x, 0) = P_0, \quad \frac{\partial P(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Двухточечные граничные условия задаются слева $x = 0$ в виде заданной функции, а справа $x = L$ в виде безотражательного условия Зоммерфельда

$$P(0, t) = P_0 + f(0, t),$$

$$\left(\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = 0, \quad (9)$$

где $f(0, t)$ — заданная функция внешнего возмущения. Второе условие необходимо ставить на границах расчетной области для численного решения задачи, относящейся к неограниченным областям.

Для уравнений (3) и (6) ставятся естественные начальные условия

$$R(x, 0) = R, \quad \frac{\partial R(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0. \quad (11)$$

Для настоящей работы были разработаны вычислительные алгоритмы, основанные на компактных разностных схемах четвертого порядка точности по пространственной координате для неоднородного волнового уравнения Лайтхилла (7). Обыкновенное дифференциальное уравнение (3) интегрируется явным методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с автоматическим выбором шага. В целом численная схема имеет четвертый порядок по пространству и второй по времени $O(h^4 + \tau^2)$.

Распространение длинноволновых возмущений

В современной физике нелинейных явлений в гамильтоновых системах хорошо известно, что образование стационарных уединенных волн возможно лишь при наличии двух конкурирующих факторов, одним из которых является нелинейность среды, а другим — дисперсия линейных волн.

Прежде всего мы отметим, что жидкость с пузырьками газа относится к структурно неоднородным средам с гигантской физической нелинейностью [11]. Радиальное движение микровключений-пузырьков является существенно нелинейным (по англоязычной терминологии „intrinsically nonlinear“). Это означает, что область действия линеаризованного уравнения движения пузырьков ничтожно мала и для практически заметных значений амплитуды колебаний пузырьков их поведение нелинейное. В этом проявляется одно из специфических свойств пузырьковой среды.

Ранее в работе [9, рис. 4, с] путем численного моделирования было обнаружено, что распространяющийся протяженный импульс возмущения в жидкости с нелинейными, но адиабатическими или изотермическими пузырьками распадается на последовательность волн, близких к уединенным. В работе [8] на рис. 1 показан другой пример пространственной эволюции возмущения при синусоидальном входном воздействии с частотой $\omega = \omega_0/20$, где $\omega_0 = R_0^{-1} \sqrt{3\gamma P_0/\rho_0}$ — собственная частота пузырька Миннаэрта. Результаты численного моделирования показали, что синусоидальное возмущение вначале ведет себя, подобно обычной простой волне газовой динамики: крутизна профиля увеличивается там, где возмущение больше, и образуется N -образная волна. При достаточно большой крутизне становятся существенными эффекты дисперсии, и в результате эволюции гармоническое возмущение распадается на последовательность солитонов. Вершины их лежат на одной прямой. Напрашивалось сравнение с результатами работы [12], которые указывали на полное качественное совпадение этих численных решений и на возможность вывода уравнений КдФ из модели (1)–(6).

Аналогичное распадение на последовательность солитонов наблюдается также для гауссова входного импульса в виде

$$f(0, t) = P_{\text{Pul}} \exp(-(t/T_{\text{Pul}})^2), \quad (12)$$

где T_{Pul} — временная ширина гауссова импульса. Ниже представлены численные результаты, полученные в исследуемой математической модели со следующими параметрами среды вода–воздух: $P_0 = 1$ bar, $\gamma = 7/5$, $\rho_0 = 10^3$ kg/m³, $c = 1500$ m/s, $R_0 = 0.5$ mm, $\varphi_0 = 10^{-4}$, амплитуда импульса $P_{\text{Pul}} = 0.2$ bar.

Число образующихся солитонов находится в соответствии с численно-теоретическими предсказаниями, полученными из решения задачи Коши для уравнения КдФ [13]. В случае краевой задачи параметром подобия является следующий безразмерный комплекс:

$$\delta = T_{\text{Pul}} \left(\frac{P_{\text{Pul}}}{R_0^2 \rho_0} \right)^{1/2},$$

который характеризует соотношение между временной шириной возмущения, его амплитудой и радиусом пузырьков, ответственными за дисперсию. Характер решений будет зависеть от значения параметра подобия δ для краевого условия (12). При достаточно больших значениях $\delta > \delta_s$ гауссово возмущение в процессе эволюции полностью распадается на последовательность солитонов, как для случая периодического граничного условия, исследованного в работе [8]. На рис. 1 приведен пример такого распада, образовавшегося к моменту времени $t = 151$ ms при $\delta = 5$.

Установлено критическое значение параметра подобия δ_s , при котором образуется один солитон. На рис. 2 показан результат расчета эволюции гауссова входного импульса (12) для критического солитонного параметра

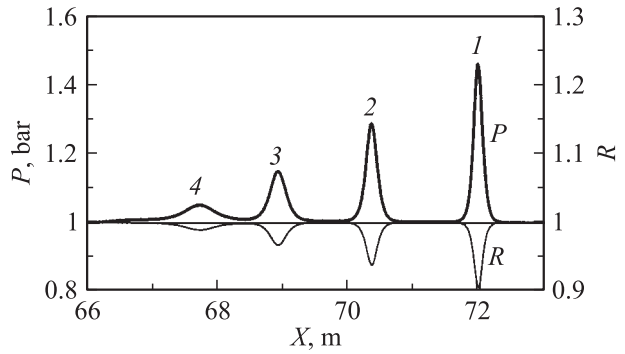


Рис. 1. Распад гауссова входного импульса на последовательность солитонов при $\delta = 5$. Жирная кривая — давление P , тонкая — безразмерный радиус пузырьков R .

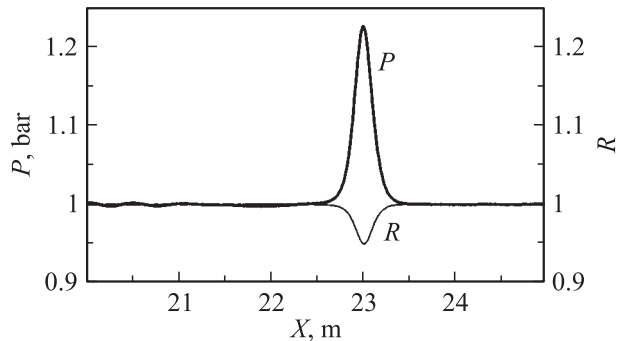


Рис. 2. Фундаментальный солитон КдФ. Обозначения те же, что на рис. 1, $\delta_s = 1.4$.

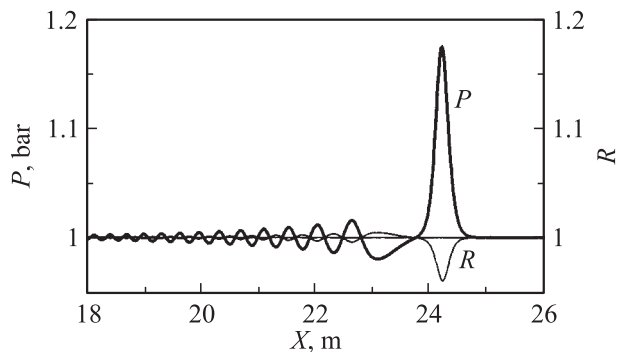


Рис. 3. Эволюция гауссова импульса в полулинейной системе (1)–(6) при $\delta = 1$. Обозначения те же, что на рис. 1.

подобия $\delta_s = 1.4$. Как видно из рис. 2, гауссов импульс подстраивает свою форму и длительность в процессе распространения, приближаясь к солитону КдФ. Уравнение солитона имеет вид

$$P_s(x) = a \operatorname{sech}^2[(x - x_0)(a/12\beta)^{1/2}],$$

где β — коэффициент дисперсии, a — амплитуда солитона.

При обратном соотношении параметра подобия $\delta < \delta_s$ получается решение, содержащее наряду с солитонами,

уходящими вперед, отстающий от них „хвост“, представляющий собой быстро осциллирующий волновой пакет. На рис. 3 показаны образовавшийся солитон и волновой пакет к моменту времени $t = 26$ ms для параметра $\delta = 1$. Имеем также полное качественное совпадение с численным решением уравнения КдФ, показанным на рис. 2 работы [13].

Таким образом, на основании выявленных закономерностей образования стационарных уединенных волн в представленной модели (1)–(6), можно заключить, что она в длинноволновом приближении является моделью Кортвега–де Фриза.

Уравнения Кортвега–де Фриза для жидкости пузырьковой структуры

Действительно, из системы (1)–(6) было выведено с помощью метода многих масштабов уравнение КдФ для возмущения радиуса пузырьков R' [8]. Это уравнение имеет вид в новых координатах $\tau = t$ и $\eta = x - c_1 t$ (штрихи опускаем)

$$R_\tau - \varepsilon \frac{3c_1}{2R_0} (\gamma + 1) R R_\eta + \frac{c_1^3}{2\omega_0^2} R_{\eta\eta\eta} = 0, \quad (13)$$

где c_1 есть скорость звука в низкочастотном приближении

$$\frac{1}{c_1^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{\varphi_0 \rho}{\gamma P_0}.$$

Уравнение (13) записано в системе отсчета, которая движется с фазовой скоростью c_1 относительно среды. Коэффициенты при нелинейном и дисперсионном членах полученного уравнения (13) определяются дискретной газовой фазой — пузырьками, так как в полулинейной системе (1)–(6) за нелинейные и дисперсионные эффекты ответственны только пузырьки. Знак „минус“ при нелинейном члене полученного уравнения соответствует знаку амплитуды волны возмущения радиусов (тонкая кривая на рис. 1 [8]). В нашем случае отрицательные консервативные солитоны получаются при условии баланса между нелинейным искажением и дисперсионным расплыванием волны, которые обязаны только присутствию пузырьков.

Теперь без громоздких выкладок в рамках представленной модели покажем, как можно получить уравнения КдФ для любого параметра обеих фаз смеси. Используя соотношения для политропного газа в полости

$$\frac{P'_g}{P_g} = \gamma \frac{\rho'_g}{\rho_g} = -3\gamma \frac{R'}{R}, \quad (14)$$

нетрудно выписать уравнения КдФ для переменных газовой фазы. Если $\gamma = 1$, то при соответствующей нормировке амплитуды P'_g получается уравнение КдФ, совпадающее с уравнением 5.1 статьи [4]. В физическом механизме нелинейности заключается кардинальное отличие уравнения (13) от уравнения КдФ, полученного в работе Вейнгардена [4].

Экспериментально легче измерять давление в жидкой фазе, поэтому имеет смысл для него тоже вывести уравнение КдФ. В принятом приближении динамическая нелинейность пузырьков существенно меньше нелинейности уравнения состояния газа [7]. В условиях квазиравновесного изменения газового давления микроинерцией радиального движения пузырька можно пренебречь. В результате из уравнения (3) следует, что $P'_g = P'$. Данное предположение полностью подтвердилось при численном моделировании. Теперь уравнение (13) просто переписать для макропеременной P' , используя одно из соотношений (14)

$$P_\tau + \varepsilon \frac{c_1}{2P_0} \frac{(\gamma + 1)}{\gamma} P P_\eta + \frac{c_1^3}{2\omega_0^2} P_{\eta\eta\eta} = 0 \quad (15)$$

(штрихи опущены), которое описывает солитоны положительной полярности возмущения давления. Результаты численного моделирования исходной системы уравнений (1)–(6), полностью подтверждающие теоретические выводы, показаны в [8] на рис. 1 (жирная кривая).

Используя самосогласованные соотношения между P' , V' и ρ' , существующие в линейной гидродинамике, можно выписать уравнения КдФ для остальных макроскопических переменных жидкой фазы, например, для гидродинамической скорости

$$V_\tau + \varepsilon \frac{c_1}{c} \frac{(\gamma + 1)}{2} V V_\eta + \frac{c_1^3}{2\omega_0^2} V_{\eta\eta\eta} = 0. \quad (16)$$

Если в уравнении (2.2) работы [5] согласиться с допущением авторов, что возмущение скорости смеси равно возмущению скорости жидкой компоненты, то оно с точностью до нормировочного коэффициента совпадает с нашим уравнением (16). Необходимо подчеркнуть, что физический механизм, лежащий в основе вывода уравнения (16), кардинально отличается от механизма, предложенного в квазигомогенной модели [5].

Особо заслуживает внимания тот факт, что из исходной гамильтоновой системы (1)–(6) мы вывели уравнение КдФ, которое, как известно, также является гамильтоновой системой [14]. Уравнение КдФ точно интегрируется с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Однако МОЗР неприменим в случаях, когда в динамике системы важную роль играют диссипативные или межфазные процессы. В таких ситуациях приходится прибегать к численным моделям и методам [8].

Заключение

Самосогласованным образом аналитически выведены уравнения Кортвега–де Фриза для любого параметра газожидкостной смеси в рамках построенной полулинейной модели (1)–(6). При исследованиях в численном эксперименте распространения длинноволновых возмущений доказано, что двухуровневая нелинейная волновая динамическая модель жидкости с пузырьками газа [8,9] является самодостаточной замкнутой моделью КдФ.

Автор выражает глубокую сердечную благодарность академику РАН Ю.И. Шокину за научные консультации и поддержку данной работы и члену-корреспонденту РАН Г.А. Михайлову за постоянное внимание и всестороннюю поддержку.

Список литературы

- [1] *Додд, Эйлбек Дж., Гиббсон Дж.* и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Под ред. А.Б. Шабата. М.: Мир, 1988. 694 с.
- [2] *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов / Под ред. Н.Н. Розанова. М.: Физматлит, 2005. 648 с.
- [3] *Naugolnykh K., Ostrovsky L.* Nonlinear wave processes in acoustics. Cambridge–NewYork–Melbourne, 1998.
- [4] *Van Wijngaarden L.* // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 33. P. 465–474.
- [5] *Нагоряков В.Е., Соболев В.В., Шрейбер И.Р.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 5. С. 71–76.
- [6] *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* // Акустический журнал. 1995. Т. 41. № 5. С. 690–698.
- [7] *Заболотская Е.А.* // Акустический журнал. 1975. Т. 21. С. 934–937.
- [8] *Ким Д.Ч.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. Вып. 5. С. 38–46.
- [9] *Kim D.C.* // Computer Physics Commun. 2002. Vol. 147. P. 526–529.
- [10] *Crighton D.G., Williams J.E.* // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 36. P. 585–603.
- [11] *Руденко О.В.* // УФН. 2006. Т. 176. Вып. 1. С. 77–95.
- [12] *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15. P. 240–243.
- [13] *Березин Ю.Ф., Карпман В.И.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. Вып. 5 (11). С. 1551–1568.
- [14] *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д.* // Функциональный анализ и его применения. 1971. Т. 5. Вып. 4. С. 18–27.