01;03

Теория нестационарного термофореза твердой сферической частицы

© М.К. Кузьмин, Ю.И. Яламов

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: lesir179@infoline.su

(Поступило в Редакцию 5 сентября 2006 г.)

Представлена теория нестационарного термофореза крупной твердой частицы сферической формы в вязкой газовой среде. Построение этой теории включает в себя решение гидродинамической и тепловой задач, каждая из них разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарных частей этих задач получена окончательная формула для определения стационарной составляющей термофоретической скорости рассматриваемой частицы. Для определения нестационарной составляющий термофоретической скорости этой частицы найдена соответствующая формула в пространстве лапласовых изображений. С помощью теорем о предельных значениях из операционного исчисления получена зависимость нестационарной составляющей термофоретической скорости сферической частицы от строго нестационарного градиента температуры при больших и малых значениях времени. Отмечены факторы, влияющие на величину термофоретической скорости рассматриваемой частицы.

PACS: 92.60.Mt, 45.70.-n

Введение

Исследование движения аэрозольных частиц в неоднородных средах имеет важный научный и практический интерес. В книге [1], появившейся полвека назад, был собран и критически рассмотрен почти весь имевшийся на то время теоретический и экспериментальный материал, относящийся к механике аэрозолей. Дальнейшие исследования, выполненные в направлении более полного учета факторов, влияющих на движение аэрозольных частиц, а также обобщающие результаты, полученные по физике аэродисперсных систем, нашли широкое отражение в монографии [2]. В настоящее время достаточно хорошо изучены вопросы, связанные со стационарным переносом аэрозольных частиц.

Большую роль в атмосферных процессах, химической технологии, экологии и медицине играет явление термофоретического переноса аэрозольных частиц. К сожалению, до сих пор нестационарная теория термофореза остается неразработанной.

При исследовании нестационарного термофореза будем предполагать, что этот процесс является непосредственным продолжением стационарного процесса термофореза. Исходя из такого предположения будут определены начальные и граничные условия рассматриваемой задачи. Основополагающую роль в ней будет играть граничное условие, полученное с учетом явления теплового скольжения газа вдоль поверхности частицы [1].

Постановка задачи

Рассмотрим одиночную твердую частицу сферической формы радиуса R, взвешенную в неоднородной по температуре вязкой несжимаемой газовой среде. Как известно [1], выбор метода решения задач, связанных с термофорезом, зависит от отношения средней длины свободного пробега молекул газа λ к размеру аэрозольной частицы, т.е. от числа Кнудсена $Kn = \lambda/R$. Мы полагаем, что $Kn \ll 1$, т.е. рассматриваем крупную сферическую частицу [2]. В соответствии с этим в исследованиях привлекаем классические методы динамики сплошной среды [3–5]. При использовании уравнения Навье–Стокса предполагаем, что число Рейнольдса мало.

Для частицы, имеющей сферическую форму, математические выкладки удобно проводить в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре частицы. На относительно большом удалении от частицы $(r \gg R)$ предположим наличие во внешней газовой среде градиента температуры $[\nabla T_e(t)]_\infty$, где t — время. Для определенности будем считать его направление противоположным полярной оси. Согласно выбору начала системы координат, частицу будем считать покоящейся, а центр инерции внешней среды — движущимся относительно частицы при $r \to \infty$ со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. При этом скорость термофореза частицы относительно центра инерции внешней среды будет равна $\mathbf{u}_T(t) = -\mathbf{u}(t)$. Отметим, что векторы $\mathbf{u}_T(t)$ и $[\nabla T_e(t)]_\infty$ имеют противоположные направления. Картина обтекания сферической частицы потоком газа имеет азимутальную симметрию из-за выбора направления полярной оси вдоль вектора $[\nabla T_e(t)]_\infty$. Поэтому рассматриваемые переменные не зависят от угла φ. Как известно, такое поле течения называется осесимметричным.

Дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой среды в сферических координатах при ее осесимметричном течении без учета действия массовых сил можно представить в виде [4,5]

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r v_\theta \sin\theta\right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_e}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\Delta_{r\theta} v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2v_\theta}{r^2}\operatorname{ctg}\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right),$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_e r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta_{r\theta} v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right), \quad (2)$$

где

$$\Delta_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right],$$

v_r, v_θ — соответственно радиальная и касательная компоненты локальной среднемассовой скорости газовой среды $\mathbf{v}(r, \theta, t)$, ν — кинематический коэффициент вязкости, ρ_e — плотность среды, $P = P(r, \theta, t)$ — давление. Отметим, что равенство (1) является условием несжимаемости среды.

На достаточно большом расстоянии от частицы, т. е. при $r \to \infty$, справедливы граничные условия [2]:

$$v_{r|r\to\infty} = |\mathbf{u}|\cos\theta, \quad (3)$$

$$v_{\theta|r\to\infty} = -|\mathbf{u}|\sin\theta. \quad (4)$$

На поверхности частицы для компонент скорости справедливо следующее граничное условие:

$$v_{r|r=R} = 0, \quad (5)$$

показывающее, что твердая поверхность частицы неподвижна.

Распределения температур во внешней газовой среде $T_e(r, \theta, t)$ и внутри твердой сферической частицы $T_i(r, \theta, t)$ удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = a_e \Delta_{r\theta} T_e, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \Delta_{r\theta} T_i, \quad (7)$$

где a_e, a_i — коэффициенты температуропроводности. Здесь и далее будем снабжать индексами „e“ и „i“ величины, характеризующие одно и то же физическое свойство для областей, расположенных соответственно вне и внутри частицы. Граничные условия

$$T_e(r, \theta, t)_{|r=R} = T_i(r, \theta, t)_{|r=R}, \quad (8)$$

$$\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r}_{|r=R} = \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r}_{|r=R}, \quad (9)$$

где κ_e, κ_i — коэффициенты теплопроводности, выражают соответственно свойства непрерывности температуры и потока тепла [2].

Так как во внешней газовой среде на большом расстоянии от частицы задан градиент температуры $[\nabla T_e(t)]_\infty$, то при $r \to \infty$ справедливо граничное условие

$$T_e = T_0 + |[\nabla T_e(t)]_\infty| r\cos\theta, \quad (10)$$

где T_0 — средняя температура газа и частицы. Заметим, что T_0 истолковываем так же, как температуру среды в точке, совпадающей с центром частицы, будто там нет самой частицы.

Учет явления теплового скольжения газа вдоль поверхности частицы описывается следующим граничным условием:

$$v_{\theta|r=R} = \frac{K_{Tsl}\nu}{T_0 R}\frac{\partial T_e}{\partial \theta}_{|r=R}, \quad (11)$$

где K_{Tsl} — коэффициент теплового скольжения [2].

Для давления полагаем $P(r, \theta, t) = P_1(r, \theta) + P_2(r, \theta, t)$, $P_1(r, \theta) = P(r, \theta, t)_{|t=0}$, следовательно, $P_2 = (r, \theta, t)_{|t=0} = 0$.

Проведем дальнейшее разделение граничных условий для стационарного и строго нестационарного случаев термофореза. Полагаем

$$T_e(r, \theta, t) = T_{1e}(r, \theta) + T_{2e}(r, \theta, t), \quad (12)$$

$$T_i(r, \theta, t) = T_{1i}(r, \theta) + T_{2i}(r, \theta, t), \quad (13)$$

$$\mathbf{v}(r, \theta, t) = \mathbf{v}_1(r, \theta) + \mathbf{v}_2(r, \theta, t), \quad (14)$$

причем

$$T_e(r, \theta, t)_{|t=0} = T_{1e}(r, \theta), \quad (15)$$

$$T_i(r, \theta, t)_{|t=0} = T_{1i}(r, \theta), \quad (16)$$

$$\mathbf{v}(r, \theta, t)_{|t=0} = \mathbf{v}_1(r, \theta), \quad (17)$$

следовательно,

$$T_{2e}(r, \theta, t)_{|t=0} = 0, \quad (18)$$

$$T_{2i}(r, \theta, t)_{|t=0} = 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{v}_2(r, \theta, t)_{|t=0} = 0. \quad (20)$$

В силу равенств (14), (17), (20) следует считать, что

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2(t), \quad (21)$$

$$\mathbf{u}(t)_{|t=0} = \mathbf{u}_1, \quad (22)$$

$$\mathbf{u}_2(t)_{|t=0} = 0. \quad (23)$$

Решение гидродинамической задачи

Продолжим разделение граничных условий для стационарного и строго нестационарного случаев гидродинамической задачи. Обозначим через $v_r^{(m)}$, $v_\theta^{(m)}$ соответственно радиальную и касательную компоненты вектора $\mathbf{v}_m$, где $m = 1, 2$; $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(r, \theta)$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2(r, \theta, t)$. Из граничных условий (3)–(5) с учетом равенств (14), (17), (20)–(23) получим соответствующие условия при $t = 0$:

$$v^{(1)}_{r|r\to\infty} = |\mathbf{u}_1|\cos\theta, \quad (24)$$

$$v^{(1)}_{\theta|r\to\infty} = -|\mathbf{u}_1|\sin\theta, \tag{25}$$

$$v^{(1)}_{r|r\to\infty} = 0 \tag{26}$$

и при $t > 0$:

$$v^{(2)}_{r|r\to\infty} = |\mathbf{u}_2|\cos\theta, \tag{27}$$

$$v^{(2)}_{\theta|r\to\infty} = -|\mathbf{u}_1|\sin\theta, \tag{28}$$

$$v^{(2)}_{r|r\to\infty} = 0, \tag{29}$$

где $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(t)$. Из граничного условия (11) в силу равенств (12), (14), (15), (17), (18) и (20) получим при $t = 0$ и при $t > 0$ соответственно

$$v^{(1)}_{\theta|r=R} = \frac{K_{Tsl}\nu}{T_0 R}\,\frac{\partial T_{1e}}{\partial\theta}_{|r=R}, \tag{30}$$

$$v^{(2)}_{\theta|r=R} = \frac{K_{Tsl}\nu}{T_0 R}\,\frac{\partial T_{2e}}{\partial\theta}_{|r=R}. \tag{31}$$

Приступим непосредственно к решению гидродинамической задачи. На основании условия несжимаемости среды (1) можно ввести функцию тока $\psi = \psi(r,\theta,t)$ осесимметричного течения, полагая

$$v_r = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{32}$$

Используя оператор Стокса

$$D_S = \Delta_{r\theta} - \frac{2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

уравнения (2) можно представить в виде

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\,\partial t} = \frac{1}{\rho_e}\,\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial D_S\psi}{\partial\theta},$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} = -\frac{1}{\rho_e}\,\frac{\partial P}{\partial\theta} + \frac{\nu}{\sin\theta}\,\frac{\partial D_S\psi}{\partial r}. \tag{33}$$

Исключив из уравнений (33) давление, получим для функций тока следующее дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка:

$$\frac{\partial D_S\psi}{\partial t} = \nu D_S D_S\psi. \tag{34}$$

Функцию тока ищем в виде

$$\psi = \sin^2\theta\, f(r,t), \tag{35}$$

где $f(r,t)$ — неизвестная функция, причем полагаем

$$f(r,t) = f_1(r) + f_2(r,t). \tag{36}$$

$$f(r,t)_{|t=0} = f_1(r),$$

следовательно,

$$f_2(r,t)_{|t=0} = 0. \tag{37}$$

В силу предположения (35) дифференциальное уравнение (34) представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2f}{r^2}\right) = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2f}{r^2}\right). \tag{38}$$

Очевидно, что если функции $f_1(r)$ и $f_2(r,t)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f_1}{dr^2} - \frac{2f_1}{r^2}\right) = 0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} - \frac{2f_2}{r^2}\right) = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} - \frac{2f_2}{r^2}\right) \tag{40}$$

соответственно, то их сумма (36) будет решением дифференциального уравнения (38).

Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение (39). Оно является уравнением Эйлера [6]. Его решение с учетом граничных условий (24)–(26) и условия того, что суммарная сила, действующая на сферическую частицу при ее движении с постоянной скоростью, равна нулю, имеет вид

$$f_1(r) = \frac{|\mathbf{u}_1|}{2}\left(\frac{R^3}{r} - r^2\right),$$

следовательно,

$$v^{(1)}_\theta = -|\mathbf{u}_1|\sin\theta\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right).$$

В силу последнего равенства из граничного условия (30) находим следующее условие, учитывающее явление теплового скольжения газа в стационарном случае термофореза:

$$|\mathbf{u}_1| = -\frac{2K_{Tsl}\nu}{3T_0 R\sin\theta}\,\frac{\partial T_{1e}}{\partial\theta}_{|r=R}. \tag{41}$$

Перейдем к решению нестационарной части гидродинамической задачи. Для того чтобы решить дифференциальное уравнение с частными производными (40), применим к нему интегральное преобразование Лапласа вида [7]

$$F_2(r,p) = L\{f_2(r,t)\} = \int\limits_0^\infty f_2(r,t)\exp(-pt)\,dt, \tag{42}$$

где p — комплексный параметр. С учетом начального условия (37) получим в пространстве изображений соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left[\frac{d^2F_2}{dr^2} - F_2\left(\frac{2}{r^2} + \frac{p}{\nu}\right)\right] = 0. \tag{43}$$

Используя модифицированные функции Бесселя первого и второго рода $I_{3/2}$, $K_{3/2}$ [8], общее решение дифференциального уравнения (43) можно записать в виде [4]

$$F_2(r,p) = -\frac{\nu}{p}\left(\frac{A_2}{r} + B_2 r^2\right) + \Big[C_2 I_{3/2}\big(r\sqrt{p/\nu}\,\big) + D_2 K_{3/2}\big(r\sqrt{p/\nu}\,\big)\Big]\sqrt{r}. \tag{44}$$

Здесь A_2, B_2, C_2, D_2 — произвольные постоянные. Они будут определены условиями рассматриваемой задачи. Поскольку такая задача решается впервые, то несколько подробнее остановимся на этом вопросе.

Рассмотрим выражения радиальной и касательной компонент $v_r^{(2)}$, $v_\theta^{(2)}$ вектора $\mathbf{v}_2(r, \theta, t)$, которые с учетом соотношений (14), (32), (35) и (36) имеют вид

$$v_r^{(2)} = -\frac{2\cos\theta}{r^2} f_2(r, t), \quad v_\theta^{(2)} = \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f_2}{\partial r}.$$

Применив к ним преобразование Лапласа (42), получим

$$L\{v_r^{(2)}\} = V_r^{(2)} = -\frac{2\cos\theta}{r^2} F_2(r, p),$$

$$L\{v_\theta^{(2)}\} = V_\theta^{(2)} = \frac{\sin\theta}{r}\frac{dF_2}{dr}. \tag{45}$$

В соответствии с граничными условиями (27)–(29), (31) в пространстве изображений имеем равенства

$$\frac{F_2(r, p)}{r^2}\bigg|_{r\to\infty} = -\frac{U_2}{2}, \tag{46}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{dF_2}{dr}\right)_{|r\to\infty} = -U_2, \tag{47}$$

$$F_2(r, p)_{|r=R} = 0, \tag{48}$$

$$\frac{dF_2}{dr}\bigg|_{r=R} = \frac{K_{Tsl}\nu}{T_0\sin\theta}\frac{\partial\Theta_2}{\partial\theta}\bigg|_{r=R}, \tag{49}$$

где $U_2 = L\{|\mathbf{u}_2|\}$, $\Theta_{2e} = L\{T_{2e}\}$.

В силу равенств (46) и (48) находим

$$C_2 = 0, \quad D_2 = \frac{\nu}{p\sqrt{R}}\left(\frac{A_2}{R} + B_2R^2\right)K_{3/2}^{-1}\left(R\sqrt{p/\nu}\right). \tag{50}$$

Давление $P_2(r, \theta, t)$ удовлетворяет уравнениям вида (33). Находим, что его изображение $Q_2 = L\{P_2\}$ имеет вид

$$Q_2(r, \theta, p) = \eta\left(\frac{A_2}{r^2} - 2B_2r\right)\cos\theta + Q_{02}(p), \tag{51}$$

где η — коэффициент динамической вязкости, $Q_{02}(p) = Q_2(r, \theta, p)_{|\theta=\frac{\pi}{2}}$.

Найдем изображение $W^{(2)}(p)$ равнодействующей всех зависящих от времени сил, приложенных к элементам сферической частицы в вязком несжимаемом потоке внешней среды. В пространстве изображений оно выражается, согласно [13], в виде интеграла

$$W^{(2)}(p) = \int_0^\pi \left(S_{rr}^{(2)}\cos\theta - S_{r\theta}^{(2)}\sin\theta\right)_{|r=R} 2\pi R^2\sin\theta d\theta,$$

где

$$S_{rr}^{(2)} = -Q_2 + 2\eta\frac{\partial V_r^{(2)}}{\partial r},$$

$$S_{r\theta}^{(2)} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r^{(2)}}{\partial\theta} + \frac{\partial V_\theta^{(2)}}{\partial r} - \frac{V_\theta^{(2)}}{r}\right).$$

Используя выражения (45), (51), с учетом равенств (50), находим

$$W^{(2)} = -4\pi\eta A_2. \tag{52}$$

С другой стороны, использование эффективной массы [3] сферической частицы при ее движении и учет равенства (23) дают

$$W^{(2)} = \frac{4\pi R^3}{3}\left(\rho_i + \frac{\rho_e}{2}\right)pU_2, \tag{53}$$

где ρ_i — плотность вещества сферической частицы.

Из соотношений (52), (53) находим

$$A_2 = -\frac{pU_2}{3\eta}\left(\rho_i + \frac{\rho_e}{2}\right). \tag{54}$$

Оставшуюся неопределенной величину B_2 в выражении (44) можно определить с помощью любого из условий (46), (47), учитывая первое из равенств (50):

$$B_2 = \frac{pU_2}{2\nu}. \tag{55}$$

В силу найденных выражений (50), (54), (55) имеем

$$F_2(r, p) = \frac{U_2}{6\rho_e r}\Big[R^3(2\rho_i + \rho_e) - 3\rho_e r^3 + 2(\rho_e - \rho_i)Rr\sqrt{Rr}K_{3/2}^{-1}\left(R\sqrt{p/\nu}\right)K_{3/2}\left(r\sqrt{p/\nu}\right)\Big].$$

С учетом последнего выражения условие (49) можно представить в виде

$$U_2 = -K_{Tsl}\frac{\nu}{T_0R\sin\theta}F_U(p)\frac{\partial\Theta_{2e}}{\partial\theta}\bigg|_{r=R}, \tag{56}$$

где

$$F_U(p) = \frac{6\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu p}\right)}{2R^2(\rho_e - \rho_i)p + 9\rho_e(\nu + R\sqrt{\nu p})}. \tag{57}$$

Тепловая задача

Дифференциальные уравнения (6), (7), которым удовлетворяют распределения температур во внешней газовой среде $T_e(r, \theta, t)$ и внутри твердой частицы $T_i(r, \theta, t)$, являются уравнениями теплопроводности одного вида. Поэтому рассмотрим решение дифференциального уравнения этого вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta_{r\theta}T, \tag{58}$$

где $T = T(r, \theta, t)$. В соответствии с равенствами (12), (13), (15), (16), (18) и (19) полагаем

$$T(r, \theta, t) = T_1(r, \theta) + T_2(r, \theta, t), \tag{59}$$

$$T(r, \theta, t)_{|t=0} = T_1(r, \theta),$$

следовательно,

$$T_2(r,\theta,t)_{|t=0}=0. \tag{60}$$

Очевидно, что если функции $T_1(r,\theta)$, $T_2(r,\theta,t)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\Delta_{r\theta}\,T_1=0, \tag{61}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}=a\Delta_{r\theta}\,T_2 \tag{62}$$

соответственно, то их сумма (59) будет решением дифференциального уравнения (58).

Общее решение уравнения (61) имеет вид [9]

$$T_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta),$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полином Лежандра порядка n; A_n, B_n — произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи. При определении их значений будем рассматривать отдельно температуры внутри частицы $T_{1i}(r,\theta)$ и вне ее $T_{1e}(r,\theta)$. В силу ограниченности температуры внутри частицы для ее распределения имеем $B_n=0$. Для определения значений всех остальных постоянных величин используем соответствующие граничным условия, получаемые в силу предположения о том, что при $t=0$ имеет место стационарный случай термофореза. Из условия (10) при $t=0$ получаем

$$T_{1e}=T_0+|(\nabla T_{1e})_\infty|\,r\cos\theta, \tag{63}$$

где T_0 обозначает температуру в точке, совпадающей с центром частицы, но ее первоначально принимаем за температуру среды, будто там нет частицы. Из граничных условий (8), (9) при $t=0$ в силу равенств (15), (16) имеем

$$T_{1i}(r,\theta)_{|r=R}=T_{1e}(r,\theta)_{|r=R}, \tag{64}$$

$$\kappa_i\,\frac{\partial T_{1i}}{\partial r}_{|r=R}=\kappa_e\,\frac{\partial T_{1e}}{\partial r}_{|r=R}. \tag{65}$$

Граничные условия (63)–(65) с использованием свойств ортогональности полиномов Лежандра, т. е. равенств

$$\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\delta_{nm}$$

$$(n,m=0,1,2,\ldots), \tag{66}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера, позволяют определить все оставшиеся произвольные постоянные. С учетом значений всех величин A_n, B_n получаем

$$T_{1i}=T_0+\frac{3\kappa_e}{\kappa_i+2\kappa_e}\,|(\nabla T_{1e})_\infty|\,r\cos\theta,$$

$$T_{1e}=T_0+\left[1+\frac{R^3(\kappa_e-\kappa_i)}{r^3(\kappa_i+2\kappa_e)}\right]|(\nabla T_{1e})_\infty|\,r\cos\theta. \tag{67}$$

Используя выражение (67), соотношение (41) приведем к виду

$$|\mathbf{u}_1|=\frac{2K_{Tsl}\nu\kappa_e}{T_0(\kappa_i+2\kappa_e)}\,|(\nabla T_{1e})_\infty|.$$

Так как $\mathbf{u}_{1T}=-\mathbf{u}_1$, то

$$\mathbf{u}_{1T}=-\frac{2K_{Tsl}\nu\kappa_e}{T_0(\kappa_i+2\kappa_e)}\,(\nabla T_{1e})_\infty. \tag{68}$$

Полученная формула совпадает с известной формулой для скорости стационарного термофореза твердой сферической частицы [2].

Рассмотрим уравнение (62). Его решение будем искать в виде произведения

$$T_2(r,\theta,t)=\Phi(\theta)\,h(r,t), \tag{69}$$

т. е. используем метод разделения переменных (метод Фурье) [9]. Из уравнения (62) с помощью постоянной разделения λ получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Phi}{d\theta}\right)+\lambda\Phi=0, \tag{70}$$

$$\frac{r^2}{a}\,\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial h}{\partial r}\right)+\lambda h=0. \tag{71}$$

Решая уравнение (70), находим собственные значения $\lambda=n(n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$, которым соответствуют полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta)$.

Рассмотрим теперь уравнение (71), где $\lambda=n(n+1)$. Из начального условия (60) в силу представления (69) имеем

$$h(r,t)_{|t=0}=0. \tag{72}$$

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение с частными производными (71), применим к нему интегральное преобразование Лапласа вида (42) $L\{h(r,t)\}=H(r,p)$. С учетом начального условия (72) получим в пространстве изображений соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2H}{dr^2}+\frac{2}{r}\,\frac{dH}{dr}-\left[\frac{p}{a}+\frac{n(n+1)}{r^2}\right]H=0. \tag{73}$$

Общее решение этого уравнения выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода $I_{n+1/2}$, $K_{n+1/2}$ [8] следующим образом:

$$H_n(r,p)=\frac{A_n}{\sqrt{r}}\,I_{n+1/2}\big(r\sqrt{p/a}\,\big)+\frac{B_n}{\sqrt{r}}\,K_{n+1/2}\big(r\sqrt{p/a}\,\big),$$

где A_n, B_n — произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи.

Изображение функции (69) представляется произведением функций, т. е.

$$\Theta_2(r,\theta,p)=L\{T_2(r,\theta,t)\}=\Phi(\theta)\,H(r,p).$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения, являющегося изображением уравнения (62), выражается линейной комбинацией произведений частных решений уравнения (70) и (73):

$$\Theta_2(r,\theta,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{A_n}{\sqrt{r}}I_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/a}\right)+\frac{B_n}{\sqrt{r}}K_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/a}\right)\right]P_n(\cos\theta). \quad (74)$$

Линейная комбинация (74) должна выражать изображения

$$\Theta_{2i}(r,\theta,p)=L\{T_{2i}(r,\theta,t)\},\quad \Theta_{2e}(r,\theta,p)=L\{T_{2e}(r,\theta,t)\}$$

распределений нестационарных слагаемых температур внутри и вне частицы. Для первого из них в силу ограниченности температуры внутри частицы и свойства $\left[r^{-1/2}K_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/a}\right)\right]_{|r\to\infty}=\infty$ следует положить $B_n=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$, поэтому

$$\Theta_{2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{\sqrt{r}}I_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/a_i}\right)P_n(\cos\theta). \quad (75)$$

Так как из соотношений (10), (12), (63) следует равенство

$$T_{2e}=|[\nabla T_{2e}(t)]_\infty|\,r\cos\theta,$$

то в пространстве изображений имеем при $r\to\infty$ соответствующее ему равенство

$$\Theta_{2e}=G_\infty(p)\,r\cos\theta, \quad (76)$$

где $G_\infty(p)=L\{|[\nabla T_{2e}(t)]_\infty|\}$. С учетом (76) из разложения (74) получим выражение $\Theta_{2e}=\Theta_{2e}(r,\theta,p)$:

$$\Theta_{2e}=G_\infty(p)r\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{\sqrt{r}}K_{n+1/2}\left(r\sqrt{p/a_e}\right)P_n(\cos\theta). \quad (77)$$

Для определения величин A_n, B_n $(n=0,1,2,\ldots)$ в разложениях (75), (77) используем изображения надлежащих граничных условий. Из граничных условий (8), (9) в силу соотношений (12), (13), (64), (65) имеем равенства

$$T_{2i}(r,\theta,t)_{|r=R}=T_{2e}(r,\theta,t)_{|r=R},$$

$$\kappa_i\,\frac{\partial T_{2i}}{\partial r}_{|r=R}=\kappa_e\,\frac{\partial T_{2e}}{\partial r}_{|r=R}.$$

В пространстве изображений им соответствуют следующие равенства:

$$\Theta_{2i}(r,\theta,p)_{|r=R}=\Theta_{2e}(r,\theta,p)_{|r=R}, \quad (78)$$

$$\kappa_i\,\frac{\partial\Theta_{2i}}{\partial r}_{|r=R}=\kappa_e\,\frac{\partial\Theta_{2e}}{\partial r}_{|r=R}. \quad (79)$$

Учет полученной пары условия (78), (79) для выражений (75), (76) с использованием свойств ортогональности полиномов Лежандра (66) позволяет определить все неизвестные величины A_n, B_n $(n=0,1,2,\ldots)$:

$$A_n=B_n=0\quad (n=0,2,3,\ldots); \quad (80)$$

$$A_1=\kappa_e\sqrt{R}\,G_\infty\left(\frac{3}{2}K_{3/2}-R\sqrt{p/a_e}\,K'_{3/2}\right)\Big/\Delta_1, \quad (81)$$

$$B_1=\sqrt{R}\,G_\infty\left[\left(\kappa_e+\frac{\kappa_i}{2}\right)I_{3/2}-\kappa_iR\sqrt{p/a_i}\,I'_{3/2}\right]\Big/\Delta_1,$$

где

$$\Delta_1=\frac{\kappa_e-\kappa_i}{2R}\,I_{3/2}K_{3/2}-\sqrt{p}\left(\frac{\kappa_e}{\sqrt{a_e}}\,I_{3/2}K'_{3/2}-\frac{\kappa_i}{\sqrt{a_i}}\,I'_{3/2}K_{3/2}\right).$$

Заметим, что во избежание громоздкости формул аргументы модифицированных функций Бесселя $I_{3/2}=I_{3/2}\left(R\sqrt{p/a_i}\right)$, $K_{3/2}=K_{3/2}\left(R\sqrt{p/a_e}\right)$ и их производных опускаем. Из соотношения (77) с учетом равенств (80), (81) получим интересущее нас выражение

$$\frac{\partial\Theta_{2e}}{\partial\theta}_{|r=R}=-R\sin\theta\,F_\Theta(p)\,G_\infty(p), \quad (82)$$

где

$$F_\Theta(p)=\frac{\kappa_eI_{3/2}\left(3K_{3/2}-2R\sqrt{p/a_e}K'_{3/2}\right)}{2R\Delta_1}. \quad (83)$$

Используя выражение (82), формулу (56) приведем к виду

$$U_2=\frac{K_{Tsl}\nu}{T_0}\,F_U(p)\,F_\Theta(p)\,G_\infty(p). \quad (84)$$

Таким образом, в пространстве изображений получена формула для определения нестационарной составляющей термофоретической скорости рассматриваемой частицы.

Анализ формулы для определения нестационарной составляющей термофоретической скорости

Проведем анализ зависимости нестационарной составляющей термофоретической скорости частицы $\mathbf{u}_{2T}(t)$ от строго нестационарной части градиента температуры $[\nabla T_{2e}(t)]_\infty$ для малых и больших значений времени. С этой целью используем теоремы о предельных значениях [7].

Ради упрощения формы записи в дальнейшем часто будем использовать обозначение неотрицательной функции $|[\nabla T_2(t)]_\infty|$ через $g_\infty(t)$. По этой же причине отношение положительных величин κ_i/κ_e будем обозначать одной буквой κ. При этом безразмерную величину κ будем называть относительной теплопроводностью (вещества) частицы.

Применив к формуле (84) теорему о конечном значении с учетом предельных значений выражений (57), (83), при $p \to 0$, получим равенство

$$\lim_{t\to\infty} |\mathbf{u}_{2T}(t)| = \frac{2K_{Tsl}\nu}{T_0(\kappa+2)} \lim_{t\to\infty} g_\infty(t), \quad (85)$$

справедливое при любом соотношении между ρ_e, ρ_i. В силу этого равенства имеем

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{u}_{2T}(t) = -\frac{2K_{Tsl}\nu}{T_0(\kappa+2)} \lim_{t\to\infty} [\nabla T_{2e}(t)]_\infty. \quad (86)$$

Отметим, что формулы (68) и (86) описывают одинаковую зависимость стационарных и строго нестационарных величин скорости и градиента температуры.

В дальнейшем, рассматривая пределы при $p \to \infty$, приходится различать случаи $\rho_e - \rho_i \neq 0$, $\rho_e - \rho_i = 0$. Дело в том, что функция (57), существенно зависящая от p при $\rho_e - \rho_i \neq 0$, тождественно равна постоянной величине при $\rho_e - \rho_i = 0$. Так как $\lim\limits_{p\to\infty} F_\Theta(p) = \left(1 + \kappa\sqrt{a_e/a_i}\,\right)^{-1}$, то применив к соотношению (84) при $\rho_e - \rho_i = 0$ теорему о начальном значении, получим следующее предельное равенство:

$$\lim_{t\to 0} |\mathbf{u}_{2T}(t)| = \frac{2K_{Tsl}\nu}{3T_0(1+\kappa\sqrt{a_e/a_i}\,)} \lim_{t\to 0} g_\infty(t). \quad (87)$$

Если $\rho_e - \rho_i \neq 0$, то рассматриваем преобразованное выражение правой части соотношения (84)

$$U_2 = \frac{K_{Tsl}\nu}{T_0} \left[\sqrt{p}\, F_U(p)\right] F_\Theta(p) \left[\frac{1}{\sqrt{p}}\, G_\infty(p)\right].$$

Применив к нему теорему о начальном значении, находим

$$\lim_{t\to 0} |\mathbf{u}_{2T}(t)| = \frac{3K_{Tsl}\rho_e\nu\sqrt{\nu}}{T_0|\rho_e - \rho_i|(1+\kappa\sqrt{a_e/a_i})} \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, g_\infty(t)\right]. \quad (88)$$

Отметим, что в обеих частях соотношения (88) рассматриваются пределы неотрицательных величин. Равенство (88) возможно только тогда, когда разность плотностей ρ_e, ρ_i берется по абсолютной величине.

Выясним асимптотическое соотношение, существующее между функциями $|\mathbf{u}_{2T}(t)|$ и $g_\infty(t)$. Из равенства (85) имеем, что эти функции при $t \to \infty$ асимптотически пропорциональны, или, допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что нестационарная составляющая термофоретической скорости сферической частицы и строго нестационарный градиент температуры имеют один и тот же порядок при больших значениях времени (независимо от соотношения между ρ_e, ρ_i). Равенство (87), справедливое при $\rho_e - \rho_i = 0$, позволяет заключить, что функции $|\mathbf{u}_{2T}(t)|$, $g_\infty(t)$ при $t \to 0$ имеют один и тот же порядок, если $\rho_e - \rho_i = 0$.

При $\rho_e - \rho_i \neq 0$ имеет место равенство (88), следовательно, $|\mathbf{u}_{2T}(t)|$ является функцией более высокого порядка малости, чем $g_\infty(t)$ при $t \to 0$. Отметим, что если, например, $g_\infty(t)$ является бесконечно малой порядка n при $t \to 0$, то $|\mathbf{u}_{2T}(t)|$ будет бесконечно малой порядка $q = 1 + \frac{1}{2n}$ относительно $g_\infty(t)$.

Предельные равенства (85)–(88) дают информацию также о факторах, влияющих на величину скорости $\mathbf{u}_{2T}(t)$ при больших и малых значениях времени. Из формулы (86) следует, что при больших значениях времени нестационарная составляющая термофоретической скорости частицы определяется не только строго нестационарным градиентом температуры, но также зависит от величины относительной теплопроводности частицы. Если рассматривать две одиночные сферические частицы, относительные теплопроводности которых κ_1, κ_2 различны и $\kappa_1 < \kappa_2$, то, согласно формуле (86), при одном и том же градиенте температуры $[\nabla T_{2e}(t)]_\infty$ для больших значений времени нестационарная составляющая термофоретической скорости первой сферы будет больше аналогичной величины для второй сферы. Равенства (87) и (88) показывают, что при малых значениях времени величина $\mathbf{u}_{2T}(t)$ существенно зависит как от соотношения между ρ_e, ρ_i, так и от значения величины $\kappa\sqrt{a_e/a_i}$.

Заключение

Построенная выше теория может служить основой для получения удобных формул для вычисления нестационарной составляющей термофоретической скорости твердой сферической частицы в вязкой газовой среде. Нами подробно исследован нестационарный термофорез в случае, когда строго нестационарный градиент температуры задан аналитическим выражением, таким, что с возрастанием времени этот градиент стремится к постоянному вектору. При этом использованы различные асимптотические приближения функции (83) из пространства изображений.

Список литературы

[1] *Фукс Н.А.* Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 352 с.

[2] *Яламов Ю.И., Галоян В.С.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.

[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 736 с.

[4] *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.

[5] *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 631 с.

[6] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

[7] *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.

[8] *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.

[9] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, Наука, 2004. 798 с.