01

Вычисление квазистационарного поля в слоистой среде

© И.А. Конников

(Поступило в Редакцию 24 июля 2006 г.)

Предложен метод вычисления поля единичного точечного заряда в слоистой среде. Метод приводит к простым формулам для расчета потенциала. Решение задачи базируется на свойствах функций Бесселя и Струве. Результаты могут быть использованы для решения широкого класса задач, использующих метод функции Грина.

PACS: 1.02.30.Em

Решение уравнения Лапласа для потенциалов электрического и магнитного полей требуется для многих технических приложений [1]. В данной работе предлагается метод расчета потенциала поля в слоистой среде, в значительной степени свободный от недостатков традиционного метода.

Решение дифференциального уравнения Лапласа для потенциала единичного элементарного источника поля в слоистой среде (т.е. функция Грина), как известно [1,2], описывается формулой

$$G = K\int_0^\infty J_0(\lambda r)\Phi_\iota(\lambda, z - z_0)d\lambda, \qquad (1)$$

где $K = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ при расчете электростатического потенциала и $K = \mu_0/(4\pi)$ при решении магнитостатической задачи; ε_0, μ_0 — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства соответственно; J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; r — радиус в цилиндрической системе координат; $z - z_0$ — разность аппликат источника поля и точки, где вычисляется поле; функция $\Phi_\iota(\lambda, z - z_0)$ определяется из граничных условий. Метод получения аналитического выражения для функции $\Phi_\iota(\lambda, z - z_0)$ в строгом классическом варианте изложен в [1,2], соответствующая инженерная методика приведена в [3].

Для любой плоскости $z = z_0$ функция $\Phi_\iota(\lambda, z - z_0) = \Phi(\lambda)$ представляет собой дробно-рациональную функцию экспонент [3], поэтому несобственный интеграл (1) выражается через первообразные только в простейших случаях. Известные способы его приближенного вычисления основаны на использовании формулы Вебера–Липшица

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\exp(-\lambda\tau)d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2+\tau^2}} \quad (\tau \geqslant 0). \qquad (2)$$

Для этого функция $\Phi(\lambda)$ аппроксимируется экспоненциальным полиномом

$$\Lambda(\lambda) = \sum_{\upsilon=0}^{\Upsilon} B_\nu \exp(-\lambda\tau\upsilon). \qquad (3)$$

Выражение (3) подставляется в (1), и тогда с учетом соотношения (2) формула (1) для функции Грина упрощается

$$G(r) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\upsilon=0}^{\Upsilon}\frac{B_\upsilon}{\sqrt{r^2+(\upsilon\tau)^2}}. \qquad (4)$$

Здесь B_υ — коэффициенты аппроксимации.

Приближенные выражения для функции Грина вида (4), полученные с использованием тождества Вебера–Липшица, обладают тремя неустранимыми недостатками. Во-первых, интегралы этих выражений по объему источника поля с весом, равным плотности заряда, нередко через первообразные не выражаются и, в лучшем случае, могут быть представлены весьма громоздкими выражениями [3]. Во-вторых, в отсутствие методов точного вычисления интеграла (1) оценку погрешности его приближенного вычисления можно проводить лишь по внутренней сходимости; такая оценка не всегда надежна и не всегда возможна. В-третьих, как показывает вычислительный эксперимент с использованием предлагаемого ниже метода, при традиционном методе вычислений, предполагающем аппроксимацию функции $\Phi(\lambda)$ суммой экспонент и использование формулы Вебера–Липшица, погрешность расчета функции Грина существенно зависит от расстояния r и при его увеличении растет.

Необходим новый метод, позволяющий лучше контролировать точность вычислений и приводящий к простым выражениям для функции Грина, дающим приемлемую погрешность в заданном интервале изменения расстояния r. Такой метод предлагается ниже.

Представим выражение (1) в виде

$$G = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(I_1 + I_2),$$

где $I_1 = \int_0^\beta J_0(\lambda r)\Phi(\lambda)d\lambda$; $I_2 = \int_\beta^\infty J_0(\lambda r)\Phi(\lambda)d\lambda$; β — произвольный предел интегрирования, выбираемый из условия

$$\Phi(\beta) \approx \Phi(\infty). \qquad (5)$$

Учитывая монотонный характер изменения функции $\Phi(\lambda)$, условие (5) может быть выполнено с любой требуемой степенью точности, ограниченной лишь

Нули Θ-функции

№ п/п	Нули θ_κ
1	1.108464661
2	4.062644472
3	7.151557848
4	10.269381067
5	13.397636191
6	16.530742102
7	19.666476075
8	22.803787326
9	25.942117194
10	29.081142112
11	32.220662040
12	35.360546791
13	38.500708053
14	41.641083834
15	44.781629355

особенностями языка программирования и техническими возможностями компьютера, тогда

$$I_2 \approx \Phi(\infty) \int\limits_{\beta}^{\infty} J_0(\lambda r) d\lambda = \Phi(\infty)\Theta(\beta r), \qquad (6)$$

где аналитическое выражение функции $\Theta(\beta r)$ имеет вид

$$\Theta(\beta r) = 1 - \beta r J_0(\beta r) + \frac{\pi \beta r}{2}\left[J_0(\beta r)H_1(\beta r) - J_1(\beta r)H_0(\beta r)\right]. \quad (7)$$

В выражении (7) J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν; H_ν — функция Струве порядка ν; $\nu = 0, 1$ [4]. Функция $\Theta(\beta r)$ имеет колебательный характер и знакопеременна. Первые нули θ_κ $(\kappa = \overline{1, 15})$ этой функции представлены в таблице.

При вычислении нулей с помощью выражения (7) функции Бесселя рассчитывались по интегральной формуле Бесселя, функции Струве — по интегральной формуле Пуассона [5]. Указанные интегральные представления хорошо верифицированы и допускают простой контроль погрешности. Для снижения влияния погрешности округления все вычисления проводились с учетом 32 десятичных знаков мантиссы каждого операнда. При численном интегрировании использовалась квадратурная формула Гаусса для трех узлов [6], причем для снижения влияния методической погрешности интервал интегрирования был разбит на 10^4 шагов. При таком способе вычислений результат содержит по меньшей мере 11 верных десятичных знаков.

Для выбора предела интегрирования интеграла I_2 при заданной относительной погрешности (невязке) δ_Φ равенства (5) необходимо решить относительно β уравнение $1 - \Phi(\beta)/\Phi(\infty) = \delta_\Phi$. Соотношение (5) обеспечивается любым пределом интегрирования $\beta_\kappa \in [\beta, \infty]$. Определяемый по таблице для заданного расстояния r ближайший больший нуль Θ-функции $\theta_\kappa \geqslant \beta r$ соответствует значению предела $\beta_\kappa = \theta_\kappa / r \geqslant \beta$, а β_κ заведомо обеспечивает соотношение (5). При выбранном $\theta_\kappa \geqslant \beta r$ предел β_κ всегда обеспечивает равенство $I_2 = 0$ с требуемой точностью и тогда функция Грина

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^{\beta_\kappa} J_0(\lambda r)\Phi_\iota(\lambda) d\lambda. \qquad (8)$$

Вычисление интеграла в (8) не представляет принципиальных трудностей при численном интегрировании. Погрешность приближенных квадратурных формул хорошо изучена. Значение функции Грина в произвольной точке на плоскости $z = z_0$ может быть рассчитано по формуле (8) с любой требуемой точностью (в пределах возможностей компьютера). Это позволяет полученное с помощью формулы (8) значение условно считать точным.

Функция Грина $G(r)$ в интегральном представлении (8) — неотрицательная монотонно спадающая функция, имеющая, как хорошо известно, особенность [1] при $r = 0$. Чтобы упростить выражение (8), представим его в виде:

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ r \Big[\int\limits_0^{\beta_\kappa} J_0(\lambda r)\Phi(\lambda) d\lambda \Big] \Big/ r \right\}. \qquad (9)$$

Заключенное в квадратные скобки выражение в (9) особенностей не имеет; оно является функцией расстояния r и может быть аппроксимировано в базисе функций Чебышева первого рода переменной $p = (r/r_{\max})^2$ на интервале [0,1] по методике [6] так, чтобы на краях указанного интервала погрешность аппроксимации была равна нулю

$$I_3(p) = r_{\max}\sqrt{p} \int\limits_0^{\beta_\kappa} J_0(\lambda r_{\max}\sqrt{p})\Phi(\lambda) d\lambda \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{\upsilon=1}^{\Upsilon} A_\upsilon T_\upsilon\big[(2p - a - b)/(b - a)\big], \qquad (10)$$

где Υ — старшая степень аппроксимирующего полинома; $[0, r_{\max}]$ — интервал изменения переменой r; T_υ — функция Чебышева первого рода степени υ;

$$A_\upsilon = \frac{2}{\Upsilon + 1} \sum_{j=0}^{\Upsilon} I_3(p_j) \cos\frac{(2j+1)\upsilon\pi}{2\Upsilon + 2} \quad (\upsilon = \overline{0, \Upsilon});$$

$$p_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2j+1}{2\Upsilon+2} \quad (j = \overline{0, \Upsilon});$$

$$a = \frac{1 - \cos\alpha_0}{\cos\alpha_\Upsilon - \cos\alpha_0}; \qquad b = \frac{1 + \cos\alpha_0}{\cos\alpha_0 - \cos\alpha_\Upsilon};$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2\Upsilon + 2}; \qquad \alpha_\Upsilon = \frac{(2\Upsilon + 1)\pi}{2\Upsilon + 2}.$$

После приведения подобных членов выражение (10) для I_3 привет вид

$$I_3(p) = D_0 + \sum_{\upsilon=1}^{\Upsilon} D_\upsilon p^\upsilon,$$

где D_υ — коэффициенты аппроксимации; $(\upsilon = \overline{0, \Upsilon})$. Теперь представим выражение (8) в виде

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\int\limits_0^{\beta_\kappa} J_0(\lambda r)\Phi(\lambda)d\lambda - D_0/r\right] + D_0/r\right\}.$$

Легко убедиться, что в последней формуле заключенное в квадратные скобки выражение особенностей не имеет; оно может быть аппроксимировано отрезком степенного ряда по четным степеням r так же, как это сделано для I_3, и приведено к виду

$$G(r) \approx \frac{D_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\upsilon=0}^{\Upsilon} E_\upsilon r^{2\upsilon}, \qquad (11)$$

где E_υ — коэффициенты аппроксимации; $(\upsilon = \overline{0, \Upsilon})$.

Это выражение гораздо более „физично“, чем (8): первое слагаемое в (11) с точностью до множителя D_0 имеет физический смысл функции Грина для свободного пространства, второе слагаемое — поправка, учитывающая отличие электрофизических свойств слоистой среды от свойств свободного пространства. Кроме того, форма представления функции Грина (11) позволяет существенно снизить объем вычислений по сравнению с (3) и (8). Интегрирование выражения (11) по объему источника поля с весом, равным плотности заряда, выполнить гораздо легче, чем интегрирование (3) и (8), и конечные выражения получаются проще.

Корректность метода подтверждена вычислительным экспериментом. Формулы (8) и (11) могут быть использованы для прямых расчетов потенциала в слоистой среде, а также служить основой для модификации основанных на использовании функции Грина методов решения широкого класса задач.

Список литературы

[1] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

[2] *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. М.: Физматгиз, 1963. 432 с.

[3] *Конников И.А.* // Судостроение. 1980. № 8. С. 32–33.

[4] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971. 1108 с.

[5] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

[6] *Корн А.Г., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. СПб.: Лань, 2003. 831 с.