01;04;10;12

Динамика плоских аксиально-симметричных самосогласованных движений электронов заряженной плазмы в магнитном поле

© В.А. Федоров

Радиотехнический институт им. акад. А.Л. Минца,
125083 Москва, Россия
e-mail: f_v99@mail.ru

(Поступило в Редакцию 2 августа 2006 г.)

Исследована динамика плоских аксиально-симметричных самосогласованных движений электронов пучка, имеющего форму цилиндра. Движение электронов пучка происходит под действием электрической силы нескомпенсированного собственного объемного заряда на фоне ионов плазмы или в вакууме при наличии магнитного поля. Определено изменение напряженности электрического поля, скорости и концентрации электронов пучка в зависимости от пройденного расстояния.

PACS: 52.25.Fi

1. Изучение динамики электронных потоков представляет большой интерес для различных задач, возникающих при построении теории радиофизических устройств, формировании и транспортировке пучков электронов в плазме и вакууме, инжекции пучков электронов в плазму в лабораторных условиях и в космосе (активные эксперименты) и т.д. [1,2]. Причем в данных приложениях электронные потоки обычно бывают нескомпенсированными по объемному заряду. Благодаря этому плазма становится заряженной [3], а появляющиеся силы начинают зависеть от геометрии потока. Эти обстоятельства приводят к тому, что возникающее электрическое поле становится самосогласованным. В дальнейшем будем исследовать динамику плоских аксиально-симметричных самосогласованных движений электронов цилиндрического пучка под действием электрической силы нескомпенсированного собственного объемного заряда на фоне ионов плазмы или в вакууме при наличии однородного магнитного поля.

Задачу о динамике электронов пучка, используя цилиндрическую систему координат, сформулируем следующим образом. Пусть при $t \leq 0$, пучок электронов представляет собой бесконечный цилиндрический объем V_0, имеющий радиус R_0 и находящийся в неограниченной плазме с однородным магнитным полем $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z$, $H_0 = \text{const}$. Расположим ось объема V_0 вдоль вектора $\mathbf{H}$ и будем считать, что электроны плазмы „выметены“ из V_0 и его окрестности, так как для $t \leq 0$ положим $n_e/n_i > 1$, где $n_{e,i}$ — концентрация электронов пучка (далее электроны) и ионов плазмы соответственно, а ионы плазмы неподвижны, т.е. бесконечно тяжелые. Примем, что объем V_0 ограничен непроницаемым барьером для электронов, например в виде поля (электрического, электромагнитного и т.д.).

В момент времени $t = 0$ поле, удерживающее электроны в объеме V_0, мгновенно убирается, и они начинают движение, которое будем исследовать в плоскости $z = 0$, учитывая, что $\partial/\partial\varphi \equiv 0$, так как система аксиально-симметрична. Для этого используем систему уравнений одножидкостного гидродинамического приближения холодной бесстолкновительной плазмы [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_e + \mathbf{v}_e(\nabla\mathbf{v}_e) = \frac{e}{m_e}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_e \times \mathbf{H}]\right), \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi e(n_e - n_i), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -4\pi e n_e \mathbf{v}_e. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{E}(R, t)$ — вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{v}_e(R, t)$ — вектор скорости; $n_e(R, t)$ — концентрация электронов; $\mathbf{R}$ — радиус вектор точки пространства; e, m_e — заряд и масса электрона.

В качестве начальных условий системы уравнений (1)–(3) для $t = 0$ зададим [5]

$$v_{eR}(R_*, 0) = 0, \qquad v_{e\varphi}(R_*, 0) = 0,$$

$$n_e(R_*, 0) = n_e^0 f_e(R_*, 0), \quad n_i(R_*, 0) = n_i^0 f_i(R_*, 0). \tag{4}$$

Здесь $0 \leq R_* \leq R_0$, R_0 — длина отрезка $[0,R_0]$, на котором задано начальное распределение функций или начальная координата фронта электронов, v_{eR} и $v_{e\varphi}$ — составляющие вектора скорости частицы, $n_e^0 = n_i^0 = \text{const}$, $f_e(R_*, 0)/f_i(R_*, 0) > 1$ — функции, задающие распределения $n_{e,i}(R_*, 0)$. Отметим, что зависимость $E_R(R_*, 0)$ в (4) не приведена, так как будет найдена из решения задачи. Граничные условия на неподвижной границе (ось симметрии) имеют вид

$$E_R(0, t) = 0, \quad E_\varphi(0, t) = 0,$$

$$v_{eR}(0, t) = 0, \quad v_{e\varphi}(0, t) = 0,$$

$$n_e(0, t) = n_e^0 f_e(0, t), \quad n_i(0, t) = n_i^0 f_i(0, t), \tag{5}$$

а на подвижной границе и ее положение в пространстве определяются при решении задачи [5].

2. Пусть для электронов выполнены условия

$$l \gg R_c \geq L \gg R_0. \tag{6}$$

Здесь l — длина свободного пробега электронов, $R_c = |v_{e\perp}/\Omega|$ — циклотронный радиус, $v_{e\perp}$ — скорость электронов в плоскости $z = 0$, $\Omega = eH_0/m_e c$, c — скорость света, L — характерный размер системы. Первое неравенство в (6) позволяет считать плазму бесстолкновительной и при исследовании движения заряженных частиц рассматривать их как независимые [6], а второе неравенство в (6) показывает, что R_c возмущен L. Следовательно, электроны в данных условиях не замагничены [6]. Решение задачи проведем на интервале $0 \le t \le t_r$, где t_r — момент времени, когда $v_{eR} = 0$, чтобы не возникали обратные токи, и не было пересечения траекторий частиц. В противном случае применение гидродинамики будет несправедливым.

Так как вектор-потенциал магнитного поля равен $A_R = A_z = 0$, $A_\varphi = (H_0/2)R$, а вектор напряженности и скалярный потенциал электрического поля можно представить в виде $\mathbf{E}(R) = E(R)\mathbf{e}_R$, $U = -e\int E(R)dR$, то функция Лагранжа электрона запишется следующим образом:

$$L = \frac{m_e}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) + \frac{eH}{2c}R^2\dot{\varphi} - e\int E(R)dR. \qquad (7)$$

Данная функция явно не зависит от φ, z, t, что приводит к трем первым интегралам

$$p_\varphi = m_e R^2\dot{\varphi} + \frac{eH_0}{2c}R^2 = 0, \qquad (8)$$

$$p_z = 0, \qquad (9)$$

$$E_0 = \frac{m_e}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) - e\int E(R)dR = \text{const}. \qquad (10)$$

Здесь p_φ — обобщенный импульс, p_z — импульс по оси z, E_0 — сумма кинетической и потенциальной энергии. Заметим, что в выражениях (8)–(10) учтены начальные условия (4).

Используя (8)–(10), найдем

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = v_{eR}(R_*, R) = \sqrt{\frac{2}{m_e}(E_0 - U_{\text{eff}})}, \qquad (11)$$

$$U_{\text{eff}} = -e\int E(R)dR + \frac{M_z^2(R)}{2m_e R^2}, \qquad (12)$$

где U_{eff} — эффективный потенциал, $M_z(R) = -(eH_0/2c)R^2$. Из (11) имеем второй интеграл

$$t(R_*, R) = \pm\int \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{m_e}(E_0 - U_{\text{eff}})}}, \qquad (13)$$

а учитывая закон сохранения p_φ, найдем

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega = -\frac{\Omega}{2}. \qquad (14)$$

Исключив dt из выражения (13) с помощью (11), получим еще один второй интеграл

$$\varphi(R_*, R) = \pm\frac{\Omega}{2}\int \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{m_e}(E_0 - U_{\text{eff}})}}. \qquad (15)$$

Используя выражение (12), найдем условия финитности движения электронов [7]. Положим $E_R(R) = \gamma R^\alpha$, где $\gamma = \text{const} < 0$, так как $v_{eR}(R_*, t \approx 0) > 0$, $\alpha = \text{const}$ и представим U_{eff} в виде

$$U_{\text{eff}} = -e\frac{\gamma}{\alpha+1}R^{\alpha+1} + \frac{m_e}{8}\Omega^2 R^2. \qquad (16)$$

Примем, что в (16) $e\gamma > 0$. Если $\alpha < 1$, то, устремляя в (16) $R \to \infty$, найдем $\lim\limits_{R\to\infty} U_{\text{eff}} \to \infty$. Следовательно, в данном случае движение электронов финитно. Если $\alpha = 1$, то из (16) имеем

$$\lim_{R\to\infty} U_{\text{eff}} \to \begin{cases} +\infty, & -\frac{e\gamma}{2} + \frac{m_e}{8}\Omega^2 > 0, \\ -\infty,\ 0 & -\frac{e\gamma}{2} + \frac{m_e}{8}\Omega^2 \le 0. \end{cases} \qquad (17)$$

При $\alpha = 1$ и выполнении верхнего неравенства в (17) движение электронов финитно, а нижнего — инфинитно. Пусть $\alpha > 1$, тогда из (16) получим, что $\lim\limits_{R\to\infty} U_{\text{eff}} \to -\infty$, т. е. движение инфинитно.

3. Положим, что $f_i(R_*, 0) = 1$, т. е. $n_i(R_*, t) = n_i^0$ (равномерное распределение $n_i(R_*, 0)$). Интегрируя по координатам φ и R цилиндрического объема V единичной высоты, содержащего электроны и ионы, в пределах от 0 до 2π и от 0 до R соответственно, где координатой R обозначено конечное положение подвижной границы объема V, имеющей при $t = 0$ координату R_*, с использованием теоремы Гаусса получим

$$E_R(R, t) = \frac{m_e}{e}\left[\frac{4\pi e^2}{m_e}\frac{\Psi(R, t)}{2\pi}\frac{1}{R} - \frac{\omega_0^2}{2}R\right]. \qquad (18)$$

Здесь $\Psi(R, t) = 2\pi\int\limits_0^R n_e(R, t)RdR$ — функция, соответствующая массовой переменной Лагранжа [8], определяющая в данном случае число электронов и их заряд $Q = e\Psi$ в объеме V, $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_e^0/m_e$.

Примем, что слои электронов перемещаются в радиальном направлении без обгонов. Тогда число электронов в цилиндрическом объеме единичной высоты, задаваемого координатами $[0, R_*(0)]$ и $[0, R(t)]$, где $R_*(0)$, $R(t)$ — начальное и конечное положение подвижной границы объема, не меняется с течением времени [8], поэтому запишем следующее равенство:

$$2\pi\int\limits_0^R n_e(R, t)RdR = 2\pi\int\limits_0^{R_*} n_e(R_*, 0)R_* dR_*. \qquad (19)$$

Таким образом, учитывая (19), формулу (18) представим в виде

$$E_R(R_*, R) = \frac{m_e}{e}\left[\frac{C(R_*)}{R} - \frac{\omega_0^2}{2}R\right], \qquad (20)$$

где $C(R_*) = \omega_0^2\int\limits_0^{R_*} f_e(R_*, 0)R_* dR_*$. Используя выражения (20), (16), (17), можно показать, что исследуемые движения электронов финитны как при $n_i(R_*, 0) \neq 0$, так и при $n_i(R_*, 0) = 0$.

Исходя из уравнения (1) получим уравнения движения в переменных Лагранжа

$$\frac{\partial V_{eR}}{\partial t} - \frac{1}{R}\, v_{e\varphi}^2 = \frac{e}{m_e}\, E_R + \Omega v_{e\varphi}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial v_{e\varphi}}{\partial t} + \frac{1}{R}\, v_{eR} v_{e\varphi} = -\Omega v_{eR}. \tag{22}$$

Учитывая выражение (20) и начальные условия (4), из (21), (22) найдем

$$v_{eR}(R_*, R) = \sqrt{2C(R_*)\ln\frac{R}{R_*} - R_*^2\frac{\Omega^2}{4}\left(\frac{R^2}{R_*^2} - 1\right)\left(1 - \frac{R_*^2}{R^2} + 2\,\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)}, \tag{23}$$

$$v_{e\varphi}(R_*, R) = -\frac{\Omega}{2}\, R\left(1 - \frac{R_*^2}{R^2}\right). \tag{24}$$

Так как $v_{eR} = dR/dt$, то из (23) следует

$$t(R_*, R) = \pm\int\limits_{R_*}^{R} \frac{dR}{\sqrt{2C(R_*)\ln\frac{R}{R_*} - R_*^2\frac{\Omega^2}{4}\left(\frac{R^2}{R_*^2} - 1\right)\left(1 - \frac{R_*^2}{R^2} + 2\,\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)}}. \tag{25}$$

Записав уравнение (2) в переменных Лагранжа и используя выражения (20), (25), найдем

$$n_e(R_*, R) = n_i^0 + \frac{1}{4\pi e}\left(\frac{E}{R} + \frac{\partial E}{\partial R} - \frac{\partial E}{\partial R_*}\,\frac{\partial t/\partial R}{\partial t/\partial R_*}\right). \tag{26}$$

Подставив выражение (25) в (15), получим

$$\varphi(R_*, R) = \pm\frac{\Omega}{2} \int\limits_{R_*}^{R} \frac{dR}{\sqrt{2C(R_*)\ln\frac{R}{R_*} - R_*^2\frac{\Omega^2}{4}\left(\frac{R^2}{R_*^2} - 1\right)\left(1 - \frac{R_*^2}{R^2} + 2\,\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)}}. \tag{27}$$

4. Примем, что $f_e(R_*, 0) = \mu = \mathrm{const} > 1$ (μ — коэффициент зарядовой нейтрализации [3]) и определим параметры движения фронта электронов пучка. Полагая в выражении (20) $R_* = R_0$ и приравняв его нулю, найдем расстояние, где $E_R(R_0) = 0$

$$R\,(E_R(R_0) = 0) = R_0\sqrt{\mu}. \tag{28}$$

Разложив функцию $\ln R/R_*$ в выражении (23), в случае $R/R_* \gg 1$ (6), в ряд Тейлора в точке, $a = \mathrm{const} \gg 1$, так как $L \gg R_0$, до приближения первого порядка, т.е. $\ln(R/R_*) \approx \ln a - 1 + (R/R_*)/a$, и приравняв его нулю при $R_* = R_0$, определим расстояние, на котором $v_{eR}(R_0) = 0$,

$$R\big(v_{eR}(R_0) = 0\big) \approx R_0\,\frac{\mu}{a} \times \left[1 + \sqrt{1 + 2(\ln a - 1)\frac{a^2}{\mu}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}\,\right] \Big/ \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right). \tag{29}$$

Из (28), (29) имеем $R(v_{eR}(R_0) = 0) > R(E_R(R_0) = 0)$. Исследовав $v_{eR}(R_0)$ (23) на экстремум, найдем

$$R\big(v_{eR}(R_0)_{\max}\big) = R_0 \times \sqrt{\frac{\mu}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\mu^2}\,\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}\,\right] \Big/ \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}. \tag{30}$$

Зная $R(v_{eR}(R_0) = 0)$ (см. (29)), из условий (6) получим ограничения на размер L в виде

$$R_0 \ll L \le R\big(v_{eR}(R_0) = 0\big). \tag{31}$$

Оценив неравенства (31) по порядку величины, найдем, что они справедливы, если

$$\frac{1}{4\mu}\,\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \ll 1. \tag{32}$$

При этом для $\Omega^2/\omega_0^2 \ll 1$ и $\mu \sim a$ из (29) имеем $R(v_{eR}(R_0) = 0) \sim R_0\sqrt{2\mu\ln a}$, а из (30) $R(v_{eR}(R_0)_{\max}) \approx \approx R_0\sqrt{\mu}$ (см. (28)). Пренебрегая коэффициентом „2“, условие (32) представим как отношение магнитной энергии к собственной энергии электрона

$$\frac{H_0^2}{8\pi m_e c^2} \ll \mu n_e^0. \tag{33}$$

Выражение (33) является количественным критерием незамагниченности электронов в самосогласованных плоских аксиально-симметричных ограниченных движениях на фоне ионов.

Для более подробного изучения характеристик движения электронов запишем формулы (20), (23), (25), когда $f_e(R_*, 0) = \mu$. Имеем

$$E_R(R_*, R) = \omega_0^2\,\frac{m_e}{2e}\,R\left(\mu\,\frac{R_*^2}{R^2} - 1\right), \tag{34}$$

$$v_{eR}(R_*, R) = \omega_0 R_* \times \sqrt{\mu\ln\frac{R}{R_*} - \frac{1}{4}\,\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\left(\frac{R^2}{R_*^2} - 1\right)\left(1 - \frac{R_*^2}{R^2} + 2\,\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)}, \tag{35}$$

$$t(R_*, R) = \pm\frac{1}{\omega_0 R_*} \times \int\limits_{R_*}^{R} \frac{dR}{\sqrt{\mu\ln\frac{R}{R_*} - \frac{1}{4}\,\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\left(\frac{R^2}{R_*^2} - 1\right)\left(1 - \frac{R_*^2}{R^2} + 2\,\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)}}. \tag{36}$$

Интеграл в выражении (36) не представим в аналитическом виде, поэтому рассмотрим его в случаях $R/R_* \approx 1$ и $R/R_* \gg 1$, считая, что $\Omega^2/\omega_0^2 \ll 1$. Для этих же случаев приведем формулы $v_{eR}(R_*, R)$ (32) и $\varphi(R_*, R)$ (27). Если $R/R_* \approx 1$, то, положив $\ln(R/R_*) \approx R/R_* - 1$, получим

$$v_{eR}(R_*, R) \approx \omega_0 R_* \sqrt{(\mu - 1)\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}, \qquad (37)$$

$$t(R_*, R) \approx \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\frac{1}{(\mu - 1)}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}, \qquad (38)$$

$$\varphi(R_*, R) \approx \pm\frac{\Omega}{\omega_0}\sqrt{\frac{1}{(\mu - 1)}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}. \qquad (39)$$

Из рассмотрения (37), (38) и (39) видно, что $v_{eR}(R_*, R) \approx 0, t(R_*, R) \approx 0, \varphi(R_*, R) \approx 0$.

Если $R/R_* \gg 1$, то, приняв $\ln(R/R_*) \approx \ln a - 1 + (R/R_*)/a$, найдем

$$v_{eR}(R_*, R) \approx \omega_0 R_* \sqrt{\mu\left(\ln a - 1 + \frac{1}{a}\frac{R}{R_*}\right) - \frac{1}{2}\frac{R^2}{R_*^2}}, \qquad (40)$$

$$t(R_*, R) \approx \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \times \ln\frac{\frac{R}{R_*} + \frac{\mu}{a} + \sqrt{\frac{R^2}{R_*^2} + 2\mu\left(\ln a - 1 + \frac{1}{a}\frac{R}{R_*}\right)}}{1 + \mu/a + \sqrt{2\mu(\ln a - 1)}}, \qquad (41)$$

$$\varphi(R_*, R) \approx \pm\frac{\Omega}{\sqrt{2\omega_0}} \times \ln\frac{\frac{R}{R_*} + \frac{\mu}{a} + \sqrt{\frac{R^2}{R_*^2} + 2\mu\left(\ln a - 1 + \frac{1}{a}\frac{R}{R_*}\right)}}{1 + \mu/a + \sqrt{2\mu(\ln a - 1)}}. \qquad (42)$$

Пусть $\mu \sim a$. Приравняв (34) и (40) нулю, имеем $R(E_R(R_*) = 0) = R_*\sqrt{\mu}$, $R(v_{eR}(R_*) = 0) \sim R_*\sqrt{2\mu \ln a}$. Полагая в (41) $R = R(v_{eR}(R_0) = 0)$ и $R_* = R_0$, получим интервал времени $0 \le t \le t_r$, когда траектории частиц полученных решений не пересекаются. Здесь $t_r(v_{eR}(R_0) = 0) \sim \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})/\omega_0$.

Подставив последовательно (20), (38) и (20), (41) в (26), определим

$$n_e(R_*, R) \approx \mu n_e^0 \frac{R_*^2}{R^2}. \qquad (43)$$

Таким образом, $n_e(R_*, R)$ имеет одно выражение для $R/R_* \approx 1$ и $R/R_* \gg 1$ (см. (43)), так как отношения частных производных в (26), вычисленные с использованием (38) и (41), совпадают. Из (43) видно, что $n_e(R_*, R)$ падает с расстоянием $\sim 1/R^2$ и не зависит от времени.

5. Исследуем динамику электронов в случае $n_i(R_*, 0) = 0$ (движение в вакууме), $f_e(R_*, 0) = 1$. Учитывая формулы, полученные при $n_i(R_*, 0) \ne 0$, найдем

$$E_R(R_*, R) = \omega_0^2 \frac{m_e}{2e}\frac{R_*^2}{R}, \qquad (44)$$

$$v_{eR}(R_*, R) = \omega_0 R_* \times \sqrt{\ln\frac{R}{R_*} - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\left(\frac{R^2}{R_*^2} - 1\right)\left(1 - \frac{R_*^2}{R^2}\right)}, \qquad (45)$$

$$v_{e\varphi}(R_*, R) = -\frac{\Omega}{2}R_*\left(\frac{R}{R_*} - \frac{R_*}{R}\right), \qquad (46)$$

$$t(R_*, R) = \pm\frac{1}{\omega_0 R_*} \times \int\limits_{R_*}^{R} \frac{dR}{\sqrt{\ln\frac{R}{R_*} - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\left(\frac{R^2}{R_*^2} - 1\right)\left(1 - \frac{R_*^2}{R^2}\right)}}. \qquad (47)$$

Определим параметры движения фронта электронов пучка. Из (44) видно, что $E_R(R_0, R) \sim 1/R$, т.е. $E_R(R_0, R) \ne 0$. Положив в выражении (45) $\ln(R/R_*) \approx \ln a - 1 + (R/R_*)/a (R/R_* \gg 1)$ и приравняв его нулю при $R_* = R_0$, получим расстояние, где $v_{eR}(R_0 = 0)$,

$$R\big(v_{eR}(R_0) = 0\big) \approx R_0\frac{2}{a}\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\left[1 + \sqrt{1 + a^2\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}(\ln a - 1)}\right]. \qquad (48)$$

Подставив (48) в (44), имеем

$$E_R\big(v_{eR}(R_0) = 0\big) \approx \Omega^2\frac{m_e}{e}R_0 a \times \left[1 + \sqrt{1 + a^2\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}(\ln a - 1)}\right]^{-1}. \qquad (49)$$

Исследовав выражение (45) на экстремум при $R_* = R_0$, найдем

$$R(v_{eR}(R_0, R)_{\max}) = R_0\frac{\omega_0}{\Omega}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\Omega^4}{\omega_0^4}}}. \qquad (50)$$

Учитывая $R(v_{eR}(R_0) = 0)$ (см. (48)), из условий (6) получим ограничения на характерный размер системы L в виде $R_0 \ll L \le R(v_{eR}(R_0) = 0)$. Данные неравенства справедливы в случае $\Omega^2/\omega_0^2 \ll 1$. При этом из (50) найдем $R(v_{eR}(R_0)_{\max}) \approx R_0\sqrt{2}\omega_0/\Omega \gg R_0$. Если $a^2\Omega^2/\omega_0^2 \le 1$, то из (48) имеем $R(v_{eR}(R_0) = 0) \sim R_0 2a \ln a \gg R_0$. Отсюда $R(v_{eR}(R_0) = 0)/R(v_{eR}(R_0)_{\max}) = \sqrt{2}a \ln a(\Omega/\omega_0)$. Если $\Omega \to 0$, то $R(v_{eR}(R_0) = 0) \to \infty$, т.е. движение вырождается в одномерное. Ограничение на L сверху запишем в виде отношения магнитной энергии к собственной энергии электрона, которое является количественным критерием незамагниченности электронов в самосогласованных плоских аксиально-симметричных ограниченных движениях в вакууме, т. е.

$$\frac{H_0^2}{8\pi m_e c^2} \ll n_e^0. \tag{51}$$

Из сравнения выражений (33) и (51) видно, что (51) получается из (33), если положить $\mu = 1$.

Интеграл в выражении (47) не представим в аналитическом виде, поэтому рассмотрим его в случаях $R/R_* \approx 1$ и $R/R_* \gg 1$, учитывая, что $\Omega^2/\omega_0^2 \ll 1$. Для этих же случаев приведем формулы $v_{eR}(R_*, R)$ (45) и $\varphi(R_*, R)$ (27). Если $R/R_* \approx 1$, то, положив $\ln(R/R_*) = R/R_* - 1$, получим

$$v_{eR}(R_*, R) \approx \omega_* R_* \sqrt{(\frac{R}{R_*} - 1)}, \tag{52}$$

$$t(R_*, R) \approx \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}, \tag{53}$$

$$\varphi(R_*, R) \approx \pm \frac{\Omega}{\omega_0} \sqrt{\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}. \tag{54}$$

Из рассмотрения (52), (53) и (54) видно, что $v_{eR}(R_*, R) \approx 0$, $t(R_*, R) \approx 0$, $\varphi(R_*, R) \approx 0$.

Если $R/R_* \gg 1$, то принимая $\ln(R/R_*) \approx \approx \ln a - 1 + (R/R_*)/a$, имеем

$$v_{eR}(R_*, R) = \omega_0 R_* \sqrt{\ln a - 1 + \frac{1}{a}\frac{R}{R_*} - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\frac{R^2}{R_*^2}}, \tag{55}$$

$$t(R_*, R) \approx \frac{2}{\Omega} \times \ln \frac{\frac{R}{R_*} + \frac{2\omega_0^2}{a\Omega^2} + \sqrt{\frac{R}{R_*^2} + \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\left(\ln a - 1 + \frac{1}{a}\frac{R}{R_*}\right)}}{\frac{2\omega_0^2}{a\Omega^2} + \sqrt{\frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}(\ln a - 1)}}, \tag{56}$$

$$\varphi(R_*, R) \approx \ln \frac{\frac{R}{R_*} + \frac{2\omega_0^2}{a\Omega^2} + \sqrt{\frac{R^2}{R_*^2} + \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\left(\ln a - 1 + \frac{1}{a}\frac{R}{R_*}\right)}}{\frac{2\omega_0^2}{a\Omega^2} + \sqrt{\frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}(\ln a - 1)}}. \tag{57}$$

Полагая в (56) $R = R(v_{eR}(R_0) = 0)$ и $R_* = R_0$, получим интервал времени $0 \le t \le t_r$, когда траектории частиц полученных решений не пересекаются. Здесь $t_r(v_{eR}(R_0) = 0) \sim 2\ln 3/\Omega$. Отсюда следует, что $t_r(n_i = 0)/t_r(n_i \ne 0) \sim \omega_0/\Omega \gg 1$.

Подставив последовательно (44), (53) и (44), (56) в (26), получим

$$n_e(R_*, R) \approx n_e^0 \frac{R_*^2}{R^2}. \tag{58}$$

Таким образом, $n_e(R_*, R)$ имеет одно выражение для $R/R_* \approx 1$ и $R/R_* \gg 1$ (см. (58)), так как отношение частных производных в (26), вычисленные с использованием (53) и (56), совпадают. Из (58) видно, что $n_e(R_*, R)$ уменьшается с расстоянием $\sim 1/R^2$ и не зависит явно от времени.

6. Пусть для электронов выполнены условия

$$l \gg L \gg R_c. \tag{59}$$

Первое неравенство в (59) позволяет считать плазму бесстолкновительной, а второе неравенство показывает, что R_c не возмущен L. Следовательно, электроны в данных условиях замагничены [6]. Решение задачи проведем на интервале $0 \le t \le t_r$, где t_r — момент времени, когда $v_{eR} = 0$, чтобы не возникали обратные токи, и не было пересечения траекторий частиц. В противном случае применение гидродинамики будет несправедливым. Положим, что $f_i(R_*, 0) = 1$, т. е. $n_i(R_*, t) = n_i^0$ (равномерное распределение $n_i(R_*, 0)$), а $f_e(R_*, 0) = \mu$ или $n_e(R_*, t) = \mu n_e^0$. Учитывая процедуру получения решений в разд. 4, 5, найдем

$$E_R(R_*, R) = \omega_0^2 \frac{m_e}{2e} R \left(\mu \frac{R_*^2}{R^2} - 1\right). \tag{60}$$

Так как электроны замагничены, то для исследования динамики электронов можно использовать дрейфовое приближение, в котором скорость электрического дрейфа равна

$$v_{eRE}(R_*, R) = -c \frac{E_R(R_*, R)}{H_0}. \tag{61}$$

Отсюда учитывая выражение (60) и начальные условия (4), из (61) найдем

$$v_{eRE}(R_*, R) = -\frac{\omega_0^2}{2\Omega} R \left(\mu \frac{R_*^2}{R^2} - 1\right). \tag{62}$$

Полагая в выражениях (60), (61) $R_* = R_0$ и приравняв их нулю, найдем расстояние, где $E_R(R_0) = 0$ и $v_{eRE}(R_0) = 0$, которое положим равным L

$$R(E_R(R_0) = 0) = R(v_{eRE}(R_0) = 0) = R_0\sqrt{\mu} \equiv L. \tag{63}$$

Из выражения (63) видно, что расстояния совпадают. Это происходит потому, что используется дрейфовое приближение.

В силу того что в пределах R_c электроны движутся как независимые частицы, то R_c определим по формуле (29), т. е. $R_c = R(v_{eR}(R_0) = 0)$. Таким образом, из условий (59) следует

$$1 \gg \frac{\sqrt{\mu}}{a} \times \left[1 + \sqrt{1 + 2(\ln a - 1)\frac{a^2}{\mu}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}\right] \Big/ \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right). \tag{64}$$

Неравенство (64) выполняется в случае $\Omega^2/\omega_0^2 \gg 4$. Отсюда получим

$$\frac{H_0^2}{8\pi m_e c^2} \gg n_e^0. \tag{65}$$

Условие (65) является количественным критерием замагниченности электронов в самосогласованных плоских аксиально-симметричных ограниченных движениях на фоне ионов.

Если $n_i = 0$, то имеем

$$E_R(R_*, R) = \omega_0^2 \frac{m_e}{2e} \frac{R_*^2}{R}, \tag{66}$$

$$v_{eRE}(R_*, R) = -\frac{\omega_0^2}{2\Omega} \frac{R_*^2}{R}. \tag{67}$$

Рассмотрение формул (66), (67) показывает, что в данном случае расширение пучка электронов происходит постоянно, т. е. скорость фронта не равна нулю. Отсюда следует, что плазма не ограничена и условия (1), (2) не выполняются. Отметим, что для неограниченной плазмы критерий замагниченности электронов имеет вид [6]

$$l \gg R_c, \tag{68}$$

который является достаточным условием. Для ограниченной плазмы неравенство (68) является необходимым условием замагниченности [6].

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 167 с.

[2] Искусственные пучки частиц в космической плазме / Под ред. Б.М. Гранналя: Мир, 1985. 456 с.

[3] *Девидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978. 215 с.

[4] *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1970. 208 с.

[5] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.

[6] *Франк-Каменецкий Д.А.* Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1964. 284 с.

[7] *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. 448 с.

[8] *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.