

01;09

## Расчет электромагнитных полей объемных резонаторов с учетом потока энергии через щели

© П.Д. Кухарчик,<sup>1</sup> В.М. Сердюк,<sup>2</sup> И.А. Титовицкий<sup>2</sup><sup>1</sup> Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, 220010 Минск, Белоруссия<sup>2</sup> Институт прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко Белорусского государственного университета, 220064 Минск, Белоруссия  
e-mail: rhlab@bsu.by

(Поступило в Редакцию 14 июня 2006 г.)

На примере цилиндрического резонатора с поперечной кольцевой щелью теоретически исследованы условия резонанса в объемных резонансных системах со щелями в идеально проводящих стенках. Для описания стационарных электромагнитных полей собственных колебаний таких систем использован метод частичных областей с применением однородных уравнений Максвелла. Комплексное волновое число и другие параметры этих полей определены из условий непрерывности полей на границах щели. Сформулировано энергетическое условие резонанса, которое сводится к минимуму величины потока энергии резонансного поля через щель. Показано, что совместное рассмотрение этих условий позволяет исключить нефизические решения однородной задачи, связанные с появлением внерезонаторных источников возбуждения.

PACS: 03.50.De, 41.20.-q

### Введение

Строгое решение задачи о возбуждении объемных резонаторов предполагает решение неоднородных уравнений Максвелла, в которых явно учитываются источники возбуждения поля [1–3]. При этом суммарное поле возбуждения ищется в виде разложения по системе полевых функций, которые описывают собственные колебания, или отдельные моды резонансной системы [1–3]. Такие функции представляют собой решения однородных уравнений Максвелла и должны удовлетворять всем необходимым граничным условиям, но без учета источников. Следовательно, определение полей собственных колебаний и соответствующих собственных частот — основная задача теории возбуждения резонансных систем. Более того, для резонаторов сантиметрового и дециметрового диапазона результирующее поле возбуждения мало отличается от поля одной моды, поскольку у них спектр собственных частот обычно оказывается достаточно разреженным.

Картину формирования поля собственного колебания резонансной системы со щелью можно представить как преобразование какой-либо простой моды закрытого резонатора в результате прорезания в нем щели, а задачу определения параметров этого поля — как задачу дифракции данной моды на щели. Существенное отличие такой задачи от обычных стационарных задач теории дифракции состоит в том, что частота излучения, т.е. частота собственных колебаний резонатора, изначально неизвестна [4]. Можно ожидать, что она близка к частоте исходной простой моды резонатора без щели и является комплексной [1–3]. Ее мнимая часть определяет добротность колебательного процесса и описывает потери энергии на поглощение и излучение во внешнее пространство. В стационарном приближении

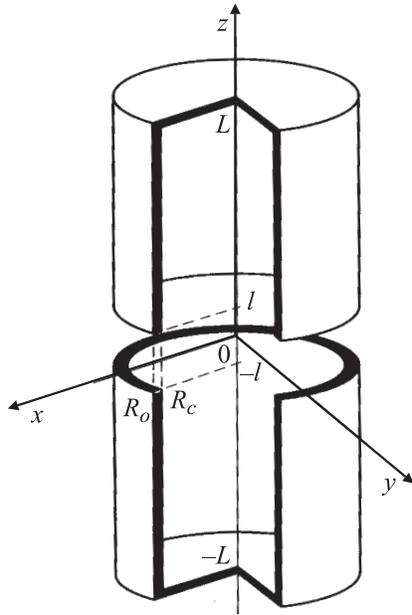
предполагается, что эти потери компенсируются затратами энергии от источников возбуждения [1–3].

Обычно считается, что для определения частот и других параметров полей собственных колебаний объемных резонаторов достаточно использовать амплитудные граничные условия на проводящих стенках резонатора и на бесконечности [1–4].

В настоящей работе на примере цилиндрического резонатора показано, что решение этой задачи применительно к резонаторам со щелями требует учета дополнительных условий, связанных с величиной потока энергии через щели во внешнее пространство. Будут рассматриваться резонаторы с поперечной кольцевой щелью, которые используются в приборах измерения влажности листовых диэлектрических материалов (бумага, картон, ткань) в процессе их производства [5,6].

### 1. Представление полей в различных областях

Пусть ось резонатора совпадает с осью  $z$  цилиндрической системы координат  $\rho\phi z$ , а границы идеально проводящих стенок — с цилиндрическими поверхностями  $\rho = R_c$ ,  $\rho = R_o$  и плоскостями  $z = \pm L$  (рис. 1). Предположим, что в цилиндрической стенке конечной толщины  $R_o - R_c$  прорезана кольцевая щель с краями  $z = \pm l$ ,  $R_c \leq \rho \leq R_o$ , через которую поле может излучаться во внешнее пространство. Задача состоит в определении электромагнитного поля свободных колебаний данной резонансной системы при ее возбуждении на частоте, близкой к собственной частоте аналогичного резонатора без щели. Будем считать, что поле монохроматическое и его зависимость от времени определяются экспоненциальным множителем  $\exp(-i\omega t)$ , который опускается.



**Рис. 1.** Цилиндрический резонатор с поперечной кольцевой щелью.  $L$  — полуввысота резонатора,  $l$  — полуширина щели,  $R_o$  и  $R_c$  — внешний и внутренний радиусы цилиндрических стенок резонатора.

Считаем также, что от азимутальной координаты  $\varphi$  оно зависит периодически. Тогда пространственные компоненты электрического и магнитного полей можно представить следующим образом [7,8]:

$$E_\rho(\rho, \varphi, z) = \left( -\frac{ikm}{\rho} u + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho \partial z} \right) \sin m\varphi; \quad (1a)$$

$$E_\varphi(\rho, \varphi, z) = \left( -ik \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \cos m\varphi; \quad (1b)$$

$$E_z(\rho, \varphi, z) = \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + k^2 \bar{u} \right) \sin m\varphi; \quad (1c)$$

$$H_\rho(\rho, \varphi, z) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial z} - \frac{ikm}{\rho} \bar{u} \right) \cos m\varphi; \quad (1d)$$

$$H_\varphi(\rho, \varphi, z) = \left( -\frac{m}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} + ik \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \right) \sin m\varphi; \quad (1e)$$

$$H_z(\rho, \varphi, z) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u \right) \cos m\varphi, \quad (1f)$$

где  $k = \omega/c$  — комплексное волновое число,  $m$  — целое число периодов поля, которое укладывается на полную величину азимутальной координаты  $2\pi$ . Мнимая часть волнового числа  $k$  (и частоты  $\omega$ ) должна быть отрицательной, поскольку она характеризует экспоненциальное затухание резонансного поля во времени [1,3]. Скалярные комплексные функции  $u = u(\rho, z)$  и  $\bar{u} = \bar{u}(\rho, z)$  здесь определяют  $H$ - и  $E$ -поляризации электромагнитного поля и представляют собой продольные составляющие магнитного и электрического векторов Герца [8].

Компоненты полей (1) будут решениями однородных уравнений Максвелла, если эти функции удовлетворяют цилиндрическому уравнению Гельмгольца [7,8]:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 \right) \begin{Bmatrix} u \\ \bar{u} \end{Bmatrix} = 0. \quad (2)$$

Поставленную задачу резонаторной дифракции будем решать с помощью метода частичных областей [4,9]. Согласно данному методу, все пространство распространения поля разбивается на отдельные области простой геометрии. В каждой из них поле ищется в виде полного набора решений уравнений Максвелла (т.е. решений уравнения (2)), которые описывают простые моды этой области. Затем на границах областей проводится процедура приравнивания полей, из которой определяются амплитуды данных мод. Такой метод решения дифракционных задач наиболее близок методам строгой теории дифракции [7–9]. В нашем случае в качестве первой области можно взять цилиндрическую область резонансного возбуждения поля:  $0 \leq \rho \leq R_c$ ,  $-L \leq z \leq L$ , второй — внутренность кольцевой щели:  $R_c \leq \rho \leq R_o$ ,  $-l \leq z \leq l$ , и третьей — неограниченное внешнее пространство:  $\rho \geq R_o$ . Для упрощения задачи будем предполагать, что проводящие цилиндрические стенки резонатора неограниченно продолжены за пределы плоских стенок  $z = \pm L$ . Это позволяет исключить из рассмотрения дифракцию поля на внешних круговых ребрах корпуса резонатора  $z = \pm L$ ;  $\rho = R_o$ , которая имеет второстепенное значение по сравнению с основной дифракцией на щели.

Граничные условия для полей (1) сводятся к условиям равенства нулю тангенциальных компонент электрического поля на проводящих поверхностях и к непрерывности электрического и магнитного полей на свободных границах областей. Для проводящих поверхностей, образующих границы только одной области, условия на функции  $u$  и  $\bar{u}$  можно накладывать по отдельности, а для поверхностей, включающих границы раздела разных областей, обе поляризации следует рассматривать совместно

$$(u)_{z=\pm L} = 0; \quad (\partial \bar{u} / \partial z)_{z=\pm L} = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R_c, \quad (3)$$

$$(u)_{z=\pm l} = 0; \quad (\partial \bar{u} / \partial z)_{z=\pm l} = 0, \quad R_c \leq \rho \leq R_o; \quad (4)$$

$$E_{\varphi,z}(R_c - 0, \varphi, z) = \begin{cases} 0, & |z| > l; \\ E_{\varphi,z}(R_c + 0, \varphi, z), & |z| < l; \end{cases} \quad (5a)$$

$$E_{\varphi,z}(R_o + 0, \varphi, z) = \begin{cases} 0, & |z| > l; \\ E_{\varphi,z}(R_o - 0, \varphi, z), & |z| < l; \end{cases} \quad (5b)$$

$$H_{\varphi,z}(R_{c,o} - 0, \varphi, z) = H_{\varphi,z}(R_{c,o} + 0, \varphi, z), \quad |z| < l, \quad (6)$$

где символ 0 обозначает бесконечно малую положительную величину.

Внутри резонатора ( $0 \leq \rho \leq R_c$ ,  $-L \leq z \leq L$ ) поле будем искать в виде

$$u = \frac{i}{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_m(\alpha_n \rho)}{\alpha_n J'_m(\alpha_n R_c)} \sin \beta_n (L - z);$$

$$\bar{u} = m \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \frac{J_m(\alpha_n \rho)}{\alpha_n^2 J_m(\alpha_n R_c)} \cos \beta_n (L - z), \quad (7)$$

где  $A_n$  и  $\bar{A}_n$  — неизвестные амплитуды простых мод резонатора,  $J_m$  — функция Бесселя 1-го рода  $m$ -го порядка, а штрихом обозначается производная от этой функции по ее аргументу  $\alpha_n R_c$ . Величины  $\beta_n$  и  $\alpha_n = (k^2 - \beta_n^2)^{1/2}$  здесь представляют собой постоянные распространения мод по координатным осям  $z$  и  $\rho$ . Чтобы поля (7) удовлетворяли граничным условиям (3) на проводящих поверхностях  $z = \pm L$ , параметры  $\beta_n$  должны образовывать дискретный ряд значений:  $\beta_n = \pi n / (2L)$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Аналогичное представление используем для поля внутри щели ( $R_c \leq \rho \leq R_o$ ,  $-l \leq z \leq l$ ):

$$u = ik^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-1} v_j(\rho) \sin \xi_j (l - z);$$

$$\bar{u} = m \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{-2} \bar{v}_j(\rho) \cos \xi_j (l - z), \quad (8)$$

где

$$v_j(\rho) = a_j H_m^{(2)}(\sigma_j \rho) + b_j H_m^{(1)}(\sigma_j \rho);$$

$$\bar{v}_j(\rho) = \bar{a}_j H_m^{(2)}(\sigma_j \rho) + \bar{b}_j H_m^{(1)}(\sigma_j \rho); \quad (9)$$

$a_j$ ,  $b_j$  и  $\bar{a}_j$ ,  $\bar{b}_j$  — амплитуды простых цилиндрических мод щели  $H$ - и  $E$ -поляризации, бегущих в противоположных направлениях координатной оси  $\rho$ ,  $H_m^{(1,2)}$  — функции Ханкеля 1-го и 2-го рода  $m$ -го порядка,  $\xi_j = \pi j / (2l)$  и  $\sigma_j = (k^2 - \xi_j^2)^{1/2}$  — постоянные распространения мод щели по осям  $z$  и  $\rho$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Эти значения постоянных распространения обеспечивают выполнение граничных условий (4) и уравнения (2).

Во внешнем пространстве ( $\rho \geq R_o$ ) распространение поля по оси  $z$  не ограничено никакими проводящими поверхностями, и потому здесь его следует искать в виде непрерывного спектра мод

$$u = \frac{i}{k} \int_0^{+\infty} \frac{H_m^{(1)}(\alpha \rho)}{\alpha H_m^{(1)'}(\alpha R_o)} [A_s(\beta) \cos \beta z + A_a(\beta) \sin \beta z] d\beta;$$

$$\bar{u} = m \int_0^{+\infty} \frac{H_m^{(1)}(\alpha \rho)}{\alpha^2 H_m^{(1)'}(\alpha R_o)} [\bar{A}_a(\beta) \sin \beta z - \bar{A}_s(\beta) \cos \beta z] d\beta, \quad (10)$$

где

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \beta^2}, \quad (11)$$

$A_{s,a}(\beta)$  и  $\bar{A}_{s,a}(\beta)$  — амплитуды симметричных и анти-симметричных по  $z$  мод  $H$ - и  $E$ -поляризации, а штрихом

у функции Ханкеля, как и у функции Бесселя, обозначается ее производная по своему аргументу  $\alpha R_o$ .

Хотя однородные уравнения Максвелла не учитывают источников поля, их примерное расположение обязательно следует принимать во внимание при формулировке граничных условий, прежде всего на бесконечности. Это необходимо для того, чтобы из всего множества решений уравнений Максвелла исключить нефизические решения, которые не соответствуют положению источников. Основанием для такого отбора служат два очевидных факта, что излучение распространяется от источников, и что поле должно убывать, или, по крайней мере, не возрастать при удалении от них. Отсюда формулируются два критерия выбора решений уравнений Максвелла: по направлению распространения фазы и по направлению спада амплитуды поля от источников. Обычно в теории дифракции для бесконечных открытых областей эти два критерия, как непротиворечивые, объединяются в одно условие излучения [1,2,7,9]. Однако в задачах резонаторной дифракции они могут противоречить друг другу, поскольку при отрицательной мнимой части комплексного волнового числа направление распространения фазы может оказаться противоположным направлению затухания амплитуды поля в открытой области [6]. Вслед за [10] мы полагаем, что в подобных ситуациях следует отдавать предпочтение амплитудному критерию выбора решения по направлению затухания амплитуды при удалении от источников. И наоборот, по направлению убывания амплитуды поля в отдельной области пространства также можно оценить примерное расположение его источников.

В реальной ситуации источники локализованы только внутри резонатора и на бесконечности отсутствуют. Тогда для открытой области вне резонатора необходимо обеспечить убывающий характер поля (10) на бесконечности  $|z|$  и  $\rho$ . При  $|z| \rightarrow \infty$  это требование выполняется, если все модовые амплитуды (10) ограничены по величине, и интегрирование в (10) ведется строго по вещественной оси  $\beta$ . Убывание поля с ростом координаты  $\rho$  обеспечивается выбором ветви корня (11) с неотрицательной мнимой частью. Стандартное условие излучения [1,2,7,9] здесь не выполняется. Действительно, положительной мнимой части величины  $\alpha$  (11) при отрицательной мнимой части  $k$  и вещественном  $\beta$  будет соответствовать отрицательная вещественная часть  $\alpha$ , которая характеризует волны (10), приходящие из бесконечности. Приходится признать, что подобный характер поведения решения может соответствовать стационарному приближению, которое описывает установившуюся картину поля.

## 2. Решение граничной задачи

Выражения (10) представляют собой разложение полевых функций в интегралы Фурье, а соотношения (7) и (8) — в ряды Фурье по стоячим модам каждой области. Эти моды удовлетворяют всем требуемым

условиям, за исключением граничных условий (5) и (6) на цилиндрических поверхностях  $\rho = R_c$  и  $\rho = R_o$ .

Сначала рассмотрим граничные условия (5) для электрического поля. Подставим в них выражения (1b), (1c) с учетом представлений (7)–(10) и разложим развернутое уравнение (5a) по ортогональной системе функций  $\sin \beta_n(L-z)$ ,  $\cos \beta_n(L-z)$ , а уравнение (5b) — по ортогональной системе  $\cos \beta z$ ,  $\sin \beta z$ . Иначе говоря, будем умножать обе части данных уравнений последовательно на каждую из этих функций и затем интегрировать по всем значениям координаты  $z$ , т.е. от  $-L$  до  $L$  для (5a) и от  $-\infty$  до  $+\infty$  для (5b). Отсюда получим выражения, которые позволяют выразить амплитуды простых мод вне щели через амплитуды внутрищелевых мод

$$\begin{aligned} \bar{A}_n &= \frac{l}{L} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{w}_j^{(c)} C_{nj}^+; \\ A_n &= \frac{l}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \left( w_j^{(c)} C_{nj}^- + \bar{w}_j^{(c)} Q_{nj} \right); \\ \bar{A}_{s,a}(\beta) &= \frac{l}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{w}_j^{(o)} \bar{S}_j^{(s,a)}(\beta); \\ A_{s,a}(\beta) &= \frac{l}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left( w_j^{(o)} S_j^{(s,a)}(\beta) + \bar{w}_j^{(o)} Q_j^{(s,a)}(\beta) \right), \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{w}_j^{(c,o)} &= \bar{v}_j(R_{c,o}); \\ w_j^{(c,o)} &= v_j'(R_{c,o}) = a_j H_m^{(2)'}(\sigma_j R_{c,o}) + b_j H_m^{(1)'}(\sigma_j R_{c,o}); \\ Q_{nj} &= \frac{m^2}{R_c} \left( \frac{\xi_j}{\sigma_j^2} C_{nj}^- - \frac{\beta_n}{\alpha_n^2} C_{nj}^+ \right); \\ Q_j^{(s,a)}(\beta) &= \frac{m^2}{R_o} \left[ \frac{\xi_j}{\sigma_j^2} S_j^{(s,a)}(\beta) - \frac{\beta}{\alpha^2} \bar{S}_j^{(s,a)}(\beta) \right], \quad (13) \end{aligned}$$

а величины

$$\begin{aligned} C_{nj}^{\pm} &= l^{-1} \int_{-l}^l \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_n(L-z) \cos \xi_j(l-z) \\ \sin \beta_n(L-z) \sin \xi_j(l-z) \end{array} \right\} dz; \\ S_j^{(s,a)}(\beta) &= l^{-1} \int_{-l}^l \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{array} \right\} \sin \xi_j(l-z) dz; \\ \bar{S}_j^{(s,a)}(\beta) &= \mp l^{-1} \int_{-l}^l \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{array} \right\} \cos \xi_j(l-z) dz \end{aligned}$$

представляют собой интегралы перекрытия между модами различных областей.

Теперь рассмотрим оставшиеся граничные условия (6) для магнитного поля (1e) и (1f) на щели. Подставим в них представления (7)–(10) и разложим по ортогональным системам функций  $\cos \xi_j(l-z)$  и  $\sin \xi_j(l-z)$

( $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) на интервале  $-l \leq z \leq l$ . С учетом представлений (12) получается бесконечномерная система линейных алгебраических уравнений для амплитуд мод щели, которую удобнее решать относительно величин  $w_i^{(c,o)}$  и  $\bar{w}_i^{(c,o)}$  (13), а не самих амплитуд  $a_j, b_j$  и  $\bar{a}_j, \bar{b}_j$ . Последние можно выразить через указанные величины, используя соотношения (9), (13) как системы линейных уравнений относительно данных амплитуд

$$\begin{aligned} a_i &= D_{mi}^{-1} \left[ w_i^{(c)} H_m^{(1)'}(\sigma_i R_o) - w_i^{(o)} H_m^{(1)'}(\sigma_i R_c) \right]; \\ b_i &= D_{mi}^{-1} \left[ w_i^{(o)} H_m^{(2)'}(\sigma_i R_c) - w_i^{(c)} H_m^{(2)'}(\sigma_i R_o) \right]; \\ \bar{a}_i &= \bar{D}_{mi}^{-1} \left[ \bar{w}_i^{(c)} H_m^{(1)}(\sigma_i R_o) - \bar{w}_i^{(o)} H_m^{(1)}(\sigma_i R_c) \right]; \\ \bar{b}_i &= \bar{D}_{mi}^{-1} \left[ \bar{w}_i^{(o)} H_m^{(2)}(\sigma_i R_c) - \bar{w}_i^{(c)} H_m^{(2)}(\sigma_i R_o) \right], \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_{mi} &= H_m^{(1)'}(\sigma_i R_o) H_m^{(2)'}(\sigma_i R_c) - H_m^{(1)'}(\sigma_i R_c) H_m^{(2)'}(\sigma_i R_o); \\ \bar{D}_{mi} &= H_m^{(1)}(\sigma_i R_o) H_m^{(2)}(\sigma_i R_c) - H_m^{(1)}(\sigma_i R_c) H_m^{(2)}(\sigma_i R_o). \end{aligned}$$

Чтобы найти приближенное решение полученной бесконечномерной системы, проведем ее редукцию до системы конечной размерности [11]. Для этого ограничим максимальный порядок внутрищелевых мод конечным числом  $N$ . Это значит, что учитываются  $N$  мод  $H$ -поляризации с порядковым номером  $j$  от 1 до  $N$ , и  $N+1$  мода  $E$ -поляризации, у которых порядковый номер  $j$  меняется от 0 до  $N$ . Следует принимать во внимание, что каждой моде щели (8) соответствуют две разные волны (9), которые распространяются в противоположных направлениях радиальной координаты  $\rho$ . Тогда общее число неизвестных амплитуд внутрищелевых мод составит  $4N+2$ , а искомая система уравнений для них примет вид

$$\sum_{j=1}^{4N+2} A_{ij} w_j = 0, \quad i = 1, \dots, 4N+2, \quad (15a)$$

где  $w_i$  — элемент матрицы-столбца  $\mathbf{w}$ , которая составлена из неизвестных величин (13) и в транспонированном виде представляется матрицей-строкой с элементами:

$$\tilde{\mathbf{w}} = \left( w_1^{(c)} \dots w_N^{(c)} \bar{w}_0^{(c)} \dots \bar{w}_N^{(c)} w_1^{(o)} \dots w_N^{(o)} \bar{w}_0^{(o)} \dots \bar{w}_N^{(o)} \right), \quad (15b)$$

$A_{ij}$  — элемент квадратной матрицы коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} K^{(c)} & \bar{P}^{(c)} & l\Gamma^{(c)} & 0 \\ M^{(c)} & \bar{K}^{(c)} & 0 & -l\bar{\Gamma}^{(c)} \\ -l\Gamma^{(o)} & 0 & K^{(o)} & \bar{P}^{(o)} \\ 0 & l\bar{\Gamma}^{(o)} & M^{(o)} & \bar{K}^{(o)} \end{pmatrix}. \quad (15c)$$

Здесь нуль обозначает нулевую матрицу,  $\Gamma$  — произведение единичной диагональной матрицы  $I$  на матрицу-вектор  $\mathbf{T}$  с элементами  $T_j \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера), а элементы остальных матриц представляются в виде

$$K_{ij}^{(c,o)} = P_{ij}^{(c,o)} - \frac{L^{(c,o)}}{l} \frac{\sigma_i}{k^2 R_{c,o}} \Lambda_i^{(c,o)} \delta_{ij};$$

$$T_j^{(c,o)} = \frac{L^{(c,o)}}{l} \frac{\sigma_i}{k^2 R_{c,o}} \Gamma_j^{(c,o)};$$

$$M_{ij}^{(c,o)} = \frac{\sigma_i}{k^2 R_{c,o}} W_{ij}^{(c,o)} - \frac{\xi_i}{\sigma_i} P_{ij}^{(c,o)};$$

$$\bar{T}_j^{(c,o)} = \frac{L^{(c,o)}}{l} (1 + \delta_{0j}) \bar{\Gamma}_j^{(c,o)};$$

$$\bar{K}_{ij}^{(c,o)} = \frac{\sigma_i}{k^2 R_{c,o}} \bar{W}_{ij}^{(c,o)} - \frac{\xi_i}{\sigma_i} \bar{P}_{ij}^{(c,o)} - \frac{L^{(c,o)}}{l} (1 + \delta_{0i}) \bar{\Lambda}_i^{(c,o)} \delta_{ij},$$

где для сокращения введены обозначения:  $L^{(c)} = L$ ;  $L^{(o)} = \pi$ ; причем индексы  $i$  и  $j$  меняются от 1 до  $N$  для параметров  $H$ -поляризации и от 0 до  $N$  для параметров  $E$ -поляризации;

$$\Gamma_i^{(c,o)} = 4i / (\pi \sigma_i R_{c,o} D_{mi}); \quad \bar{\Gamma}_i^{(c,o)} = 4i / (\pi \sigma_i R_{c,o} \bar{D}_{mi});$$

$$\Lambda_i^{(c)} = \frac{H_m^{(2)}(\sigma_i R_c)}{H_m^{(2)' }(\sigma_i R_c)} + \Gamma_i^{(c)} \frac{H_m^{(2)' }(\sigma_i R_o)}{H_m^{(2)' }(\sigma_i R_c)};$$

$$\Lambda_i^{(o)} = \frac{H_m^{(1)}(\sigma_i R_o)}{H_m^{(1)' }(\sigma_i R_o)} - \bar{\Gamma}_i^{(o)} \frac{H_m^{(1)' }(\sigma_i R_c)}{H_m^{(1)' }(\sigma_i R_o)};$$

$$\bar{\Lambda}_i^{(c)} = \frac{H_m^{(2)' }(\sigma_i R_c)}{H_m^{(2)}(\sigma_i R_c)} - \bar{\Gamma}_i^{(c)} \frac{H_m^{(2)}(\sigma_i R_o)}{H_m^{(2)}(\sigma_i R_c)};$$

$$\bar{\Lambda}_i^{(o)} = \frac{H_m^{(1)' }(\sigma_i R_o)}{H_m^{(1)}(\sigma_i R_o)} + \bar{\Gamma}_i^{(o)} \frac{H_m^{(1)}(\sigma_i R_c)}{H_m^{(1)}(\sigma_i R_o)};$$

$$P_{ij}^{(c)} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{ni} C_{nj}^-; \quad \bar{P}_{ij}^{(c)} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{ni} Q_{nj};$$

$$W_{ij}^{(c)} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{ni} C_{nj}^-; \quad \bar{W}_{ij}^{(c)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{U}_{ni} Q_{nj} + V_{ni} C_{nj}^+);$$

$$U_{ni} = \frac{\alpha_n^2 C_{ni}^-}{k^2 F_m(\alpha_n R_c)}; \quad \bar{U}_{ni} = \frac{\beta_n R_c}{F_m(\alpha_n R_c)} C_{ni}^+;$$

$$V_{ni} = \frac{k^2 F_m(\alpha_n R_c)}{\alpha_n^2 (1 + \delta_{0n})} C_{ni}^+;$$

$$P_{ij}^{(o)} = \int_0^{+\infty} \{U_i^{(s)}(\beta) S_j^{(s)}(\beta) + U_i^{(a)}(\beta) S_j^{(a)}(\beta)\} d\beta;$$

$$\bar{P}_{ij}^{(o)} = \int_0^{+\infty} \{U_i^{(s)}(\beta) Q_j^{(s)}(\beta) + U_i^{(a)}(\beta) Q_j^{(a)}(\beta)\} d\beta;$$

$$W_{ij}^{(o)} = \int_0^{+\infty} \{\bar{U}_i^{(s)}(\beta) S_j^{(s)}(\beta) + \bar{U}_i^{(a)}(\beta) S_j^{(a)}(\beta)\} d\beta;$$

$$\bar{W}_{ij}^{(o)} = \int_0^{+\infty} \{\bar{U}_i^{(s)}(\beta) Q_j^{(s)}(\beta) + \bar{U}_i^{(a)}(\beta) Q_j^{(a)}(\beta) + V_i^{(s)}(\beta) \bar{S}_j^{(s)}(\beta) + V_i^{(a)}(\beta) \bar{S}_j^{(a)}(\beta)\} d\beta;$$

$$U_i^{(s,a)}(\beta) = \frac{\alpha^2 S_i^{(s,a)}(\beta)}{k^2 G_m(\alpha R_o)}; \quad \bar{U}_i^{(s,a)}(\beta) = \frac{\beta R_o \bar{S}_i^{(s,a)}(\beta)}{G_m(\alpha R_o)};$$

$$V_i^{(s,a)}(\beta) = \frac{k^2}{\alpha^2} G_m(\alpha R_o) \bar{S}_i^{(s,a)}(\beta);$$

$F$  и  $G$  — сокращенное обозначение для функций

$$F_m(x) = x J_m'(x) / J_m(x); \quad G_m(x) = x H_m^{(1)'}(x) / H_m^{(1)}(x).$$

Однородность полученной системы (15) обусловлена тем, что источники возбуждения резонансного поля формально не учитывались. Обычные методы нахождения решений подобных систем в резонаторных задачах сводятся к исключению одного из ее уравнений [4]. При этом дополнительное уравнение для неизвестного комплексного волнового числа  $k$  получают либо приравниванием нулю определителя полной системы, либо минимизацией невязки исключенного уравнения [4]. Такие методы решения однородных систем приемлемы в случаях, когда исключение любого уравнения из системы и любого переменного из числа неизвестных дает хорошо обусловленную систему [12,13], т.е. систему, определитель которой заметно отличен от нуля. Однако здесь иная ситуация. Для редуцированной системы нужно найти решение, которое будет достаточно близким к решению исходной бесконечномерной системы, независимо от ее порядка [11]. Следовательно, однородные системы в резонаторных задачах дифракции должны быть очень плохо обусловленными, поскольку исключение одного или нескольких уравнений из системы не должно приводить к заметному улучшению ее обусловленности. Поэтому для таких систем нужно дополнительно привлекать специальные методы улучшения обусловленности систем линейных уравнений [14], одним из которых может служить метод регуляризации А.Н. Тихонова [15]. В соответствии с данным методом вместо непосредственного решения системы (15) следует искать минимум функционала

$$D = \sum_{k=1}^{4N+2} \left( \sum_{j=1}^{4N+2} A_{kj} w_j \right) \left( \sum_{i=1}^{4N+2} A_{ki}^* w_i^* \right) + \mu \sum_{i=1}^{4N+2} w_i w_i^* \xi_i^2, \quad (17)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение,  $\xi_j = \xi_{j+N+1} = \xi_{j+2N+1} = \xi_{j+3N+2} = \xi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $\mu$  — параметр регуляризации (малая положительная величина). Она может быть размерной и специально подбирается в процессе расчетов из условия минимальности

данного параметра при удовлетворительной обусловленности получаемой системы [13]. В этом случае минимум функционала очень слабо зависит от вариаций значения параметра регуляризации.

Продифференцируем соотношение  $D = \min$  для функционала  $D$  (17) по всем неизвестным  $w_i^*$ , считая их формально независимыми от  $w_i$ . При этом параметр  $w_1$  считаем известным и равным единице. В результате вместо плохо обусловленной однородной системы (15) получим хорошо обусловленную неоднородную систему уравнений:

$$\sum_{j=2}^{4N+2} \left( \sum_{k=1}^{4N+2} A_{ki}^* A_{kj}^* + \mu \xi_i^2 \delta_{ij} \right) w_j = - \sum_{k=1}^{4N+2} A_{ji}^* A_{k1};$$

$$i = 2, 3, 4, \dots, 4N + 2. \quad (18)$$

Указанный выбор известной величины  $w_i$  соответствует симметричному возбуждению резонатора по компонентам электрического поля  $E_\rho$  и  $E_\varphi$ . Чтобы рассмотреть случай асимметричного возбуждения, следует полагать  $\bar{w}_0$  или  $w_2$  известными, а  $w_1$  — неизвестной величиной, соответственно меняя индексы суммирования в (18).

Помимо этого, для оставшейся неизвестной величины — волнового числа  $k$  — нужно ввести дополнительное условие, аналогичное условию минимума невязки одного из уравнений исходной системы (15). Поскольку она является очень плохо обусловленной, величину  $k$  будем определять исходя из условия минимума невязок сразу всех уравнений нашей системы, т.е. минимума все того же функционала  $D$  (17), используя при этом все решения регуляризированной системы (18) для данного значения  $k$ . В результате получается устойчивый алгоритм нахождения комплексного волнового числа  $k$  собственных колебаний резонатора. Следует отметить, что процедура тихоновской регуляризации обеспечивает его устойчивость при любой толщине проводящих стенок резонатора, т.е. при любой глубине щели [16].

Чтобы рассчитать пространственную структуру резонансного поля, найденные решения системы (15) нужно подставить в выражения (12), (14), а полученные соотношения — в формулы (7)–(10) и затем в (1). Напомним, что в нашей модели изначально не учитывались источники возбуждения, и потому такое поле будет представлять собой в чистом виде обобщенную моду собственных колебаний рассматриваемой резонансной системы, т.е. полевую структуру, в которую переходит одна из простых мод (7) цилиндрического резонатора после прорезания в нем щели [6].

### 3. Энергетические условия резонанса и результаты расчетов

При изучении условий энергетического баланса будем исходить из общего выражения закона сохранения энергии для электромагнитного поля в некоторой области

пространства [1,7]:

$$dW/dt + U + P = 0, \quad (19)$$

где  $W$  — энергия поля во всем объеме данной области,  $U$  — мощность потерь в этой области на поглощение,  $P$  — мощность излучения из него. Рассмотрим соотношение (19) для внутренней области цилиндрического резонатора со щелью ( $0 \leq \rho \leq R_c$ ,  $-L \leq z \leq L$ ) применительно к величинам, усредненным за период колебаний. По определению, резонанс отвечает максимальному значению энергии поля в области его возбуждения за большой промежуток времени, или минимальной скорости уменьшения энергии, усредненной за период:  $|dW/dt| = \min$  [1–3]. В нашем случае идеально проводящих стенок резонатора и отсутствия поглощающих диэлектриков ( $U = 0$ ) резонанс будет соответствовать условию

$$|P| = \min, \quad (20)$$

где в качестве величины  $P$  следует брать нормальную компоненту вектора потока энергии электромагнитного поля через щель [1,2,7]:

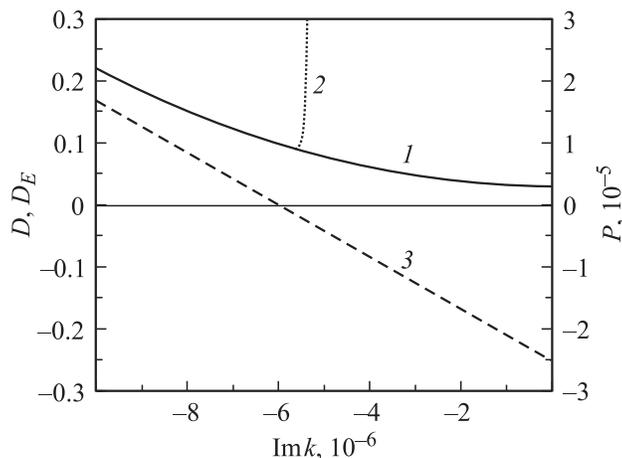
$$P = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_S (E_\varphi H_z^* - E_z H_\varphi^*) dS, \quad (21)$$

причем интеграл должен вычисляться по сечению щели  $S$ , т.е. по координатам  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  и  $z$  от  $-l$  до  $l$  при постоянном  $\rho$  ( $R_c \leq \rho \leq R_0$ ). Здесь компонентами поля являются пространственные компоненты (1b), (1c) и (1e), (1f), которые удовлетворяют всем необходимым граничным условиям, т.е. вычисляются в соответствии с описанной выше процедурой.

Энергетическое условие резонанса (20) для величины  $P$  (21) не совпадает с рассмотренными выше амплитудными условиями, вытекающими из граничных условий задачи. Проиллюстрируем этот факт конкретным примером. Мы проводили численный расчет для цилиндрического резонатора (рис. 1) с параметрами

$$L = 17.6; \quad l = 0.524; \quad R_c = 2.94; \quad R_o = 4.83 \text{ cm}, \quad (22)$$

которые характеризуют реальные резонаторы, используемые в приборах измерения влажности листовых материалов [5]. Предполагалось, что частота возбуждения резонатора близка частоте моды  $H_{115}$  такого же цилиндрического резонатора, но без щели (3671.611 MHz, длина волны  $\lambda = 8.171$  cm; симметричное возбуждение). При расчетах параметр регуляризации  $\mu$  принимался равным  $10^{-5}$  cm<sup>2</sup>, максимальный порядок мод щели (8) составлял  $N = 24$ , учитывалось до 400 внутрирезонаторных мод (7) каждой поляризации, а непрерывное распределение внerezонаторных мод (10) приближенно заменялось дискретным распределением с шагом  $\Delta = 0.0357$  по вещественной оси  $\beta$ . В процессе вычислений учитывалось до 2000 таких мод. При этом интегральные элементы матриц (16) вычислялись по известной квадратурной формуле средних [13].



**Рис. 2.** Величина функционалов  $D$  (1),  $D_E$  (2) и нормальная компонента потока энергии через кольцевую щель  $P$  (3) при различных значениях мнимой части комплексного волнового числа  $k$  электромагнитного излучения свободных колебаний цилиндрического резонатора с параметрами (22).

Результаты проведенного расчета для численных значений функционала  $D$  (17) и нормальной компоненты потока энергии через щель  $P$  (21) представлены на рис. 2. Здесь вещественная часть волнового числа полагалась постоянной:  $\text{Re } k = 0.767779$ , а в качестве аргумента использована его мнимая часть  $\text{Im } k$ , которая, как указывалось выше, должна быть отрицательной. Из рисунка видно, что с уменьшением абсолютной величины данного аргумента величина функционала  $D$  монотонно убывает. Согласно условию минимума этого функционала, мы должны взять нулевое значение для величины  $\text{Im } k$ . Но такой выбор определяет бесконечно большое значение добротности нашей резонансной системы и не учитывает потери электромагнитной энергии вследствие утечки через щель во внешнее пространство.

Чтобы понять, откуда возникает такое противоречие с реальной ситуацией, рассмотрим график для нормальной компоненты потока энергии  $P$  на рис. 2. Она вычислялась с точностью до множителя  $c/8$  при  $\rho = (R_c + R_o)/2$ . Энергетическое условие резонанса (20) определяет совсем другое, ненулевое значение мнимой части волнового числа  $k$  собственных колебаний, при котором  $P$  обращается в нуль. А при меньших значениях  $|\text{Im } k|$  она становится отрицательной, что будет соответствовать потоку энергии, текущему через щель из внешнего пространства внутрь резонатора. Подобное изменение направления потока энергии может происходить только в том случае, если снаружи появляются источники поля. Поскольку внешнее поле (10) убывает при удалении от наружной цилиндрической поверхности резонатора  $\rho = R_o$ , то эти дополнительные источники должны быть локализованы вблизи данной поверхности.

Следовательно, решения с аномально малыми значениями  $|\text{Im } k|$  соответствуют гипотетической ситуации появления дополнительных согласованных внешних источников поля, мощность которых достаточна для

компенсации потерь энергии резонатора на излучение через щель во внешнее пространство. Чтобы исключить из рассмотрения возможные решения с такими источниками, вместо функционала  $D$  (17) будем рассматривать функционал

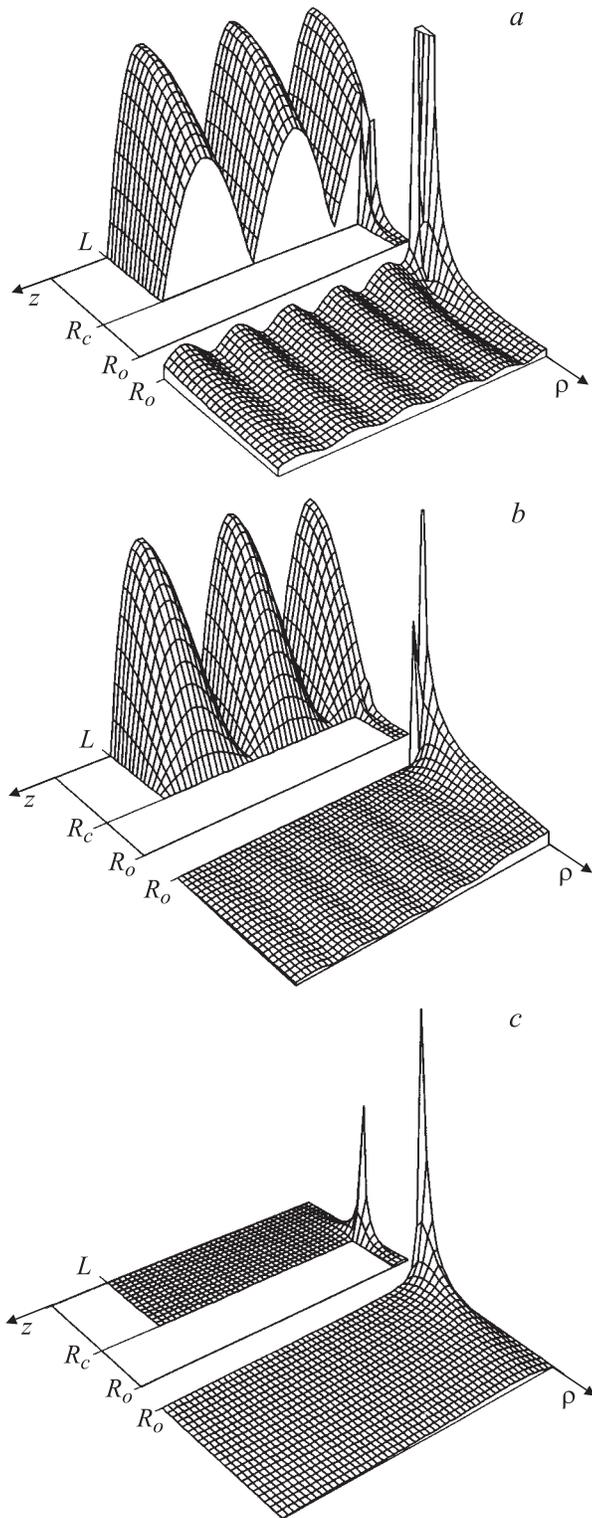
$$D_E = D + \sqrt{1 + V^2[1 + \exp(-4000V)]} - 1; \quad (23)$$

$$V = 1000 \times P$$

с дополнительным слагаемым, которое учитывает энергетическое условие резонанса (20) и не допускает наличия минимума при малых значениях мнимой части волнового числа. При положительных значениях величины  $P$  (17) дополнительное слагаемое представляет собой малую, почти квадратичную, функцию этой величины, но при переходе к отрицательным значениям оно очень быстро увеличивается с ростом  $|P|$ . Такой плавный рост минимизируемой величины  $D_E$  (23) не исключает появления решений с очень малыми отрицательными значениями  $P$ , что может быть оправдано небольшими погрешностями в вычислении полей и потока энергии на щели. Эти погрешности оцениваются в процессе вычислений по степени несовпадения различных компонент полей (1) по обе стороны границ разных областей. Расчеты показали, что исключение области предельно малых  $|\text{Im } k|$  при поиске комплексного волнового числа  $k$  не приводит к заметному увеличению данных погрешностей и не противоречит требованию выполнения граничных условий задачи. Из рис. 2 видно, что в этой области величина функционала  $D$  меняется значительно медленнее, чем в области  $P > 0$ . Погрешность граничных условий здесь примерно одинакова и не стремится к нулю при  $\text{Im } k \rightarrow 0$ .

Для цилиндрического резонатора с параметрами (22) проводился полный расчет параметров резонансного поля во всем пространстве. В процессе минимизации функционала (17), (23) было установлено, что собственным колебаниям резонатора соответствует следующее значение волнового числа:  $k = 0.767779 - 5.589 \cdot 10^{-6}i$ . Результаты расчетов для пространственного распределения величины различных компонент электрического поля в одном и том же масштабе представлены на рис. 3. Поля симметричны относительно осей  $\rho$  и  $z$ , и потому показаны только для одной четверти плоского пространства  $\rho \geq 0, z \geq 0$ . При расчетах учитывалось, что у полевых функций (10) и соответствующих компонент электрического и магнитного полей (1) во внешней области подынтегральные функции становятся сильно осциллирующими при больших значениях координат  $\rho$  и  $z$ . Для вычисления интегралов от таких функций использовалась модифицированная формула средних [16].

Как видно из рис. 3, компоненты полей  $E_\rho$  и  $E_z$  достигают очень большой величины на краях щели. На малых расстояниях  $r$  от края это соответствует сингулярностям типа  $r^{-1/3}$ , которые должны возникать на краях щели как на ребрах прямоугольного клина [2,4,9]. В нашем случае величина поля на ребрах остается конечной, потому



**Рис. 3.** Пространственное распределение величины компонент электрического поля  $E_\rho$  (a),  $E_\phi$  (b) и  $E_z$  (c) в плоскости  $\rho z$  цилиндрической системы координат для гибридной моды  $H_{115}$  цилиндрического резонатора, представленного на рис. 1, и параметрами (22). Для полей вне резонатора (нижние части рисунков) вертикальный масштаб увеличен в 2000 раз по сравнению с масштабом внутри резонатора и внутри щели (верхние части рисунков).

что при его вычислении использовалось конечное число простых мод (7), (8), (10) с ограниченной величиной поля. Впрочем, и на практике бесконечные значения полей на ребрах также не наблюдаются, поскольку идеально проводящие поверхности и правильные углы при малых масштабах являются теоретическими идеализациями.

## Заключение

Проведенный анализ задачи дифракции резонаторного излучения на щели показал, что в стационарном приближении без формального учета источников возбуждения комплексную резонансную частоту собственных колебаний резонансной системы нельзя определить на основе одних амплитудных граничных условий. Устойчивый алгоритм нахождения этой частоты, полученный после регуляризации системы амплитудных уравнений, ведет в область малых значений мнимой части комплексного волнового числа, и в пределе — к нулевому ее значению. В этой области большая величина добротности резонатора не соответствует реальным значениям, и потому граничные условия уже не могут служить критерием выбора решения для комплексного волнового числа.

Из рассмотрения потока энергии через щель следует, что подобные решения с аномально большой добротностью обусловлены появлением дополнительных согласованных внешних источников возбуждения вблизи наружных краев щели. Однако в реальных ситуациях источники размещаются только внутри резонатора. Поэтому для получения адекватных решений необходимо учитывать еще и энергетические условия резонанса, связанные с величиной и направлением потока электромагнитной энергии через щель во внешнее пространство. Применение таких условий позволяет исключить из рассмотрения решения с аномально малой величиной мнимой части комплексного волнового числа. Эти соображения следует принимать во внимание при использовании различных методов расчета полей собственных колебаний в резонаторных системах со щелями.

## Список литературы

- [1] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [2] Jones D.S. Acoustic and electromagnetic waves. Oxford: Clarendon Press, 1989. 746 p.
- [3] Owyang G.H. Foundations for microwave circuits. New York: Springer, 1989. 881 p.
- [4] Григорьев А.Д., Янкевич В.Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. Численные методы расчета и проектирования. М.: Радио и связь, 1984. 248 с.
- [5] Kuharchik P.D., Titovitsky I.A., Belyachits A.Ch., Kourilo N.I. // Summ. Contr. on „Electromagnetic Wave Interaction with Water and Moist Substances“. New York: TAB-IEEE Press, 1996. P. 135–137.
- [6] Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А. // Радио-техника и электроника. 2001. Т. 46. № 5. С. 522–529.

- [7] Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 540 с.
- [8] Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 432 с.
- [9] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 328 с.
- [10] Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1969. 192 с.
- [11] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
- [12] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2002. 734 с.
- [13] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [14] Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А. // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 5. С. 551–558.
- [15] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
- [16] Сердюк В.М. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 113–120.