

## О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта

© А.Ю. Жалнин, С.П. Кузнецов

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН,  
410019 Саратов, Россия  
e-mail: spkuz@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 19 июня 2006 г.)

Исследуется система, состоящая из пары связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля, у которых характерные частоты генерации отличаются в два раза, внешнее воздействие состоит в медленной периодической модуляции управляющего генерацией параметра, и добавлено дополнительное воздействие на частоте, находящейся в иррациональном отношении с частотой модуляции. Показано, что изменение фазы колебаний осцилляторов за период модуляции параметра приближенно описывается двумерным отображением на торе, имеющим грубый (структурно устойчивый) странный нехаотический аттрактор Ханта и Отта. Представлены результаты расчетов количественных характеристик аттрактора исходной системы неавтономных связанных осцилляторов (показатель фазовой чувствительности, структуры и скейлинг рациональных аппроксимаций, ляпуновские показатели и их зависимость от параметров), подтверждающие наличие странного нехаотического аттрактора типа Ханта и Отта.

PACS: 05.45.-a

### Введение

Нелинейные системы, динамика которых происходит в присутствии зависящего от времени внешнего воздействия, широко распространены в природе и технике и привлекают значительное внимание исследователей. Их классифицируют как неавтономные системы. Даже в случае простого гармонического воздействия в нелинейной системе могут возникать разнообразные нетривиальные типы поведения, например, переход от периодических колебаний к хаосу или, наоборот, подавление хаоса с возникновением регулярных движений. Круг феноменов неавтономной нелинейной динамики значительно расширяется при рассмотрении воздействия более сложных сигналов — многочастотных, хаотических и стохастических; при этом становятся возможными, например, такие явления как хаотическая синхронизация или стохастический резонанс.

После периодического, следующим по сложности способом воздействия на систему является квазипериодическое, которое в простейшем случае достигается посредством суперпозиции двух гармонических сигналов с иррациональным соотношением частот. Отличительной особенностью квазипериодически возбуждаемых систем является наличие в них особого типа динамического поведения, имеющего своим образом в фазовом пространстве странный нехаотический аттрактор (СНА) [1]. Системы со СНА относятся к нехаотическим в смысле отсутствия положительных ляпуновских показателей и экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий, но при этом обладают достаточно сложными и нетривиальными свойствами (фракталоподобная геометрия аттрактора, сингулярно-непрерывный спектр и пр.) [2]. Начиная с 1984 г., когда СНА был впервые введен в рассмотрение, как новый фундаментальный тип аттрактора, этот объект пристально изучался теоретически

и численно [3–17], а также экспериментально [18–28]. С точки зрения возможных приложений, интерес к СНА обусловлен, в частности, потенциальной применимостью синхронных подсистем с соответствующим типом динамики для скрытой передачи информации [29,30].

Следует признать, что имеющиеся наблюдения СНА в численных и натуральных экспериментах, несмотря на свою многочисленность и убедительность, оставляют открытыми два существенных вопроса. Во-первых, даже весьма изощренные численные методы, предложенные для идентификации СНА, строго говоря, не дают гарантии, что наблюдаемый аттрактор действительно сохраняет фракталоподобную структуру в сколь угодно малых масштабах и является „странным“, не будучи образцом пусть сложного, но все же регулярного многочастотного режима. Во-вторых, СНА, встречающиеся обычно в области параметров между квазипериодической и хаотической динамикой, обладают высокой чувствительностью по отношению к малой вариации параметров системы. Благодаря сложному устройству таких пограничных областей, малое изменение управляющих параметров может приводить к существенным изменениям количественных характеристик СНА (ляпуновский показатель, показатели параметрической и фазовой чувствительности) и даже к качественным изменениям, когда режим СНА замещается квазипериодическим или хаотическим поведением.

В силу названных обстоятельств, особого внимания заслуживает пример СНА, предложенный недавно Хантом и Оттом [15,16], который характеризуется свойством грубости или структурной устойчивости, т.е. детали динамики нечувствительны к вариации уравнений и выбору значений параметров. Существование и вероятностно-метрические свойства СНА этого типа оказалось возможным строго обосновать. Речь, однако,

идет о классе систем, описываемых итерируемыми отображениями специального вида — искусственными моделями, которые отвечают динамике в дискретном времени, причем в качестве фазового пространства выступает поверхность двумерного тора. Возникает закономерный вопрос — можно ли привести физический пример, в котором присутствовал бы данный тип динамики?

В настоящей работе рассматривается система, допускающая физическую реализацию построенная из двух связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля. Внешнее воздействие осуществляется посредством медленной периодической модуляции управляющего возникновением генерации параметра в двух подсистемах в противофазе, и, кроме того, добавлено дополнительное воздействие на частоте, находящейся в иррациональном отношении с частотой модуляции. На основе качественных рассуждений и численных результатов показано, что за период модуляции динамика пары переменных, отвечающих за фазу колебаний и фазу дополнительного воздействия, приближенно описывается отображением на двумерном торе, относящимся к классу моделей Ханта и Отта и демонстрирующим грубый СНА [15]. Численные расчеты подтверждают, что структура аттрактора устойчива по отношению к вариации параметров: аттрактор данного определенного типа наблюдается в широкой области пространства параметров. Основная динамическая характеристика — наибольший нетривиальный ляпуновский показатель аттрактора — в области существования структурно устойчивого СНА оказывается плавно меняющейся функцией параметров системы. Характеристики СНА предложенной системы, полученные на основе разработанных в литературе методов [2,7], хорошо согласуются с аналогичными характеристиками аттрактора в модельном отображении.

### Модель Ханта и Отта

Предложенное Хантом и Оттом отображение имеет вид [15]:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \theta_n + \eta F(\varphi_n, \theta_n) \pmod{2\pi}, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\omega \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $F(\varphi, \theta)$  — непрерывная, гладкая функция, имеющая период  $2\pi$  по обоим аргументам,  $\eta$  — параметр нелинейности,  $\omega$  — иррациональный параметр, характеризующий частоту квазипериодического воздействия.

В соответствии с результатами Ханта и Отта, при значении параметра нелинейности, меньше критического  $0 < |\eta| < \eta_c$ , в системе (1) наблюдается аттрактор, характеризуемый следующими свойствами:

1) показатель Ляпунова, ассоциирующийся с возмущением переменной  $\varphi$ , отрицательный

$$\sigma_\varphi = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=1}^n \ln |1 + \eta F'_\varphi(\varphi_i, \theta_i)| < 0; \quad (2)$$

2) емкостная размерность  $D_0 = 2$ , и информационная размерность  $D_1 = 1$  (различие этих величин свидетельствует о фрактальной природе аттрактора);

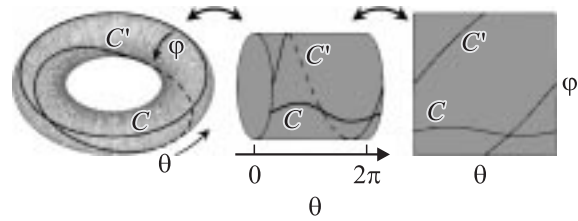


Рис. 1. Схематическое изображение результата однократного действия отображения (1) на замкнутую кривую, обходящую тор в направлении  $\theta$ .

3) имеет место структурная устойчивость динамики по отношению к малым возмущениям системы (1), не выводящим ее из класса, определенного сформулированными условиями.

Согласно анализу Ханта и Отта, подоплекой присутствия грубого СНА служит топологическая природа отображения на двумерном торе (рис. 1). А именно, кривая  $C$ , огибающая тор вдоль параллели, трансформируется при воздействии отображения в кривую  $C'$ , совершающую один оборот по меридиану и один по параллели. При каждой новой итерации отображения количество витков образа по меридиану увеличивается на единицу, а в пределе большого числа шагов стремится к бесконечности. В присутствии неоднородности, вносимой добавленным в первое уравнение нелинейным членом, это имеет следствием фрактальную природу распределения инвариантной меры на аттракторе.

В качестве примера рассмотрим отображение (1) с нелинейной функцией  $F(\varphi, \theta) = \sin 2\varphi$  (в этом случае, как можно показать,  $\eta_c = 0.5$ ), и зададим параметр частоты равным иррациональному числу  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$  (обратное „золотое среднее“). На рис. 2 показан вид аттрактора на плоскости переменных  $(\theta, \varphi)$  при  $\eta = 0.3$ , полученный в результате  $10^5$  итераций отображения. Для этого примера полностью применима аргументация

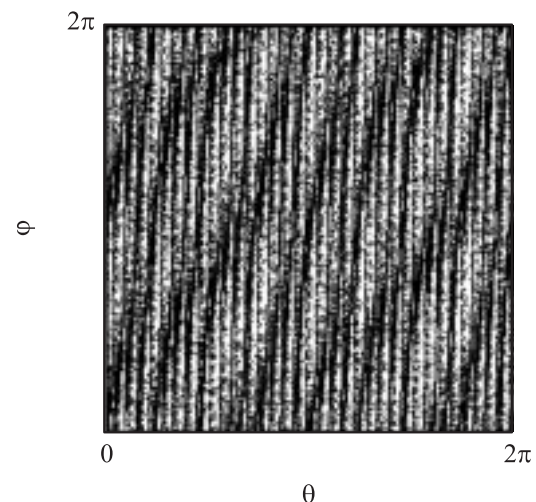


Рис. 2. Фазовый портрет СНА в отображении (1) при  $F(\varphi, \theta) = \sin 2\varphi$ ,  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $\eta = 0.3$ , количество итераций  $10^5$ .

Ханта и Отта, так что можно с определенностью говорить о том, что наблюдаемое поведение отвечает грубому СНА. Благодаря присутствию нелинейного члена в первом уравнении, показатель Ляпунова, связанный с переменной  $\varphi$ , оказывается отличным от нуля и притом отрицательным, как это и должно быть для СНА:  $\sigma_\varphi = -0.0242$ .

## Конструирование и качественный анализ системы связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля

Чтобы построить пример физически реализуемой системы, в которой имела бы место динамика фазовых переменных, отвечающая отображению типа (1), возьмем два связанных неавтономных осциллятора Ван-дер-Поля и используем идею эстафетной передачи возбуждения между подсистемами по аналогии с работами [31,32]. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\ddot{x} - (A \sin 2\pi t/T - x^2)\dot{x} + (2\pi)^2 x = \varepsilon y \sin[2\pi t + \theta], \quad (3a)$$

$$\ddot{y} - (-A \sin 2\pi t/T - y^2)\dot{y} + (4\pi)^2 y = \varepsilon x \sin 2\pi t, \quad (3b)$$

$$\dot{\theta} = 2\pi\omega/T, \quad (3c)$$

где  $x$  и  $y$  характеризуют состояния первого и второго осцилляторов соответственно,  $A$  — амплитуда модуляции управляющего параметра,  $T$  — период модуляции параметра.

Это система двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с собственными частотами  $\omega_0 = 2\pi$  и  $2\omega_0 = 4\pi$ . Благодаря модуляции параметра, ответственного за бифуркацию Андронова–Хопфа, на одном полупериоде первый осциллятор генерирует, а второй находится ниже порога генерации. На следующем полупериоде они меняются ролями. Воздействие первого осциллятора на второй осуществляется через комбинационный член, равный произведению сигнала первого осциллятора на опорный сигнал с частотой  $\omega_0$ . Порождаемая при этом составляющая сигнала на удвоенной частоте  $2\omega_0$  служит затравкой для второго осциллятора, когда тот выходит на порог генерации. В свою очередь, второй осциллятор действует на первый через комбинационный член, представляющий произведение собственного сигнала на опорный периодический сигнал с частотой, состоящей с  $\omega_0$  в иррациональном отношении. Произведение этих сигналов содержит составляющую на разностной частоте, которая служит резонансной для первого осциллятора и выступает в качестве затравки, когда он начинает генерировать. Период модуляции  $T$  в принятой нормировке полагаем целым числом (т.е. он содержит целое число периодов опорного сигнала, присутствующего в правой части второго уравнения). Что касается опорного сигнала в правой части первого уравнения, то его частота, как нетрудно видеть, равна  $\Omega = 2\pi + 2\pi\omega/T$ . Далее мы будем фиксировать параметр  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ .

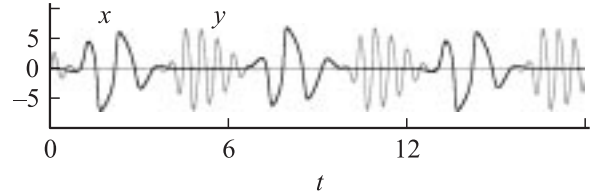


Рис. 3. Временные зависимости переменных  $x(t)$  и  $y(t)$  системы (3) при  $T = 6$ ,  $A = 13$ ,  $\varepsilon = 0.6$  на протяжении трех периодов модуляции.

Типичный пример временных зависимостей  $x(t)$  и  $y(t)$  в процессе функционирования системы (3) при значениях параметров  $T = 6$ ,  $A = 13$ ,  $\varepsilon = 0.6$  представлен на рис. 3. Как можно обнаружить, за период модуляции изменение фазовых переменных, характеризующих систему (3), описывается отображением на торе того же топологического типа, как модель Ханта и Отта. Поясним это на уровне простых качественных рассуждений.

Пусть на некотором периоде в режиме генерации первый осциллятор совершает колебания с начальной фазой  $\varphi$ :

$$x \sim \sin(2\pi t + \varphi), \quad (4)$$

пока второй осциллятор находится ниже порога генерации. В начале периода генерации второго осциллятора „затравка“ для возникающих в нем самоподдерживающихся колебаний обеспечивается присутствующим в правой части уравнения (3b) членом. Его можно представить в виде

$$\begin{aligned} x \sin 2\pi t &= \sin(2\pi t + \varphi) \sin 2\pi t \\ &= (1/2) \cos \varphi - (1/2) \cos(4\pi t + \varphi), \end{aligned}$$

причем существенным, очевидно, является второе слагаемое, отвечающее комбинационной составляющей на второй гармонике, резонансной для второго осциллятора. В результате при возбуждении второй осциллятор унаследует добавку к фазе  $\varphi$ :

$$y \sim -\cos(4\pi t + \varphi + \kappa_0).$$

Поправку к фазе  $\kappa_0$ , возникающую при передаче возбуждения от первого осциллятора ко второму, в рассматриваемом грубом приближении можно считать постоянной.

На следующем этапе процесса, когда первый осциллятор, в свою очередь, переходит в режим генерации, затравку для него обеспечивает член в правой части первого уравнения, который представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} y \sin(2\pi t + \theta) &= -\cos(4\pi t + \varphi + \kappa_0) \sin(2\pi t + \theta) \\ &= -\sin(6\pi t + \varphi + \theta + \kappa_0) + \sin(2\pi t + \varphi - \theta + \kappa_0). \end{aligned}$$

Существенным является второй член суммы — комбинационная составляющая на разностной частоте, которая

попадает в резонансный диапазон частот для первого осциллятора. В результате возникающие колебания будут иметь фазу

$$\varphi' \approx \varphi - \theta + \nu,$$

где мы учли приобретаемую при передаче возбуждения добавку к фазе  $\kappa_1$  и ввели обозначение  $\nu = \kappa_0 + \kappa_1$ .

Итак, заключаем, что приближенное отображение для фазы за период модуляции имеет вид

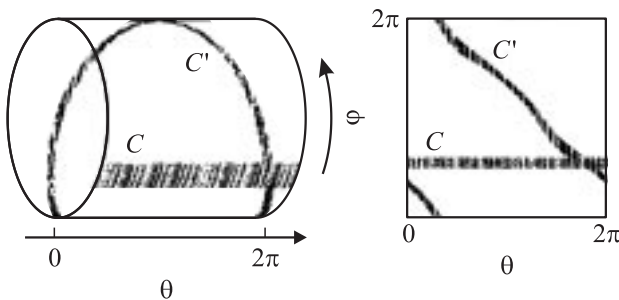
$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &\approx \varphi_n - \theta_n + \nu \pmod{2\pi}, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\omega \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (5)$$

что с точностью до замены ( $\phi = 2\pi - \varphi$ ,  $\vartheta = \theta - \nu$ ) совпадает с отображением (1) при  $\eta = 0$ .

На основе численного решения системы уравнений (3) можно убедиться, что эволюция фазы первого осциллятора на последовательных стадиях его возбуждения действительно следует отображению, принадлежащему тому же топологическому классу, что и модель Ханта и Отта. В процессе численного решения будем определять фазу первого осциллятора для дискретной последовательности моментов времени, скажем,  $t_n = n$ , используя стандартные соотношения:

$$\varphi_n = \begin{cases} \pi/2 - \arctan(\dot{x}(t_n)/2\pi x(t_n)), & x(t_n) > 0, \\ 3\pi/2 - \arctan(\dot{x}(t_n)/2\pi x(t_n)), & x(t_n) < 0. \end{cases} \quad (6)$$

На рис. 4 представлены в графическом виде результаты анализа отображения для фаз, получаемого в численных расчетах при  $T = 6$ ,  $A = 13$ ,  $\varepsilon = 0.6$ . В процессе вычислений определяется фаза первого осциллятора  $\varphi$  и соответствующее значение переменной  $\theta$  в последовательные моменты времени  $t_n$ . При попадании  $\varphi$  в определенный интервал (шириной  $\pi/10$ ) на график наносится серым цветом точка  $(\theta, \varphi)$ , и черным цветом — точка, отвечающая моменту времени через интервал  $T$ . Кривая, вдоль которой располагаются черные точки, имеет образом кривую, вдоль которой лежат серые точки. Топология этих кривых, как видно из рис. 4, соответствует предположениям модели Ханта и Отта:



**Рис. 4.** Численная иллюстрация основного топологического свойства для фазы  $\varphi$  в системе (3): „полоса“ начальных условий, обходящая тор по направлению  $\theta$ , получает дополнительный виток по направлению  $\varphi$ .

кривая  $C$ , огибающая тор вдоль параллели, трансформируется при воздействии отображения в кривую  $C'$ , совершающую один оборот по меридиану и один по параллели.

Ввиду того что реальные колебания в осцилляторах Ван-дер-Поля не являются строго синусоидальными, в уравнение для фазы  $\phi$  при более аккуратном анализе должен быть включен нелинейный член  $P(\phi, \theta)$ . За счет этого в отображении вносится диссипация, и появляется аттрактор в фазовом пространстве. Постулируя форму отображения

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= \phi_n + \theta_n + P(\phi_n, \theta_n) \pmod{2\pi}, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\omega \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (7)$$

можно определить функцию  $P(\phi, \theta)$  эмпирически, на основе численного решения системы уравнений (3) в предположении, что она является непрерывной, гладкой, и имеет период  $2\pi$  по каждому аргументу. Для этого поступим следующим образом. При численном интегрировании системы (3), используя данные, относящиеся к двум последовательным периодам, т.е. к моментам  $t_n = n$  и  $t_{n+1} = n + 1$ , находим величину

$$P_n = \phi_{n+1} - \phi_n - \theta_n \pmod{2\pi}.$$

Далее, используем аппроксимацию в виде двумерного ряда Фурье

$$\begin{aligned} P(\phi, \theta) &= \sum_{k=-r}^r \sum_{m=-r}^r [a_{km} \cos(k\phi + m\theta) \\ &\quad + b_{km} \sin(k\phi + m\theta)] \end{aligned}$$

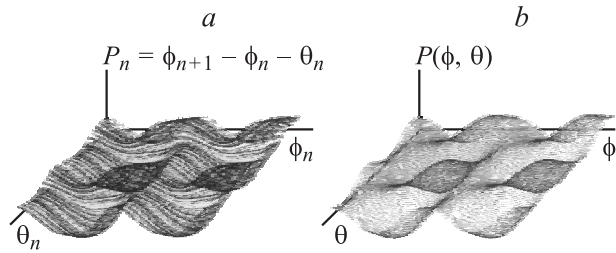
и определим коэффициенты по методу наименьших квадратов так, чтобы достигался минимум невязки

$$\begin{aligned} \Delta(a_{km}, b_{km}) &= \sum_{n=1}^N \min_j [P(\phi_n, \theta_n) \\ &\quad - (\phi_{n+1} - \phi_n - \theta_n + 2\pi j)]^2. \end{aligned}$$

Это достигается решением соответствующей системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_{km}, b_{km}$ . Расчеты были проведены при значениях параметров  $T = 6$ ,  $A = 13$ ,  $\varepsilon = 0.6$ . Оказывается, что члены ряда Фурье первого и третьего порядка практически нулевые с точностью до погрешности вычислений. С учетом же членов нулевого и второго порядка найденное выражение для функции  $P(\phi, \theta)$  имеет вид

$$\begin{aligned} P(\phi, \theta) &\approx -1.5578 + 0.1537 \cos(2\phi - 0.0351) \\ &\quad - 0.1785 \cos(2\theta + 1.4427) \\ &\quad + 0.1300 \cos(2\phi + 2\theta + 0.4251) \\ &\quad - 0.0625 \cos(2\phi - 2\theta + 0.2225). \end{aligned}$$





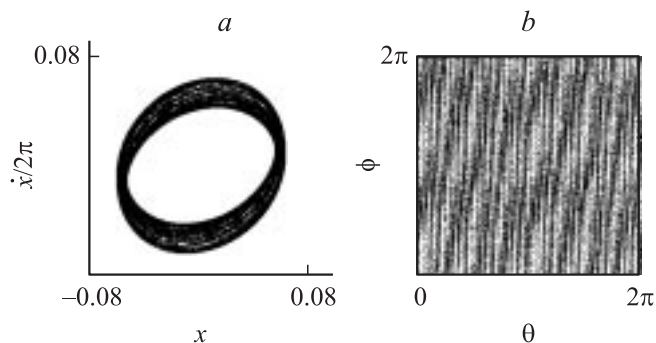
**Рис. 5.** (а) Множество точек  $(\theta_n, \phi_n, P_n)$ , полученных прямым интегрированием системы (3). (б) Аппроксимация функции  $P(\phi, \theta)$  двумерным рядом Фурье.

На рис. 5 показаны в сравнении графики функций  $P(\phi, \theta)$ , построенные непосредственно на основании вычисления величин  $(\phi_n, \theta_n, P_n)$  для последовательных периодов модуляции при численном решении уравнений (3) (диаграмма (а)), и график функции (8) (диаграмма (б)). Можно видеть хорошее соответствие обоих графиков. Поскольку динамика в терминах отображения для фаз относится к тому же топологическому типу, как в модели Ханга и Отта, можно сделать вывод о присутствии в нашей системе грубого СНА.

## Количественные характеристики структурно устойчивого СНА

Обсудим более аккуратно содержание подхода к описанию динамики связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля (3) в терминах отображений.

С учетом двух фазовых переменных, которые отвечают двум составляющим квазипериодического внешнего воздействия, расширенное фазовое пространство системы следует считать шестимерным. Выполняя стробоскопическое сечение потока траекторий в этом пространстве через интервалы времени  $T$ , приходим к пятимерному отображению Пуанкаре, действующему в пространстве векторов  $(x, \dot{x}/2\pi, y, \dot{y}/4\pi, \theta)$ . Аттрактор этого отображения характеризуется пятью показателями Ляпунова. Один из них тривиальный  $\Lambda_0 = 0$  связан с



**Рис. 6.** (а) Проекция фазового портрета системы (3). (б) Фазовый портрет эмпирического отображения (7). Значения параметров см. в тексте.

возмущениями фазы угловой переменной  $\theta$ . Остальные показатели  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , как показывают вычисления, отрицательны.

На рис. 6, а показан фазовый портрет аттрактора стробоскопического отображения системы (3) при  $T = 6$ ,  $A = 13$ ,  $\varepsilon = 0.6$  в виде проекции на плоскость переменных  $(x, \dot{x})$ . На рис. 6, б представлен портрет того же аттрактора в координатах  $(\theta, \phi)$ . Отметим его очевидное визуальное сходство с фазовым портретом аттрактора отображения Ханга и Отта на рис. 2. Такое соответствие имеет место потому, что параметры специально подбирались с тем, чтобы реализовать сходные режимы в системе (3) и отображении (1), в том числе имеющие близкие по величине старшие нетривиальные показатели Ляпунова.<sup>1</sup>

Для вычисления нетривиальных ляпуновских показателей система уравнений (3) решается численно одновременно с комплектом из четырех систем линеаризованных уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} + 2x\dot{x}\delta x - (A \sin 2\pi t/T - x^2)\delta\dot{x} + (2\pi)^2\delta x \\ = \varepsilon\delta y \sin[2\pi t(1 + \omega/T)], \\ \delta\dot{y} + 2y\dot{y}\delta y - (-A \sin 2\pi t/T - y^2)\delta\dot{y} + (4\pi)^2\delta y \\ = \varepsilon\delta x \sin 2\pi t, \end{aligned} \quad (8)$$

с различными начальными условиями. Интегрирование производилось вдоль траектории на аттракторе на интервале времени  $T \times N$ ,  $N = 10^4$ . Через каждый период  $T$  система четырех векторов  $(\delta x, \delta\dot{x}/2\pi, \delta y, \delta\dot{y}/4\pi)$  подвергается процедуре ортогонализации Грама–Шмидта и перенормировке с тем, чтобы норма векторов возмущения стала единичной. При этом вычислялись накапливающиеся суммы логарифмов длин векторов  $S_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , получившихся после ортогонализации, но до нормализации. Ляпуновские показатели для отображения оцениваются по формуле  $\Lambda_k \cong S_k/N$ , а показатели для системы (3) связаны с ними соотношением  $\lambda_k = \Lambda_k/T$ . Для рассматриваемого режима динамики при  $T = 6$ ,  $A = 13$ ,  $\varepsilon = 0.6$  полученные численные значения нетривиальных показателей Ляпунова таковы:  $\lambda_1 \approx -0.0037$ ,  $\lambda_2 \approx -2.74$ ,  $\lambda_3 \approx -2.94$ ,  $\lambda_4 \approx -2.99$ .

Последние три показателя существенно меньше  $\lambda_1$ , и отвечают за быстрое сжатие элемента фазового объема по направлениям в фазовом пространстве, трансверсальным к оси переменной  $\phi$ . Именно это быстрое сжатие обеспечивает возможность редукции в хорошем приближении пятимерного стробоскопического отображения системы (3) к двумерному отображению (7).

Обратимся к другой количественной характеристике СНА — показателю фазовой чувствительности [7], который служит мерой чувствительности типичной траектории на СНА к вариации начальной фазы квазипериодической силы  $\theta$ . Это свойство, собственно и служит

<sup>1</sup> В данном режиме для системы (3) старший нетривиальный показатель Ляпунова  $\Lambda_1 \approx -0.0221$ , а для аттрактора отображения (1), показанного на рис. 2, аналогичный показатель равен  $-0.0242$ .

главным атрибутом странной нехаотической динамики, поскольку обуславливает фрактальные свойства аттрактора.

Для двумерного отображения вида (1) справедлива рекуррентная формула, описывающая динамику возмущения траектории на странном нехаотическом аттракторе при наличии малой вариации фазы  $\delta\theta$ :

$$\delta\varphi_{n+1} = \delta\varphi_n[1 + 2\eta \cos 2\varphi_n] + \delta\theta_n. \quad (9)$$

Итерируя формулу (9) одновременно с исходным отображением (1), получаем значения возмущения  $\delta\varphi_n$  для последовательных моментов дискретного времени  $n$ . Численный анализ показывает, что в зависимости от времени эта величина демонстрирует большие всплески, высота которых становится сколь угодно большой при увеличении числа итераций. Следуя работе [7], вводим функцию фазовой чувствительности

$$\Gamma_N = \min_{\varphi_0, \theta_0} \max_{0 \leq n \leq N} |\delta\varphi_n| \quad (10)$$

и, полагая, что при  $N \rightarrow \infty$  она возрастает по степенному закону

$$\Gamma_N \sim N^\beta,$$

вводим показатель фазовой чувствительности  $\beta$ .

Чтобы найти аналогичный показатель для системы связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля, будем одновременно решать систему уравнений (3) и уравнения в вариациях

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x} + 2x\dot{x}\delta x - (A \sin 2\pi t/T - x^2)\delta\dot{x} + (2\pi)^2\delta x \\ = \varepsilon\delta y \sin[2\pi t(1 + \omega/T)] + 2\pi\varepsilon y\delta\theta \cos[2\pi t(1 + \omega/T)], \\ \delta\ddot{y} + 2y\dot{y}\delta y - (-A \sin 2\pi t/T - y^2)\delta\dot{y} \\ + (4\pi)^2\delta y = \varepsilon\delta x \sin 2\pi t, \end{aligned} \quad (11)$$

где, в отличие от соотношений (8), задано постоянное ненулевое значение вариации фазы внешней силы  $\delta\theta$ . Функцию фазовой чувствительности введем, используя норму вектора возмущения  $(\delta x, \delta\dot{x}/2\pi, \delta y, \delta\dot{y}/4\pi)$ ,  $\delta r = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta\dot{x}/2\pi)^2 + (\delta y)^2 + (\delta\dot{y}/4\pi)^2}$ , а именно,

$$\Gamma_N = \min_{\{x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta\}} \max_{0 \leq t \leq NT} \delta r(t). \quad (12)$$

Графики зависимостей функций фазовой чувствительности от  $N$  в двойном логарифмическом масштабе для систем (1) и (3), полученные численно, представлены на рис. 7. Оценка показателей фазовой чувствительности, как углового коэффициента прямых, аппроксимирующих зависимости на приведенных графиках, дает  $\beta \approx 1.02$  для отображения (1) и  $\beta \approx 0.95$  для системы (3), так что в пределах ошибки  $\pm 0.05$  можно полагать, что для обеих систем  $\beta \approx 1$ .

Следующая общая характеристика аттракторов систем (1) и (3) может быть получена на основе метода рациональных аппроксимаций [7]. Будем аппроксимировать иррациональное число  $\omega$  — обратное „золотое

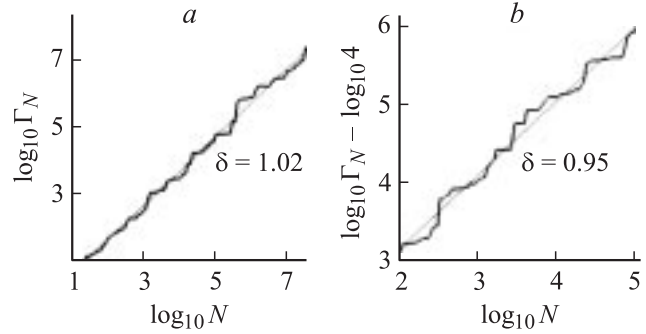
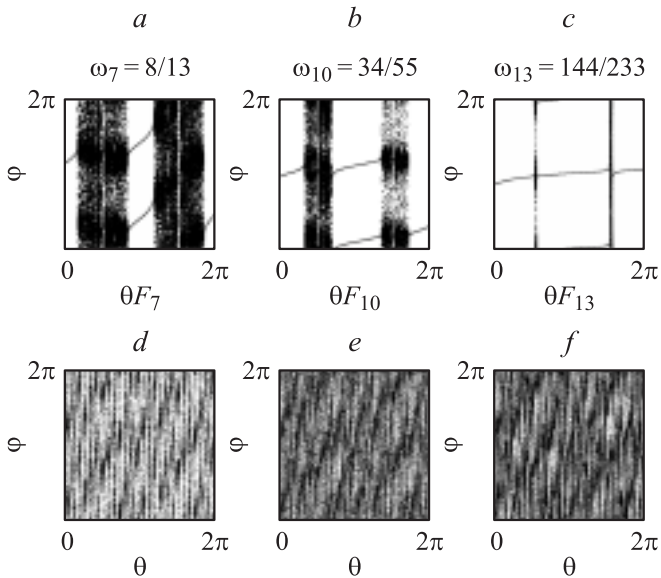


Рис. 7. Функции фазовой чувствительности, рассчитанные для ансамблей из 50 траекторий со случайно выбранными начальными условиями: (а) отображения (1) и (б) системы (3).

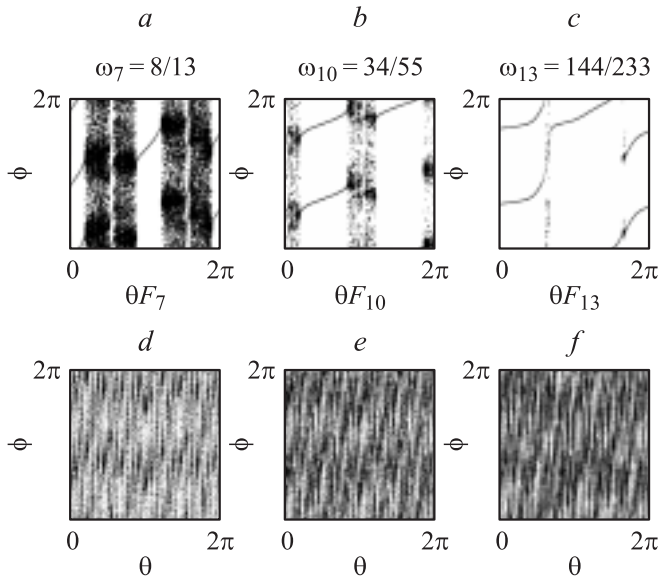
среднее“ отношениями чисел Фибоначчи:  $\omega_k = F_{k-1}/F_k$ , где  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$  с  $F_0 = 0$  и  $F_1 = 1$ . На каждом уровне аппроксимации  $k$  вместо исходной квазипериодически возбуждаемой системы рассмотрим ансамбль систем, возбуждаемых воздействием периода  $F_k$  и отличающихся начальной фазой воздействия  $\theta_0$ . Величина  $\theta_0$ , выступает теперь в качестве дополнительного параметра, в зависимости от величины которого система с периодическим возбуждением может иметь периодический или квазипериодический аттрактор. Благодаря периодичности по фазе, полная аппроксимация на  $k$ -ом уровне получается при непрерывной вариации начальной фазы на базовом интервале  $\theta_0 \in [0, 1/F_k]$ , поскольку оставшийся интервал значений фазы  $[1/F_k, 1)$  покрывается базовым за  $(F_k - 1)$  итераций отображения. Свойства исходной системы достигаются в пределе при  $k \rightarrow \infty$ . При конечном  $k$  совокупность аттракторов, соответствующих разным значениям фазы  $\theta_0$ , можно трактовать как рациональную аппроксимацию аттрактора исходной системы с квазипериодическим возбуждением.

На рис. 8 последовательно представлены три уровня рациональной аппроксимации ( $k = 7, 10, 13$ ) для аттрактора отображения (1). Каждая из картинок по сути представляет собой бифуркационную диаграмму отображения (1) при  $\omega = \omega_k$ , на которой роль параметра играет величина  $\theta_0$ . На диаграммах можно видеть области значений параметра  $\theta_0$ , отвечающие периодическим и непериодическим (фактически, как можно убедиться, квазипериодическим) режимам. Последние представлены „полосами“, заполненными точками на диаграмме. Периодические режимы представляют собой циклы периода  $mF_k$ , где  $m$  — целое, рождаются и исчезают в результате фазозависимых (т.е. происходящих при изменении  $\theta_0$ ) седло-узловых бифуркаций. При увеличении уровня аппроксимации  $k$  доля интервала фазы, занятого периодическими режимами, увеличивается, а доля квазипериодических режимов убывает.

Аналогичным образом может быть аппроксимирован аттрактор системы (3). При замене в последнем уравнении для фазы  $\theta$  иррационального значения  $\omega$  на подходящие рациональные дроби  $\omega_k$  в системе, в зависимости от параметра начальной фазы  $\theta_0$ , могут



**Рис. 8.** Аппроксимирующие множества для аттрактора отображения (1) на разных уровнях  $k$ : (a) и (d)  $\omega_7 = 8/13$ , (b) и (e)  $\omega_{10} = 34/55$ , (c) и (f)  $\omega_{13} = 144/233$ . В верхнем ряду показана структура аппроксимирующего множества на базовом интервале  $\theta_0 \in [0, 1/F_k]$ , а в нижнем приведена полная аппроксимация аттрактора на соответствующем уровне  $k$ .



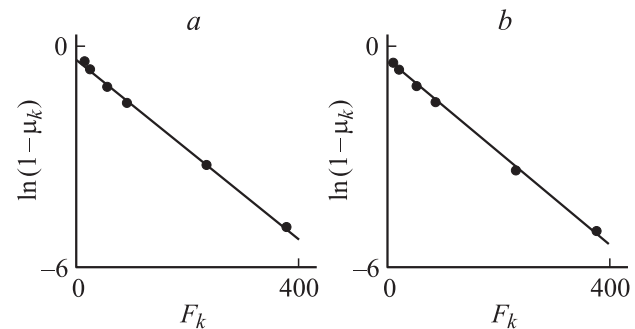
**Рис. 9.** Рациональные аппроксимации аттрактора стробоскопического отображения для системы (3) в координатах „ $\theta-\phi$ “. (a) и (d)  $\omega_7 = 8/13$ ; (b) и (e)  $\omega_{10} = 34/55$ ; (c) и (f)  $\omega_{13} = 144/233$ .

возникать периодические или квазипериодические колебания. Соответственно, от  $\theta_0$  зависит также и вид аттрактора отображения Пуанкаре. На каждом уровне рациональной аппроксимации аттрактора мы можем построить бифуркационную диаграмму, на которой начальная фаза  $\theta_0$  выступает в качестве параметра. На рис. 9 представлены такие диаграммы для стробоскопических

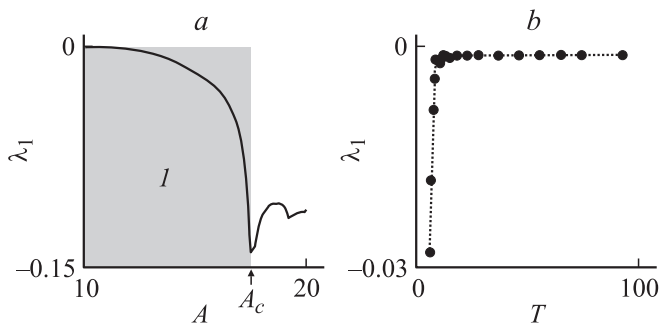
отображений систем (3) с периодическим возбуждением в проекции на плоскость фазовых переменных  $(\theta, \phi)$ . Для удобства сравнения со случаем отображения (1) рассмотрены те же уровни рациональной аппроксимации ( $k = 7, 10, 13$ ). Из рисунка видно, что аппроксимирующее множество состоит из квазипериодических режимов и циклов периода  $mF_k$ , рождающихся в результате фазозависимых седло-узловых бифуркаций. При этом увеличение точности аппроксимации приводит к доминированию периодической компоненты и убыванию его квазипериодической компоненты.

Сопоставляя рис. 8 и 9, можно видеть, что структура аппроксимирующих множеств для аттракторов отображения (1) и системы (3) качественно совпадает. Аппроксимация аттрактора включает квазипериодическую компоненту, основную периодическую компоненту в виде циклов периодов  $F_k$  и  $2F_k$ , а также узкие интервалы существования периодических режимов более высоких периодов. Сравнивая последовательные приближения при увеличении уровня (точности) аппроксимации  $k$ , можно видеть, как убывает квазипериодическая компонента аппроксимации, и во все большей степени доминируют основные периодические компоненты. Обозначим меру периодической компоненты аппроксимации как  $\mu_k$ , а квазипериодической соответственно  $(1 - \mu_k)$ . Зависимость меры квазипериодической компоненты от периода аппроксимации показана на рис. 10, a для отображения (1) и на рис. 10, b для системы (3). Из рисунков видно, что убывание квазипериодической компоненты в обоих случаях происходит по закону  $(1 - \mu_k) \sim \exp\{-\alpha F_k\}$ , причем значения показателей  $\alpha$  для отображения (1) и системы (3) составляют  $\alpha = 0.011$  и  $\alpha = 0.012$ , что совпадает в пределах ошибки регрессии.

Таким образом, оказывается, что количественные характеристики „грубого“ СНА отображения (1) и СНА потоковой системы (3) при рассмотренных значениях параметров примерно совпадают. Численный анализ показывает, что при малой вариации параметров системы (3) структура аппроксимирующего аттрактор множества качественно не меняется. Показатель фазовой чувствительности  $\beta$  и показатель  $\alpha$  для рациональных аппроксимаций слабо зависят от выбора значений параметров в пределах области существования СНА этого



**Рис. 10.** Зависимость меры квазипериодической компоненты рациональной аппроксимации аттрактора от уровня аппроксимации  $k$ : (a) для отображения (1), (b) для системы (3).



**Рис. 11.** Зависимость старшего нетривиального ляпуновского показателя системы (3) от амплитуды модуляции параметра  $A$  (a), и периода модуляции  $T$  (b).  $I$  — грубый СНА.

типа, что свидетельствует о структурной устойчивости аттрактора по отношению к (по крайней мере, малым) возмущениям уравнений системы (3).

Структурно устойчивый странный нехаотический аттрактор реализуется в довольно широком диапазоне параметров потоковой системы (3). Для иллюстрации этого на рис. 11, a представлена зависимость старшего нетривиального ляпуновского показателя  $\lambda_1$  от параметра  $A$  (при  $T = 6$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ). „Грубый“ странный нехаотический аттрактор существует при  $A < A_c$ . Из рисунка можно видеть, как меняется характер зависимости ляпуновского показателя от параметра после рождения грубого СНА: зависимость становится гладкой. (Остальные ляпуновские показатели системы при вариации параметров меняются слабо.) На рис. 11, b представлена зависимость ляпуновского показателя от периода модуляции параметра (при  $A = 16$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ). Видно, что при увеличении периода  $T$  (что аналогично убыванию параметра  $\eta$  отображения (1)) значение показателя выходит на некоторый постоянный, близкий к нулю, но ненулевой уровень. При этом аттрактор системы становится визуально похож на трехчастотный тор, однако, исходя из спектра ляпуновских показателей, его все же следует считать странным нехаотическим.

### Заключение

В данной работе впервые продемонстрирована возможность реализации особого типа неавтономной динамики, отвечающей существованию структурно устойчивого странного нехаотического аттрактора, в потоковой системе. Модельная система сконструирована на базе двух осцилляторов Ван-дер-Поля, возбуждаемых гармоническими сигналами с иррациональным соотношением частот, с параметрами генерации, медленно и противофазно модулирующимися во времени, и с особым типом связи между подсистемами, обеспечивающим эстафетную передачу фазы возбуждения. Динамика фазовых переменных, характеризующих колебания в системе, за период модуляции приближенно описывается двумерным отображением на торе, существование „грубого“

СНА в котором было строго доказано в работе Ханта и Отта. Выводы работы подтверждены качественными рассуждениями и численным исследованием характеристик аттрактора сконструированной системы.

Следует особо подчеркнуть, что предложенная система с очевидностью допускает физическую реализацию, например, на базе электронного устройства, аналогичного описанному в работе [32].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-02-16619, гранта президента РФ (МК-2319.2005.2) и гранта CRDF (BRHE REC-006 ANNEX BF4M06 APPENDIX 10, Y2-P-06-16).

### Список литературы

- [1] Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. // Physica D. 1984. Vol. 13. N 1–2. P. 261–268.
- [2] Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У. // Нелинейные волны / Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 484–509.
- [3] Bondeson A., Ott E., Antonson T.M. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. N 20. P. 2103–2106.
- [4] Ding M., Grebogi C., Ott E. // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 137. N 4–5. P. 167–172.
- [5] Ding M., Grebogi C., Ott E. // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. N 5. P. 2593–2598.
- [6] Pikovsky A.S., Feudel U. // Phys. A: Math. Gen. 1994. Vol. 27. P. 5209–5219.
- [7] Pikovsky A.S., Feudel U. // Chaos. 1995. Vol. 5. N 1. P. 253–260.
- [8] Pikovsky A.S., Zaks M.A., Feudel U., Kurths J. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. N 1. P. 285–296.
- [9] Feudel U., Pikovsky A.S., Kurths J. // Physica D. 1995. Vol. 88. P. 176–186.
- [10] Pokorny P., Schreiber I., Marek M. // Chaos, Solitons and Fractals. 1996. Vol. 7. N 3. P. 409–424.
- [11] Kaneko K., Nishikawa T. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. N 6. P. 6114–6124.
- [12] Glendinning P. // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 244. P. 545–550.
- [13] Osinga H., Wiersig J., Glendinning P., Feudel U. // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2001. Vol. 11. N 12. P. 3085–3107.
- [14] Prasad A., Negi S.S., Ramaswamy R. // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2001. Vol. 11. P. 291–311.
- [15] Hunt B.R., Ott E. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87. N 25. P. 254 101.
- [16] Kim J.-W., Kim S.-Y., Hunt B., Ott E. // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. P. 036 211.
- [17] Kim S.-Y., Lim W., Ott E. // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. P. 056 203.
- [18] Ditto W.L., Spano M.L., Savage H.T. et al. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. N 5. P. 533–536.
- [19] Vohra S.T., Bucholtz F., Koo K.P., Dagenais D.M. // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 66. N 2. P. 212–215.
- [20] Zhou T., Moss F., Bulsara A. // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. N 8. P. 5394–5400.
- [21] Zeyer K.-P., Münster A.F., Schneider F.W. // J. Phys. Chem. 1995. Vol. 99. P. 13 173–13 180.
- [22] Ding W.X., Deutsch H., Dinklage A., Wilke C. // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. N 3. P. 3769–3772.



- [23] *Yang T., Bilimgut K.* // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 236. P. 494–504.
- [24] *Yu Y.H., Kim D.C., Ryu J.Y., Hong S.R.* // J. of the Korean Phys. Society. 1999. Vol. 34. N 2. P. 130–134.
- [25] *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Y.P.* // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. N 6. P. 7287–7830.
- [26] *Sanchez D., Platero G., Bonilla L.L.* // Phys. Rev. B. 2001. Vol. 63. P. 201 306.
- [27] *Vaszlenko A., Feely O.* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12. N 7. P. 1633–1642.
- [28] *Селезнев Е.П., Захаревич А.М.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 131. Вып. 17. С. 13–18.
- [29] *Ramaswamy R.* // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 7294–7296.
- [30] *Zhou C., Chen T.* // Europys. Lett. 1997. Vol. 38. P. 261–265.
- [31] *Kuznetsov S.P.* // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 144 101.
- [32] *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. № 2. С. 400–412