

01;06

Электрофизические свойства трехмерной модели Рэля

© Б.Я. Балагуров, В.А. Кашин

Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

(Поступило в Редакцию 28 февраля 2006 г.)

Предложен новый метод решения задачи о проводимости композитов с регулярной структурой, дающий принципиальную возможность рассматривать среды с включениями произвольной формы. На примере трехмерной модели Рэля — периодической системы со сферическими включениями — рассмотрены не только проводимость, но и ее производные по обоим аргументам, а также двухпараметрическая функция, входящая в выражение для эффективного коэффициента Холла. Результаты численного анализа полученных общих уравнений представлены в графическом виде.

PACS: 72.80.-r, 05.60.-k

Введение

Трудности изучения различных физических свойств неоднородных сред (в том числе композитов) общеизвестны. В то же время в исследовании электрофизических характеристик бинарных композитов достигнут определенный прогресс, особенно значительный в случае двумерных регулярных структур. Так, аналитическое решение задачи о проводимости ряда двумерных двоякопериодических моделей (с диэлектрическими или идеально проводящими включениями) дано в работах [1,2]. В наиболее интересном случае, когда обе компоненты имеют конечную ненулевую проводимость, замкнутое решение соответствующей задачи получено для модели со структурой шахматной доски [1]. Более реалистичная модель — двумерная система с регулярным расположением круговых включений — рассматривалась в работе Рэля [3], где было найдено несколько первых членов вириального разложения для эффективной проводимости σ_e . Решение задачи о проводимости (и о других эффективных характеристиках) двумерной модели Рэля, справедливое при произвольных концентрациях, дано, например, в [4]. Наконец, в работе [5] был предложен общий метод (использующий полную матрицу мультипольных поляризуемостей включения заданной формы) вычисления различных электрофизических характеристик двумерных двухкомпонентных систем с регулярной структурой.

Иная ситуация в исследовании систем с трехмерным распределением включений, изучение электрофизических свойств которых представляет несомненный общенаучный (например, проблема фазовых переходов) и прикладной (микроэлектроника) интерес. В этом случае практически отсутствуют нетривиальные аналитические результаты. Здесь можно отметить ту же статью Рэля [3], где найдены несколько первых членов вириального разложения для проводимости трехмерной модели, а также [6], где метод Рэля использован для вычисления эффективной проводимости

этой модели при немалой концентрации включений. Однако метод Рэля применим только для сферических включений, что не позволяет использовать его для периодических моделей с включениями другой формы.

В настоящей работе предложен более общий, чем в [3,6], подход, который дает принципиальную возможность рассматривать (по аналогии с [5]) трехмерные периодические системы с включениями произвольной формы. В последнем случае необходимо исследовать основные свойства мультипольных поляризуемостей трехмерных тел (что должно составить предмет отдельной работы), так что предлагаемый подход проверялся на модели Рэля. Сравнение с [6] показало, что оба подхода дают одинаковые результаты для эффективной проводимости σ_e во всем рассмотренном интервале изменения концентрации включений. В нашей работе, в отличие от [3,6], вычислены производные от безразмерной эффективной проводимости по обоим ее аргументам, а также двухпараметрическая функция, входящая в выражение для эффективного коэффициента Холла.

Электрическое поле в среде

Исследуемая модель представляет собой изотропную матрицу проводимости σ_1 с одинаковыми включениями сферической формы радиуса R и проводимости σ_2 . Включения образуют регулярную структуру — их центры расположены в узлах простой кубической решетки с периодом $2a$. Эффективная проводимость σ_e такой системы изотропна, что позволяет при вычислении σ_e произвольным образом выбрать направление средней напряженности электрического поля $\langle \mathbf{E} \rangle$. Будем считать для определенности, что $\langle \mathbf{E} \rangle$ направлено вдоль оси z .

Электрический потенциал вне $\psi_1(\mathbf{r})$ и внутри включений $\psi_2(\mathbf{r})$ подчиняется уравнению Лапласа. Поместив начало координат в центр одного из включений, потен-

циал внутри его будем искать в виде

$$\psi_2(r) = \sum_{\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r^l A_{lm}^{(\lambda)} Y_{lm}^{(\lambda)}(\theta, \varphi). \quad (1)$$

Здесь r, θ, φ — сферические координаты, $Y_{lm}^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$ — вещественные сферические функции, определенные в Приложении А. Из (1) для z -составляющей напряженности электрического поля с учетом формулы (B.5) находим

$$\begin{aligned} E_{2z}(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial z} \\ &= -\sum_{\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{l-1} (l+m) \frac{a_{lm}}{a_{l-1,m}} r^{l-1} Y_{l-1,m}^{(\lambda)}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

с a_{lm} из (A.3).

При $\langle \mathbf{E} \rangle \parallel z$ величина $E_z(\mathbf{r})$ обладает очевидными свойствами симметрии

$$E_z(-x, y, z) = E_z(x, y, z), \quad (3)$$

$$E_z(x, -y, z) = E_z(x, y, z), \quad (4)$$

$$E_z(x, y, -z) = E_z(x, y, z). \quad (5)$$

Сравнение (4) с (A.10) показывает, что в (1) и (2) может входить только $\lambda = 1$. Далее, из (3) с учетом (A.7) следует, что индекс m должен быть четным. Поэтому, сравнив (3) с (A.11), заключаем, что величина $l-1$ в (2) должна быть четной, так что l в (1) — нечетно. Заметим наконец, что поворот на 90° вокруг оси z ($\varphi \rightarrow \varphi + \pi/2$) не должен менять картину течения тока. Отсюда следует, что индекс m в (1) кратен 4. Соотношения симметрии для величин $E_x(\mathbf{r})$ и $E_y(\mathbf{r})$ ничего нового не вносят.

Таким образом, потенциал внутри включения принимает окончательный вид

$$\psi_2(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{[l/2]} r^{2l+1} A_{2l+1,4m}^{4m} Y_{2l+1,4m}^{(1)}(\theta, \varphi). \quad (6)$$

Здесь $[l/2]$ — целая часть числа $l/2$. Заметим, что такой же симметрией должен обладать и потенциал вне включений $\psi_1(\mathbf{r})$.

Потенциал $\psi_1(\mathbf{r})$ будем искать в предположении формальной малости отношения R/a . В отсутствие включений искомый потенциал содержит только один, линейный по z , член, отвечающий приложенному к системе внешнему однородному электрическому полю. В низшем по R/a приближении наличие включений может быть учтено суммированием полей от наведенных на них дипольных моментов, рассматриваемых как точечные. Потенциал, создаваемый в точке \mathbf{r} диполем, расположенным в узле \mathbf{r}_n пропорционален $(z - z_n)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3$. Здесь

$$\mathbf{r}_n = 2a(n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}), \quad (7)$$

где $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Суммирование по всем n_i дает вклад диполей в потенциал. Соответствующая сумма,

однако, не является сходящейся, так что ее необходимо регуляризовать. После такой процедуры искомый потенциал в дипольном приближении принимает вид

$$\psi_{1d}(\mathbf{r}) = \beta \{z + B_0 Z(\mathbf{r})\}, \quad (8)$$

$$Z(\mathbf{r}) = \frac{z}{r^3} + \sum_n' \left\{ \frac{z - z_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} + \frac{z_n}{r_n^3} + \frac{3z_n(\mathbf{r}\mathbf{r}_n) - z r_n^2}{r_n^5} \right\}, \quad (9)$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое с $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ опускается.

Перепишем функцию $Z(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{r}) &= \frac{z}{r^3} \\ &- \hat{T}_z \sum_n' \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} - \frac{1}{r_n} - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{r}_n)}{r_n^3} - \frac{3(\mathbf{r}\mathbf{r}_n)^2 - r^2 r_n^2}{2r_n^5} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\hat{T}_z = \partial/\partial z$. Используя разложение (A.15), приведем (10) к виду ($r < a$)

$$Z(\mathbf{r}) = \frac{z}{r^3} - 4\pi \sum_{\lambda} \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{1}{2l+1} g_{lm}^{(\lambda)} \hat{T}_z \left\{ r^l Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{r}) \right\}, \quad (11)$$

где

$$g_{lm}^{(\lambda)} = \sum_n' \frac{1}{(r_n)^{l+1}} Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{r}_n). \quad (12)$$

Здесь и далее для упрощения формул аргумент у $Y_{lm}^{(\lambda)}$ обозначаем через \mathbf{r} вместо \mathbf{r}/r . Из (11), с учетом соотношения (B.5), получаем для $Z(\mathbf{r})$ следующее разложение:

$$Z(\mathbf{r}) = \frac{z}{r^3} - 4\pi \sum_{\lambda} \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{l+m}{2l+1} \frac{a_{lm}}{a_{l-1,m}} g_{lm}^{(\lambda)} r^{l-1} Y_{l-1,m}^{(\lambda)}(\mathbf{r}) \quad (13)$$

с a_{lm} из (A.3).

Заметим, что в силу соотношения (A.10) $g_{lm}^{(2)} = 0$. Далее, из (A.7) и (A.12) следует, что индекс m в (12) кратен 4. Наконец, согласно (A.11), индекс l в (12) четен. Поэтому выражения (11) и (13) принимают соответственно вид ($r < a$)

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{r}) &= -\hat{T}_z \left\{ \frac{1}{a_{00}} \frac{Y_{00}^{(1)}(\mathbf{r})}{r} \right. \\ &\left. + 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{[l/2]} \frac{1}{4l+5} g_{2l+2,4m}^{(1)} r^{2l+2} Y_{2l+2,4m}^{(1)}(\mathbf{r}) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{r}) &= \frac{1}{a_{10}} \frac{Y_{10}^{(1)}(\mathbf{r})}{r^2} \\ &- 8\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{[l/2]} \frac{l+2m+1}{4l+5} \frac{a_{2l+2,4m}}{a_{2l+1,4m}} g_{2l+2,4m}^{(1)} r^{2l+1} Y_{2l+1,4m}^{(1)}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь учтено, что $Y_{00}^{(1)}(\mathbf{r}) = a_{00}$, $rY_{10}^{(1)}(\mathbf{r}) = a_{10}z$. Согласно (8) и (15), потенциал $\psi_{1d}(\mathbf{r})$ имеет ту же симметрию, что и $\psi_2(\mathbf{r})$ из (6).

Вклад высших мультиполей в потенциал $\psi_1(\mathbf{r})$ может быть учтен последовательным дифференцированием функции $Z(\mathbf{r})$ из (9) по декартовым координатам x, y, z . Получающиеся таким образом выражения должны иметь такую же симметрию, как и потенциалы $\psi_2(\mathbf{r})$ и $\psi_{1d}(\mathbf{r})$. С помощью введенных в Приложении В операторов \hat{T}_z и \hat{W}_n полный потенциал $\psi_1(\mathbf{r})$ может быть представлен в виде

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \beta \left\{ z + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[k/2]} B_k^j \hat{W}_{4j}(\hat{T}_z)^{2k-4j} Z(\mathbf{r}) \right\}. \quad (16)$$

Подставив в (16) разложение (15) и воспользовавшись соотношениями из Приложения В, приведем выражение для $\psi_1(\mathbf{r})$ к виду

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \beta \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{[l/2]} \psi_{2l+1,4m}^{(1)}(r) Y_{2l+1,4m}^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (17)$$

где

$$\psi_{2l+1,4m}^{(1)}(r) = \frac{r}{a_{10}} \delta_{l0} \delta_{m0} + \frac{(2l-4m+1)!}{a_{2l+1,4m}} \frac{B_l^m}{r^{2l+2}} - \frac{1}{(2l+4m+1)!} \frac{1}{a_{2l+1,4m}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[k/2]} M_{lk}^{mj} B_k^j r^{2l+1}. \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_{lk}^{mj} &= \theta(l+k-1) \\ &\times \left\{ \frac{1}{1+\delta_{mj}} (2l+2k-4m+4j+2)! g_{2l+2k+2}^{4m-4j} \theta(m-j) \right. \\ &+ \frac{1}{1+\delta_{m+j,0}} (2l+2k-4m-4j+2)! g_{2l+2k+2}^{4m+4j} \\ &+ \left. \frac{1}{1+\delta_{mj}} (2l+2k+4m-4j+2)! g_{2l+2k+2}^{4j-4m} \right. \\ &\times \left. \theta(m-1)\theta(j-m) \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$g_l^m = \frac{1}{a_{lm}} g_{lm}^{(1)} \equiv \frac{1}{(2a)^{l+1}} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} G_l^m \quad (20)$$

с $g_{lm}^{(1)}$ из (12). В (19) $\theta(n) = 1$ при $n \geq 0$ и $\theta(n) = 0$ при $n < 0$, так что $M_{00}^{00} \equiv 0$. В (20) G_l^m — безразмерные величины, ряд значений которых, необходимый при численном решении системы уравнений (26), приведен в таблице.

Потенциалы $\psi_1(\mathbf{r})$ и $\psi_2(\mathbf{r})$ должны удовлетворять стандартным условиям на границе включения

$$\begin{aligned} r = R: \quad \psi_1(\mathbf{r}) &= \psi_2(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial r} &= h \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial r}; \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (21) \end{aligned}$$

Значения безразмерной величины $G_l^m = (2a)^{l+1} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} g_l^m$

l	m	G_l^m	l	m	G_l^m	l	m	G_l^m
4	0	3.108226	24	20	0.847026	36	0	2.527971
6	0	0.573329	26	0	1.380081	36	4	0.529910
6	4	-1.072601	26	4	-0.623441	36	8	0.534750
8	0	3.259293	26	8	-0.635054	36	12	0.543609
8	4	1.225659	26	12	-0.656508	36	16	0.557182
10	0	1.009224	26	16	-0.694098	36	20	0.577498
10	4	-1.016958	26	20	-0.764745	36	24	0.608487
10	8	-1.210422	26	24	-0.947823	36	28	0.659278
12	0	2.891254	28	0	2.597769	36	32	0.760540
12	4	0.891680	28	4	0.600679	38	0	1.485489
12	8	1.069974	28	8	0.610148	38	4	-0.517261
14	0	1.153637	28	12	0.627658	38	8	-0.519181
14	4	-0.848340	28	16	0.657071	38	12	-0.527622
14	8	-0.910342	28	20	0.708014	38	16	-0.539568
14	12	-1.105367	28	24	0.812877	38	20	-0.556405
16	0	2.792356	30	0	1.422131	38	24	-0.581608
16	4	0.800719	30	4	-0.580360	38	28	-0.620689
16	8	0.841132	30	8	-0.588235	38	32	-0.689323
16	12	0.947940	30	12	-0.602610	38	36	-0.860247
18	0	1.258024	30	16	-0.626267	40	0	2.490140
18	4	-0.749851	30	20	-0.664840	40	4	0.491977
18	8	-0.784928	30	24	-0.735123	40	8	0.505317
18	12	-0.845512	30	28	-0.913515	40	12	0.509776
18	16	-1.043665	32	0	2.559862	40	16	0.523721
20	0	2.704225	32	4	0.561958	40	20	0.537200
20	4	0.709961	32	8	0.568639	40	24	0.558673
20	8	0.734552	32	12	0.580664	40	28	0.589874
20	12	0.783313	32	16	0.599981	40	32	0.640286
20	16	0.891188	32	20	0.610679	40	36	0.739461
22	0	1.326810	32	24	0.681485	42	0	1.513120
22	4	-0.677961	32	28	0.784516	42	4	-0.493698
22	8	-0.695552	34	0	1.456749	42	8	-0.498529
22	12	-0.731102	34	4	-0.545068	42	12	-0.503011
22	16	-0.801611	34	8	-0.550884	42	16	-0.510902
22	20	-0.989140	34	12	-0.561127	42	20	-0.519332
24	0	2.645097	34	16	-0.577215	42	24	-0.539529
24	4	0.649245	34	20	-0.601852	42	28	-0.564436
24	8	0.663407	34	24	-0.640896	42	32	-0.603312
24	12	0.689995	34	28	-0.710366	42	36	-0.671131
24	16	0.741114	34	32	-0.884734	42	40	-0.848542

Подстановка (6) и (17), (18) в (21) дает бесконечную систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_{2l+1}^{4m} и B_l^m , которая после исключения A_{2l+1}^{4m} принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{(2l+4m+1)!(2l-4m+1)!}{\delta_l(h)R^{4l+3}} B_l^m \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[k/2]} M_{lk}^{mj} B_k^j = \delta_{l0} \delta_{m0}, \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$\delta_l(h) = (1-h) \left/ \left(h + \frac{2l+2}{2l+1} \right) \right. \quad (23)$$

Коэффициент A_{2l+1}^{4m} выражается через B_l^m следующим образом:

$$A_{2l+1}^{4m} = \beta \frac{1}{1-h} \frac{4l+3}{2l+1} \frac{(2l-4m+1)!}{a_{2l+1,4m}} \frac{1}{R^{4l+3}} B_l^m. \quad (24)$$

Введя „переменные“ ξ_l^m , согласно

$$B_l^m = \xi_l^m \delta_l(h) R^{4l+3}, \quad (25)$$

приведем (22) к виду

$$\xi_l^m + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[k/2]} S_{lk}^{mj} \xi_k^j = \delta_{l0} \delta_{m0}, \quad (26)$$

где

$$S_{lk}^{mj} = \frac{\delta_k(h) R^{4k+3}}{(2l+4m+1)!(2l-4m+1)!} M_{lk}^{mj} \quad (27)$$

с M_{lk}^{mj} из (19).

Проводимость

Заметим, что из (9) следует

$$Z(x, y, z+2a) - Z(x, y, z) = 2a \sum_n \frac{3z_n^2 - r_n^2}{r_n^5} = 4a g_2^0 \quad (28)$$

с g_l^m из (20). Согласно [3], $(2a)^3 g_2^0 = 2\pi/3$, так что

$$Z(x, y, z+2a) - Z(x, y, z) = \frac{1}{(2a)^2} \frac{4\pi}{3}. \quad (29)$$

В то же время производные от $Z(\mathbf{r})$ являются периодическими функциями (с периодом $2a$) по всем трем координатам. Поэтому для разности потенциалов на ячейке

$$U = \psi_1(x, y, -a) - \psi_1(x, y, a) \quad (30)$$

из (16) с учетом (29) получаем

$$U = -2a\beta \left[1 + \frac{4\pi}{3} \frac{1}{(2a)^3} B_0^0 \right]. \quad (31)$$

Для определения протекающего через ячейку полного тока I рассмотрим

$$J = \int_v (j_z - \sigma_1 E_z) d\mathbf{r}, \quad (32)$$

где v — объем элементарной ячейки. С одной стороны

$$J = \int_v j_z d\mathbf{r} - \sigma_1 \int_v E_z d\mathbf{r} = 2aI - \sigma_1 (2a)^2 U. \quad (33)$$

С другой стороны, подынтегральное выражение в (32) отлично от нуля только внутри включения (объема v_2), так что

$$J = -\sigma_1 (1-h) \int_{v_2} E_z d\mathbf{r}. \quad (34)$$

Вычислив интеграл в (34) с помощью (6), получим

$$J = \sigma_1 (1-h) A_1^0 a_{10} \frac{4\pi}{3} R^3 = \sigma_1 \beta 4\pi B_0^0. \quad (35)$$

Из равенства выражений (33) и (35) с учетом (31) находим

$$I = -\sigma_1 (2a)^2 \beta \left[1 - \frac{8\pi}{3} \frac{1}{(2a)^3} B_0^0 \right]. \quad (36)$$

Эффективная проводимость σ_e определяется обычным образом

$$\sigma_e = \frac{I}{2aU}. \quad (37)$$

Поэтому для безразмерной эффективной проводимости $f = \sigma_e/\sigma_1$ из (31), (36) и (37) находим

$$f = \left[1 - \frac{8\pi}{3} \frac{1}{(2a)^3} B_0^0 \right] / \left[1 + \frac{4\pi}{3} \frac{1}{(2a)^3} B_0^0 \right], \quad (38)$$

так что для определения функции f достаточно найти коэффициент B_0^0 . Выразив с помощью (25) B_0^0 через ξ_0^0 , получим

$$f = \frac{1 - 2c\delta_0(h)\xi_0^0}{1 + c\delta_0(h)\xi_0^0}; \quad \delta_0(h) = \frac{1-h}{2+h}, \quad (39)$$

где

$$c = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{(2a)^3} \quad (40)$$

концентрация (доля занимаемого объема) включений.

Решив систему уравнений (26) разложением по степеням $c \ll 1$, для функции f (более точно, для величины $1/\xi_0^0$) получим вириальный ряд, совпадающий с найденным в [3,6–8]. При этом для удобства сравнения с [3] выражение (39) следует записать в виде

$$f = 1 - \frac{3c}{(\delta_0 \xi_0^0)^{-1} + c}. \quad (41)$$

Численное исследование системы (26) показало, в согласии с [6], что величины ξ_l^m с $m \neq 0$ вносят пренебрежимо малый вклад в эффективные характеристики рассматриваемой модели. Поэтому при немалых концентрациях численными методами решалась „усеченная“, состоящая из 90 уравнений (при $m = j = 0$), система (26) при пяти значениях параметра h : $h = 10^n$, где $n = 1, 2, \dots, 5$. Это позволило найти функцию f во всем интервале изменения концентрации $0 \leq c \leq \pi/6$ (рис. 1). При $h \gg 1$ полученная зависимость f от c фактически совпадает с [6].

С эффективной проводимостью непосредственно связаны парциальные среднеквадратичные характеристики напряженности электрического поля. Для двухкомпонентной среды имеем [9]

$$\Psi_1 = \langle \mathbf{e}^2 \rangle^{(1)} = f - h \frac{\partial f}{\partial h}, \quad (42)$$

$$\Psi_2 = \langle \mathbf{e}^2 \rangle^{(2)} = \frac{df}{dh}; \quad \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})/|\langle \mathbf{E} \rangle|. \quad (43)$$

Здесь $\langle(\dots)\rangle$ — среднее по объему образца V , $\langle(\dots)\rangle^{(i)}$ — интеграл по объему i -й компоненты, разделенный на V . В данном случае для Ψ_2 с помощью (6) находим выражение

$$\Psi_2 = \frac{1}{2aU^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{[l/2]} (2l+1)(A_{2l+1}^{4m})^2 R^{4l+3}, \quad (44)$$

а Ψ_1 может быть определено из соотношения $\Psi_1 = f - h\Psi_2$. В (44) U — разность потенциалов, даваемая выражением (31). Зависимость Ψ_1 и Ψ_2 от концентрации представлена на рис. 2 и 3.

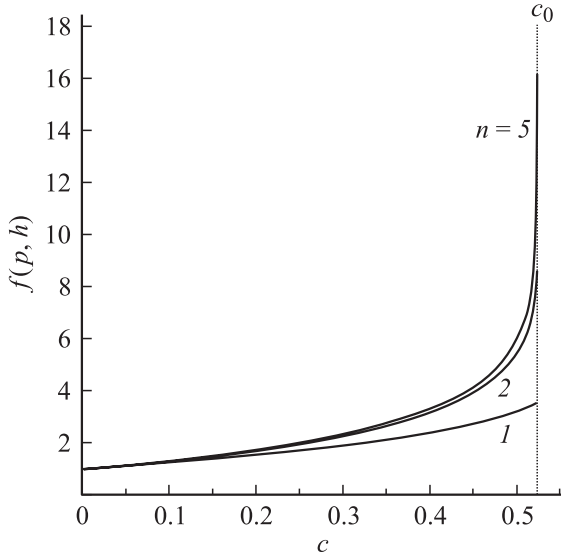


Рис. 1. Зависимость безразмерной эффективной проводимости $f(p, h)$ от концентрации включений $c = 1 - p$ при трех значениях параметра h : $h = 10^n$, где $n = 1, 2, 5$; $c_0 = \pi/6$ — критическая концентрация.

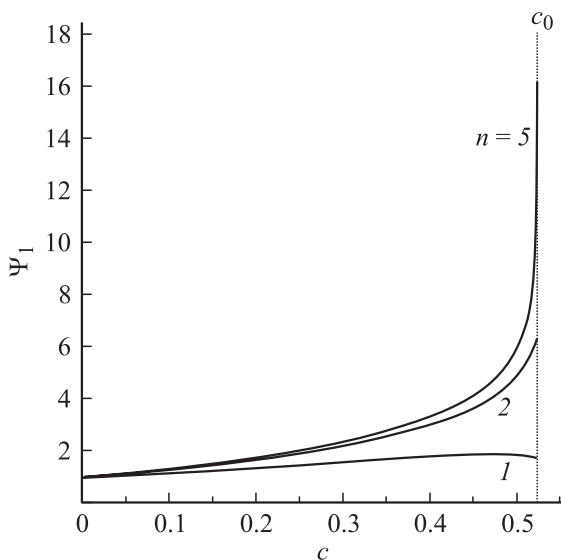


Рис. 2. Величина $\Psi_1 = \langle e^2 \rangle^{(1)} = f - h \frac{df}{dh}$ как функция концентрации включений c при тех же значениях h .

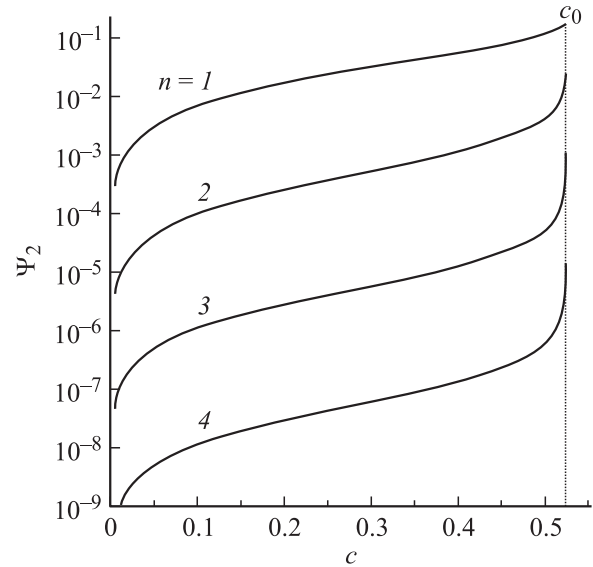


Рис. 3. Величина $\Psi_2 = \langle e^2 \rangle^{(2)} = \partial f / \partial h$ как функция концентрации включений c при четырех значениях параметра h : $h = 10^n$, где $n = 1, 2, 3, 4$.

Для рассматриваемой модели может быть вычислена производная от f и по второму аргументу — по концентрации включений c . Из (39) находим

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -\frac{3\delta_0}{(1 + c\delta_0\xi_0^0)^2} \left(\xi_0^0 + \frac{R}{3} \frac{\partial \xi_0^0}{\partial R} \right); \quad c = \frac{\pi}{6} \left(\frac{R}{a} \right)^3. \quad (45)$$

Для определения производной $\partial \xi_0^0 / \partial R$ про дифференцируем систему уравнений (26) по R :

$$\frac{\partial \xi_l^m}{\partial R} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[k/2]} S_{lk}^{mj} \frac{\partial \xi_k^j}{\partial R} = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{\partial S_{lk}^{mj}}{\partial R} \xi_k^j. \quad (46)$$

Система уравнений (46) имеет такую же, что и (26), структуру, отличаясь от нее видом правой части. Подставив в правую часть (46) значения ξ_l^m , вычисленные из (26), и решив эту систему тем же, что и (26), методом, найдем производные $\partial \xi_l^m / \partial R$. Тем самым величина $\partial f / \partial c$ может быть определена без затруднительного (особенно вблизи критической концентрации $c_0 = \pi/6$) численного дифференцирования. Зависимость $\partial f / \partial c$ от концентрации c при ряде значений аргумента h приведена на рис. 4.

Согласно [10], вблизи критической концентрации функция f при $h = \infty$ меняется логарифмическим образом

$$c \rightarrow c_0: \quad f \simeq \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{c_0 - c}; \quad c_0 = \frac{\pi}{6}, \quad (47)$$

так что

$$c \rightarrow c_0: \quad \frac{\partial f}{\partial c} \simeq \frac{\pi}{2} \frac{1}{c_0 - c}. \quad (48)$$

Определение производной $\partial f / \partial c$ вышеописанным способом подтверждает зависимость (48).

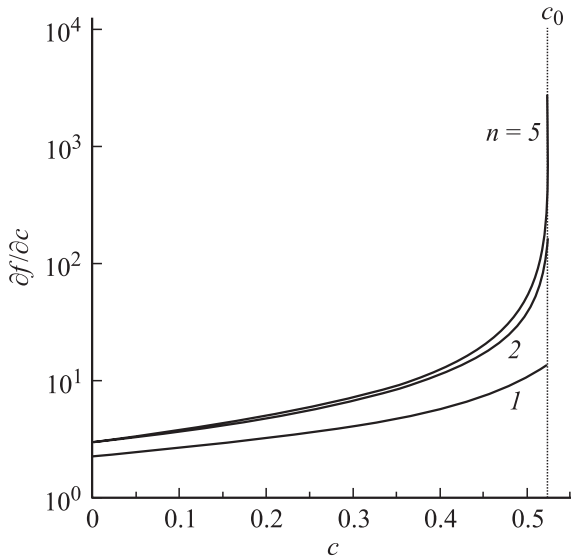


Рис. 4. Производная $\partial f/\partial c$ как функция концентрации включений c при трех значениях параметра h .

В линейном по концентрации c приближении следует положить $\xi_0^0 = 1$, так что (41) принимает вид

$$f = 1 - 3c \frac{1-h}{2+h}, \quad (49)$$

что совпадает с [14]. При $h = \infty$, согласно (49), $f(c, \infty) = 1 + 3c$, так что при $c \rightarrow 0$ имеем $\partial f/\partial c = 3$. Заметим, что это же значение для производной $\partial f/\partial c$ при $c \rightarrow 0$ следует и из формулы (48). Если предположить, что приближенное равенство (48) выполняется и при промежуточных концентрациях, то интегрирование (48) дает следующую интерполяционную формулу для функции $f(c, \infty)$:

$$f(c, \infty) = 1 + \frac{\pi}{2} \ln \frac{c_0}{c_0 - c}; \quad c_0 = \frac{\pi}{6}. \quad (50)$$

Сравнение с результатом численного расчета (при $h = 10^5$) показывает, что формула (50) выполняется с погрешностью не более 0.5% во всем интервале изменения концентрации.

Коэффициент Холла

Проводимость изотропной среды, помещенной в магнитное поле напряженности \mathbf{H} , описывается тензором

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\perp} \delta_{\alpha\beta} + (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) k_{\alpha} k_{\beta} + \sigma_a e_{\alpha\beta\gamma} k_{\gamma};$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{H}/|\mathbf{H}|. \quad (51)$$

Здесь σ_{\parallel} — продольная, σ_{\perp} — поперечная и σ_a — холловская составляющие тензора $\hat{\sigma}$. В слабом магнитном поле ($\mathbf{H} \rightarrow 0$) величина σ_a линейна по $|\mathbf{H}|$. В том же приближении холловская составляющая эффективного

тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$ бинарного композита имеет вид [7]

$$\sigma_{ae} = \sigma_{a2} + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2}) \varphi_a(p, h). \quad (52)$$

В (52) гальваномагнитные характеристики компонент выделены в явном виде, а функция $\varphi_a(p, h)$ (где $p = 1 - c$ — концентрация первой компоненты и $h = \sigma_2/\sigma_1$) определяется свойствами среды при $\mathbf{H} = 0$. Соответственно для эффективного коэффициента Холла R_e имеем следующее выражение:

$$R_e = \frac{h^2 R_2}{f^2} + (R_1 - h^2 R_2) \mathcal{R}, \quad (53)$$

$$\mathcal{R}(p, h) = \frac{\varphi_a(p, h)}{[f(p, h)]^2}. \quad (54)$$

Здесь $R_i = H^{-1} \sigma_{ai}/\sigma_i^2$ — коэффициент Холла i -й компоненты.

Обозначим через $\mathbf{E}^{(v)}(\mathbf{r})$ напряженность электрического поля в среде, определенную в рамках задачи о проводимости (при $\mathbf{H} = 0$) для заданного $\langle \mathbf{E}^{(v)} \rangle$, где индекс v означает, что среднее поле направлено вдоль оси v . Если магнитное поле параллельно оси y , то функция $\varphi_a(p, h)$ выражается через напряженность электрического поля $\mathbf{E}^{(v)}(\mathbf{r})$ следующим образом [9]:

$$\varphi_a(p, h) = 1 - \frac{\langle E_x^{(x)} E_z^{(z)} \rangle - \langle E_x^{(z)} E_z^{(x)} \rangle}{\langle E_x^{(x)} \rangle \langle E_z^{(z)} \rangle}. \quad (55)$$

Здесь $\langle (\dots) \rangle^{(2)}$ — то же, что и в (43).

Для напряженности электрического поля $\mathbf{E}_2^{(z)}(\mathbf{r})$ внутри включения имеем

$$E_{2z}^{(z)}(\mathbf{r}) = -\hat{T}_z \psi_2(\mathbf{r}), \quad E_{2x}^{(z)}(\mathbf{r}) = -\hat{W}_1 \psi_2(\mathbf{r}) \quad (56)$$

с $\psi_2(\mathbf{r})$ из (6).

Для того чтобы найти поле $\mathbf{E}^{(x)}(\mathbf{r})$, перейдем к новой системе координат (x', y', z') , повернув исходную систему (x, y, z) на 90° вокруг оси y так, чтобы новая ось z' была направлена вдоль прежней оси x . В новой системе координат средняя напряженность электрического поля направлена вдоль оси z' , что позволяет воспользоваться решением задачи о проводимости, полученным в системе (x, y, z) . Однако система (x', y', z') является левосторонней, поэтому необходимо дополнительно сделать замену $x' \rightarrow -x'$, так что

$$E_{2x}^{(x)} = E_{2z'}^{(z')} = -\frac{\partial \psi_2^{(z')}}{\partial z'}, \quad E_{2z}^{(x)} = -E_{2x'}^{(z')} = \frac{\partial \psi_2^{(z')}}{\partial x'}. \quad (57)$$

Соответствующий потенциал внутри включения $\psi_2^{(z')}$ дается выражением (6) с заменой $Y_{2l+1,4m}^{(1)}(\theta, \varphi)$ на $Y_{2l+1,4m}^{(1)}(\theta', \varphi')$. В силу соотношения (A.7) потенциал $\psi_2^{(z')}(\mathbf{r}')$ не меняется при преобразовании $x' \rightarrow -x'$.

Сферическая функция $Y_{lm}^{(1)}(\theta, \varphi)$ при повороте системы координат вокруг оси y на угол γ преобразуется следующим образом [15]:

$$Y_{l0}^{(1)}(\theta', \varphi') = d_{00}^l(\gamma) Y_{l0}^{(1)}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m'=1}^l \left[d_{m'0}^l(\gamma) + (-1)^{m'} d_{-m'0}^l(\gamma) \right] Y_{lm'}^{(1)}(\theta, \varphi) \quad (58)$$

при $m = 0$ и

$$Y_{lm}^{(1)}(\theta', \varphi') = \sqrt{2} d_{0m}^l(\gamma) Y_{l0}^{(1)}(\theta, \varphi) + \sum_{m'=1}^l \left[d_{m'm}^l(\gamma) + (-1)^{m'} d_{-m'm}^l(\gamma) \right] Y_{lm'}^{(1)}(\theta, \varphi) \quad (59)$$

при $m \geq 1$.

Коэффициенты этого преобразования $d_{mm'}^l$ являются вещественными функциями угла поворота γ и обладают следующими свойствами симметрии [15]:

$$d_{mm'}^l = (-1)^{m-m'} d_{m'm}^l; \quad d_{mm'}^l = (-1)^{m-m'} d_{-m, -m'}^l. \quad (60)$$

Величины $d_{mm'}^l(\gamma)$ могут быть выражены через полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \gamma)$ [15]. При $\gamma = \pi/2$ эта связь имеет следующий вид [15]:

$$d_{mm'}^l\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+m')!(l-m')!}} P_{l-m}^{(m-m', m+m')}(0). \quad (61)$$

Полиномы Якоби с целыми индексами α и β могут быть представлены в виде [11,12]

$$P_l^{(m, n)}(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^l \frac{(l+m)!}{k!(l+m-k)!} \times \frac{(l+n)!}{(l-k)!(n+k)!} (x-1)^{l-k} (x+1)^k. \quad (62)$$

В результате функция $\varphi_a(p, h)$ из (55) принимает вид

$$\varphi_a(p, h) = 1 - \frac{1}{2aU^2} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} (A_{2l+1}^0)^2 R^{4l+3} J_{l0} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{[l/2]} A_{2l+1}^0 A_{2l+1}^{4m} R^{4l+3} J_{lm} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{[l/2]} \sum_{m_2=1}^{[l/2]} A_{2l+1}^{4m_1} A_{2l+1}^{4m_2} R^{4l+3} J_{lm_1 m_2} \right\} \quad (63)$$

с U из (31). Здесь

$$J_{l0} = (2l+1) P_{2l}^{(0,0)}(0), \quad (64)$$

$$J_{lm} = \frac{\sqrt{2}}{2^{4m-1}} \frac{\sqrt{(2l+4m+1)!(2l-4m+1)!}}{(2l)!} P_{2l-4m}^{(4m, 4m)}(0), \quad (65)$$

$$J_{lm_1 m_2} = \frac{1}{(2l+1)2^{4m_1-1}} \left[\frac{(2l+4m_1+1)!(2l-4m_1+1)!}{(2l+4m_2+1)!(2l-4m_2+1)!} \right]^{1/2} \times \left\{ (2l+4m_2+1)(2l-4m_2+1) P_{2l-4m_1}^{(4m_1-4m_2, 4m_1+4m_2)}(0) + 16m_1 m_2 P_{2l-4m_1+1}^{(4m_1-4m_2, 4m_1+4m_2)}(0) \right\}. \quad (66)$$

Выражение (66) написано для случая $m_1 \geq m_2$; при $m_1 < m_2$ в (66) следует произвести замену $m_1 \leftrightarrow m_2$.

Вычисленная с помощью формул (63)–(66) зависимость функций $\varphi_a(p, h)$ и $\mathcal{R}(p, h)$ от концентрации включений $c = 1 - p$ представлена на рис. 5 и 6. Заметим, что при $h = 10^5$ $\varphi_a(p, h) = 1$ практически во всем

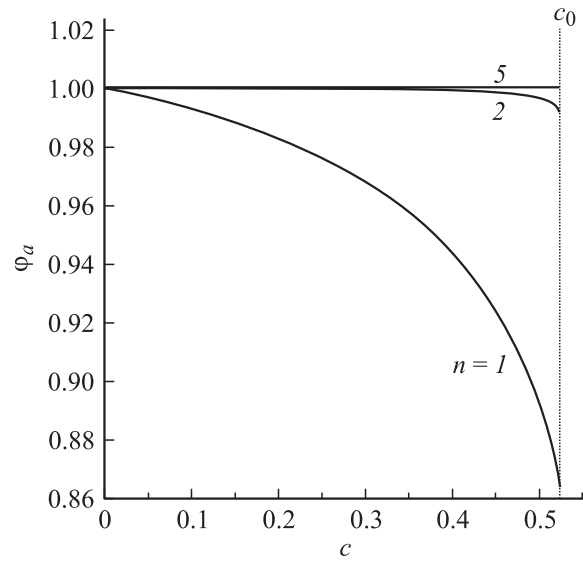


Рис. 5. Зависимость функции $\varphi_a(p, h)$ от концентрации включений $c = 1 - p$ при трех значениях параметра h .

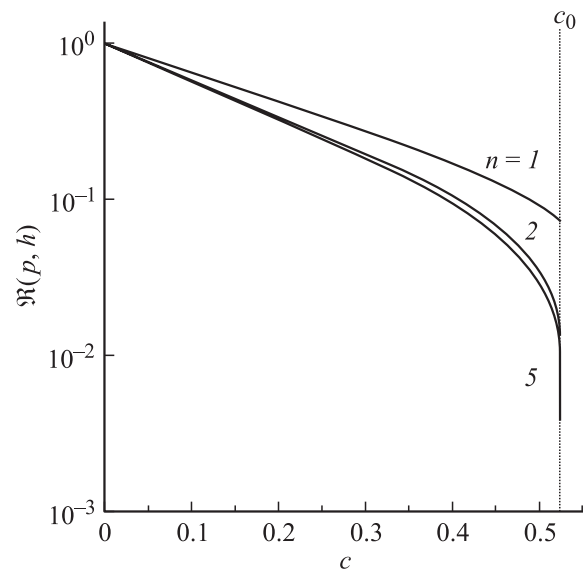


Рис. 6. Зависимость функции $\mathcal{R} = \varphi_a / f^2$ от концентрации включений $c = 1 - p$ при трех значениях параметра h .

интервале изменения концентрации c . В этом случае имеем, в согласии с [13], $\sigma_{ae} = \sigma_{a1}$ и $Re = R_1/f^2$, так как включения ведут себя как идеально проводящие.

При малых концентрациях включений в качестве $E^{(v)}$ в (55) следует взять поле внутри уединенной сферы [14]

$$\mathbf{E}^{(v)} = \frac{3\sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{E}_0^{(v)}, \quad (67)$$

где $\mathbf{E}_0^{(v)}$ — напряженность внешнего электрического поля. В этом случае подстановка (67) в (55) (с учетом $\langle \mathbf{E}^{(v)} \rangle = \mathbf{E}_0^{(v)}$) для функции $\varphi_a(p, h)$ дает выражение

$$\varphi_a(p, h) = 1 - \frac{9c}{(2+h)^2}, \quad (68)$$

справедливое в линейном по концентрации $c = 1 - p$ приближении. Нетрудно видеть, что в этом приближении выражение (68) следует и из формулы (63).

Приложение А

Введем вещественные сферические функции $Y_{lm}^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$ ($\lambda = 1, 2; l = 0, 1, 2, \dots$) согласно

$$Y_{lm}^{(1)}(\theta, \varphi) = a_{lm} P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad 0 \leq m \leq l; \quad (A.1)$$

$$Y_{lm}^{(2)}(\theta, \varphi) = a_{lm} P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi, \quad 1 \leq m \leq l; \quad (A.2)$$

$$a_{lm} = \left[\frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{m0})} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2}. \quad (A.3)$$

Здесь θ и φ — углы сферической системы координат, $P_l^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра [11,12], δ_{m0} — символ Кронекера.

Для $l = 0$ имеем $Y_{00}^{(1)} = a_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$, а при $l \geq 1$ величины $Y_{lm}^{(\lambda)}$ могут быть выражены через составляющие единичного вектора \mathbf{n} ($n_x = \sin \theta \cos \varphi$, $n_y = \sin \theta \sin \varphi$, $n_z = \cos \theta$):

$$Y_{11}^{(1)}(\mathbf{n}) = -\sqrt{\frac{3}{4}} n_x, \quad Y_{11}^{(2)}(\mathbf{n}) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_y, \\ Y_{10}^{(1)}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_z; \quad (A.4)$$

$$Y_{20}^{(1)}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3n_z^2 - 1), \quad Y_{21}^{(1)}(\mathbf{n}) = -\sqrt{\frac{15}{4\pi}} n_x n_z, \\ Y_{22}^{(1)}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{15}{16\pi}} (n_x^2 - n_y^2); \quad (A.5)$$

$$Y_{21}^{(2)}(\mathbf{n}) = -\sqrt{\frac{15}{4\pi}} n_y n_z, \quad Y_{22}^{(2)}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} n_x n_y, \dots \quad (A.6)$$

Произведя в (A.1) и (A.2) замены $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$ ($n_x \rightarrow -n_x$), $\varphi \rightarrow -\varphi$ ($n_y \rightarrow -n_y$) и $\theta \rightarrow \pi - \theta$

($n_z \rightarrow -n_z$), найдем для функций $Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{n}) = Y_{lm}^{(\lambda)}(n_x, n_y, n_z)$ следующие соотношения симметрии:

$$Y_{lm}^{(1)}(-n_x, n_y, n_z) = (-1)^m Y_{lm}^{(1)}(n_x, n_y, n_z), \quad (A.7)$$

$$Y_{lm}^{(2)}(-n_x, n_y, n_z) = -(-1)^m Y_{lm}^{(2)}(n_x, n_y, n_z); \quad (A.8)$$

$$Y_{lm}^{(1)}(n_x, -n_y, n_z) = Y_{lm}^{(1)}(n_x, n_y, n_z), \quad (A.9)$$

$$Y_{lm}^{(2)}(n_x, -n_y, n_z) = -Y_{lm}^{(2)}(n_x, n_y, n_z); \quad (A.10)$$

$$Y_{lm}^{(\lambda)}(n_x, n_y, -n_z) = (-1)^{l+m} Y_{lm}^{(\lambda)}(n_x, n_y, n_z), \quad (\lambda = 1, 2). \quad (A.11)$$

Кроме того, замена $\varphi \rightarrow (\pi/2) - \varphi$ ($n_x \leftrightarrow n_y$) дает еще два соотношения

$$Y_{l,2m}^{(1)}(n_y, n_x, n_z) = (-1)^m Y_{l,2m}^{(1)}(n_x, n_y, n_z), \quad (A.12)$$

$$Y_{l,2m}^{(2)}(n_y, n_x, n_z) = -(-1)^m Y_{l,2m}^{(2)}(n_x, n_y, n_z). \quad (A.13)$$

Заметим, что система функций $\{Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{n})\}$ ортонормирована

$$\int Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{n}) Y_{l'm'}^{(\lambda')}(\mathbf{n}) d\Omega = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (A.14)$$

где $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Отметим также, что имеет место следующее разложение:

$$r < r' : \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{(r')^{l+1}} \\ \times Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{n}) Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{n}'). \quad (A.15)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$.

Приложение В

Определим следующие операторы:

$$\hat{T}_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{T}_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (B.1)$$

имеющие в сферических координатах вид

$$\hat{T}_{\pm} = e^{\pm i\varphi} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \frac{i}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (B.2)$$

$$\hat{T}_z = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (B.3)$$

Операторы $(\hat{T}_z)^n$ и

$$\hat{W}_n = \frac{1}{2} \{ (\hat{T}_+)^n + (\hat{T}_-)^n \} \quad (B.4)$$

обладают следующими свойствами (для упрощения формул аргумент у $Y_{lm}^{(\lambda)}$ обозначаем через \mathbf{r} вместо \mathbf{r}/r):

$$(\hat{T}_z)^n \{ r^l Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{r}) \} = \frac{(l+m)!}{(l+m-n)!} \frac{a_{lm}}{a_{l-n,m}} r^{l-n} Y_{l-n,m}^{(\lambda)}(\mathbf{r}), \\ (n \leq l-m), \quad (B.5)$$

$$(\hat{T}_z)^n \{r^l Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{r})\} = 0, \quad (n > l - m), \quad (\lambda = 1, 2); \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_n \{r^l Y_{lm}^{(1)}(\mathbf{r})\} &= \frac{a_{lm}}{2a_{l-n,m+n}} r^{l-n} Y_{l-n,m+n}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ &+ (-1)^n \frac{(l+m)!}{(l+m-2n)!} \frac{a_{lm}}{2a_{l-n,m-n}} r^{l-n} Y_{l-n,m-n}^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (n \leq m), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_n \{r^l Y_{lm}^{(1)}(\mathbf{r})\} &= \frac{a_{lm}}{2a_{l-n,m+n}} r^{l-n} Y_{l-n,m+n}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ &+ (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{a_{lm}}{2a_{l-n,n-m}} r^{l-n} Y_{l-n,n-m}^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (n > m); \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} (\hat{T}_z)^n \left\{ \frac{Y_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{r})}{r^{l+1}} \right\} &= (-1)^n \frac{(l-m+n)!}{(l-m)!} \frac{a_{lm}}{a_{l+n,m}} \frac{Y_{l+n,m}^{(\lambda)}(\mathbf{r})}{r^{l+n+1}}, \\ &(\lambda = 1, 2); \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_n \left\{ \frac{Y_{lm}^{(1)}(\mathbf{r})}{r^{l+1}} \right\} &= \frac{a_{lm}}{2a_{l+n,m+n}} \frac{Y_{l+n,m+n}^{(1)}(\mathbf{r})}{r^{l+n+1}} \\ &+ (-1)^n \frac{(l-m+2n)!}{(l-m)!} \frac{a_{lm}}{2a_{l+n,m-n}} \frac{Y_{l+n,m-n}^{(1)}(\mathbf{r})}{r^{l+n+1}}, \quad (n \leq m), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_n \left\{ \frac{Y_{lm}^{(1)}(\mathbf{r})}{r^{l+1}} \right\} &= \frac{a_{lm}}{2a_{l+n,m+n}} \frac{Y_{l+n,m+n}^{(1)}(\mathbf{r})}{r^{l+n+1}} \\ &+ (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{a_{lm}}{2a_{l+n,n-m}} \frac{Y_{l+n,n-m}^{(1)}(\mathbf{r})}{r^{l+n+1}}, \quad (n > m). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

В частности, при $m = 0$ имеем

$$\hat{W}_n \left\{ \frac{Y_{l0}^{(1)}(r)}{r^{l+1}} \right\} = \frac{a_{l0}}{a_{l+n,n}} \frac{Y_{l+n,n}^{(1)}(\mathbf{r})}{r^{l+n+1}}. \quad (\text{B.12})$$

Список литературы

- [1] Емец Ю.П. Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. Киев: Наук. думка, 1986. 192 с.
- [2] Балагуров Б.Я. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. Вып. 4(10). С. 1561–1572.
- [3] Lord Rayleigh // Phil. Mag. 1892. Vol. 34. № 211. P. 481–502.
- [4] Балагуров Б.Я., Кашин В.А. // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. Вып. 5. С. 978–989.
- [5] Балагуров Б.Я. // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. Вып. 3(9). С. 668–677.
- [6] McPhedran R.C., McKenzie D.R. // Proc. R. Soc. Lond. 1978. Vol. A 359. P. 45–63.
- [7] Runge I.Z. // Z. Tech. Phys. 1925. Vol. 6. N 2. P. 61–68.
- [8] Doyle W.T. // J. Appl. Phys. 1978. Vol. 49. N 2. P. 795–797.
- [9] Балагуров Б.Я. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 5(11). С. 1888–1903.
- [10] Keller J.B. // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34. N 4. P. 991–993.
- [11] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
- [12] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973–1974. 296 с.

- [13] Балагуров Б.Я. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. Вып. 2(8). С. 568–584.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 662 с.
- [15] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. 320 с.