

05;12

## Универсальная зависимость критического тока в керамических высокотемпературных сверхпроводниках

© Н.А. Боголюбов

Институт неорганической химии СО РАН,  
630090 Новосибирск, Россия  
e-mail: bna@che.nsk.su

(Поступило в Редакцию 4 апреля 2006 г.)

С помощью анализа экспериментальных данных получено выражение для критического тока керамического образца, имеющего прямоугольное поперечное сечение. Показано, что зависимость критического тока от площади поперечного сечения описывается общей для всех сечений формулой, а функциональная связь между относительным током и относительной площадью сечения является универсальной.

PACS: 75.60.lg

### Введение

Критическое состояние в образце керамического высокотемпературного сверхпроводника (ВТСП) может быть создано либо пропусканием через него транспортного тока критической величины [1–7], либо с помощью внешнего магнитного поля [1,8] или сочетанием обоих приемов [1]. При отсутствии внешнего магнитного поля внешнее по отношению к образцу пространство изотропно. Это значительно упрощает исследуемую систему и позволяет выяснить ряд важных ее свойств. Магнитное поле в такой системе все же присутствует — это поле, созданное транспортным током, так называемое собственное поле. Управлять таким полем можно, меняя поперечные размеры образца. В результате наблюдается размерный эффект — зависимость значения критического тока образца  $I_c$  и его средней плотности  $\langle j_c \rangle$  от размеров поперечного сечения образца [1–7]. Этот эффект использовался нами как инструмент для изучения критического состояния керамического ВТСП образца [4–6]. Было выяснено [4–6,9], что выражение для транспортного критического тока может быть записано в следующем виде:

$$I_c(X, Y, T) = G(X, Y)f(T). \quad (1)$$

Функция  $f(T)$  зависит от температуры и индивидуальных свойств образца, т.е. от типа сверхпроводящего материала образца, фазового состава, наличия несверхпроводящих примесей и т.д. В противоположность этому  $G(X, Y)$  зависит только от размеров поперечного сечения образца. Если это сечение имеет форму прямоугольника, то  $X$  и  $Y$  — ширина и высота сечения, если прямоугольного треугольника, то  $X$  и  $Y$  — катеты. В случае цилиндрического образца  $G$  определяется радиусом поперечного сечения  $R$ . Кроме того, установлено [5,6,9], что критический ток, а именно функция  $G(X, Y)$ , является однородной функцией

Эйлера [10]:

$$G(kX, kY) = k^p G(X, Y). \quad (2)$$

Здесь  $k$  — произвольная величина. Показатель  $p$ , определенный для образцов с прямоугольным поперечным сечением, равен  $1.39 \pm 0.02$  и не зависит от температуры и индивидуальных свойств образца [5,6,9]. Более того, он не зависит и от формы поперечного сечения образца [6]. Усредненное значение показателя, полученное при изучении образцов с прямоугольным, треугольным и круглым сечениями, равно  $1.36 \pm 0.01$ . С помощью специально поставленных экспериментов нами было доказано [5,9], что в случае образцов с прямоугольным поперечным сечением критический ток не только удовлетворяет определению однородной функции, но и двум теоремам о необходимости и достаточности. Во-первых, он удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера и, кроме того, может быть представлен в виде

$$I_c(X, Y, T) = X^p F_1(Y/X)f(T), \quad (3)$$

$$I_c(X, Y, T) = Y^p F_2(X/Y)f(T). \quad (4)$$

В случае двух переменных только такие функции являются однородными. Тот факт, что критический ток может быть представлен одновременно в виде (3) и (4), является следствием отсутствия внешнего поля. Не имеет значения, какая из сторон поперечного сечения названа нами шириной  $X$ , а какая — высотой  $Y$ . При замене образца или изменении температуры изменится и величина критического тока, но когда транспортный ток станет равным этому новому значению  $I_c$  в образце, как и прежде, возникнет критическое состояние. Прежней остается и функция  $G(X, Y)$  из (1), т.е. именно в ней содержится информация об организации критического состояния образца. Поэтому очень важно как можно детальнее определить функцию  $G$ . Действительно, в случае круглых образцов [6], анализ  $G(R) = CR^p$  позволил нам найти связь между локальной плотностью критического тока  $j_c$  и величиной магнитной индукции в образце.

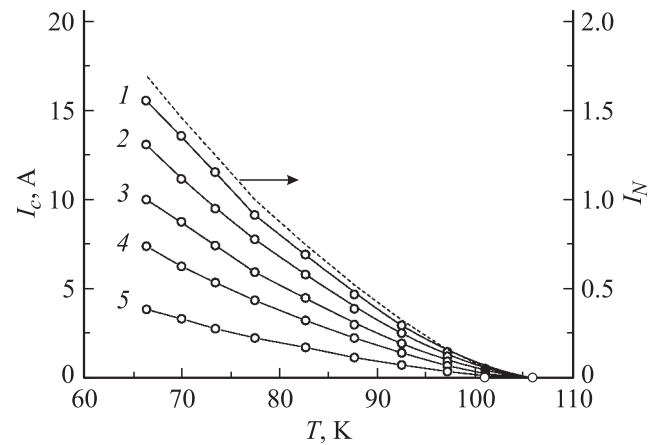
В настоящей работе, не привлекая каких-либо модельных представлений, мы определим вид функций  $G$ ,  $F_1$  и  $F_2$  из (1), (3) и (4) и покажем, что независимо от формы поперечного сечения образца выражение для критического тока как функция площади поперечного сечения имеет один и тот же вид.

## Объекты и методы исследования

Для достижения поставленной цели нами проведены исследования критического тока керамического образца на основе висмута (фаза 2223). Методы изготовления и тестирования образцов изложены в [11,12]. Температура перехода в сверхпроводящее состояние  $T_c = 107.8$  К, плотность —  $4.92$  г/см<sup>3</sup>. Критический ток  $I_c(X_1, T_i)$  образца, имевшего начальную ширину  $X_1 = 2.3$  мм и неизменную в течение всего эксперимента высоту  $Y = 1.498$  мм, был измерен при ряде фиксированных температур (9 значений) в интервале от 101 до 66.2 К. Затем ширина образца изменялась, измерения  $I_c(X_2, T_i)$  проводились в тех же температурных точках и т.д. Конечная ширина образца —  $0.255$  мм. В результате была получена матрица значений  $I_c$ , содержащая 117 величин критического тока. Исследуемый образец имел форму кольца с прямоугольным поперечным сечением. Критический ток измерялся с помощью бесконтактного трансформаторного метода, применявшегося многими исследователями для изучения ВТСП керамических материалов [4–7,13,14]. Все измерительные и контрольные процедуры изложены в [5,6]. Здесь мы только поясним, что при измерениях  $I_c$  внешнее поле равно нулю. В наших опытах кольцеобразный образец вместе с первичной (число витков  $n_1$ ) и измерительной обмотками помещался внутрь бронированного ферритового сердечника. При увеличении амплитуды первичного тока  $I_1$  ток кольца менялся так, чтобы магнитный поток, собираемый центральным керном сердечника и замыкающийся через торцевые и боковые стенки, оставался неизменным и равным нулю. Следовательно, магнитная индукция и магнитное поле в теле сердечника остаются равными нулю. Поэтому образец находится лишь в поле собственного тока. При этом каждый отдельно взятый участок кольца экранируется центральным керном сердечника от полей, создаваемых током в других участках кольца. В тот момент, когда ток кольца достигал критического значения, в измерительной обмотке возникал сигнал, имевший форму острого пика. Измерения проводились так, чтобы величина этого пика имела минимально возможную величину. В тот момент, когда при регулировке амплитуды первичного тока высота пика сводилась „на нет“, производилась регистрация  $I_1$ , и  $I_c = n_1 I_1$ .

## Результаты и обсуждение

На рис. 1 показана зависимость критического тока от температуры при различных значениях ширины образца (5 кривых из 10 изученных). Прежде всего, убедимся в



**Рис. 1.** Экспериментальные значения критического тока как функции температуры при различных значениях ширины образца: 1 — 1.995, 2 — 1.495, 3 — 1.020, 4 — 0.655, 5 — 0.255 мм. Штриховая линия — относительный ток:  $I_T = I_c(X, T) / I_c(X, 77, 33 \text{ К})$ .

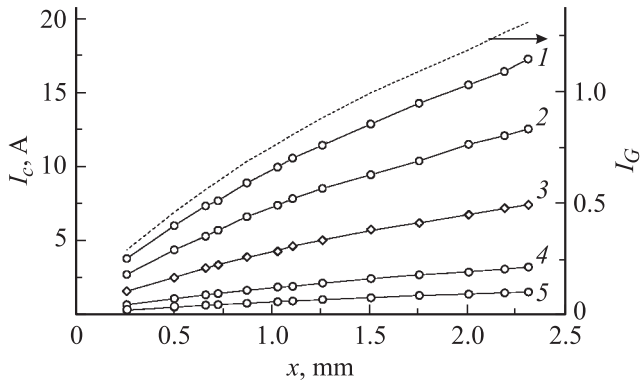
том, что полученные значения критического тока удовлетворяют мультипликативному свойству (1). Введем относительный ток  $I_T$ , разделив каждое экспериментальное значение критического тока одной из кривых на рис. 1 на  $I_c(X, T_0)$ , где  $T_0$  — одна из исследованных температурных точек

$$I_T = I_c(X, T) / I_c(X, T_0). \quad (5)$$

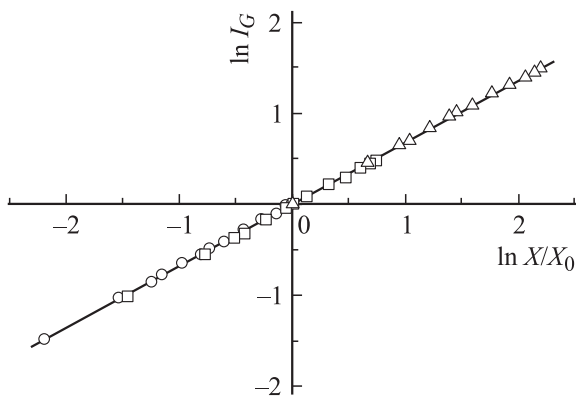
Пронормировав таким же образом при том же значении  $T_0$  все остальные экспериментальные зависимости  $I_c(T)$ , мы обнаруживаем, что  $I_T$  не зависит от ширины образца. В каждой температурной точке величины  $I_T$ , получаемые при нормировке кривых, относящихся к разным значениям  $X$ , незначительно отличаются друг от друга. Их отклонения от среднего значения при каждом исследованном значении  $T$  не превышает 1%. Масштаб рис. 1 не позволяет отобразить рассеяние отдельных точек, поэтому здесь показана лишь штриховая кривая, проведенная через средние значения. Введем относительный ток  $I_G$ :

$$I_G = I_c(X, T) / I_c(X_0, T), \quad (6)$$

разделив каждое значение  $I_c$  одной из изотерм (рис. 2) на значение тока, определенного при той же температуре и при одном из значений ширины  $X_0$ . Проведем такую же процедуру с остальными изотермами, убеждаемся в том, что при каждом значении  $X$  вычисленные для разных изотерм величины  $I_G$  отличаются от средних не более чем на 1%. Таким образом, относительный ток  $I_G$  не зависит от температуры и определяется только размером образца. Кривая, отражающая это поведение, показана на рис. 2 штриховой линией. Итак, значения критического тока могут быть представлены в виде (5) или (6). Это означает, что экспериментальные значения критического тока удовлетворяют выражению (1),



**Рис. 2.** Зависимость критического тока от ширины поперечного сечения образца при различных температурах: 1 — 66.25, 2 — 73.3, 3 — 82.55, 4 — 92.45, 5 — 97.1 К. Штриховая линия — относительный ток:  $I_G = I_c(X, T)/I_c(X_0, T)$ .



**Рис. 3.** Относительный ток  $I_G$  как функция относительной ширины поперечного сечения образца при разных температурах.  $\circ$  — 101,  $\square$  — 82.55,  $\triangle$  — 66.25 К.

при этом  $Y = \text{const}$ . Отметим, что ранее в работе [4] уже проводился такой эксперимент, т.е. изучалась зависимость критического тока керамического образца с прямоугольным поперечным сечением от ширины образца. Там впервые было показано, что выражение для критического тока может быть представлено в виде произведения факторов, зависящих от температуры и размеров поперечного сечения образца. Однако в [4] доверительные интервалы  $I_G$  были довольно велики. Это обстоятельство позволило даже считать, что  $I_G(X)$  имеет излом при квадратном сечении образца ( $X = Y$ ). Полученные результаты (рис. 2) показывают, что все изотермы  $I_c(X)$  и кривая  $I_G(x)$  являются гладкими функциями, они аппроксимируются степенной зависимостью (см. ниже), и не одно из сечений не является выделенным.

Прежде чем переходить к определению функционального вида величин  $G(X, Y)$ ,  $F_1(Y/X)$  и  $F_2(X/Y)$ , обратим внимание на то, что в случае квадратного сечения образца ( $X = Y$ ) из (3) и (4) следует

$$I_{c\Box} = X_{\Box}^p F_1(1) f(T), \quad F_1(1) = F_2(1). \quad (7)$$

На рис. 3 в логарифмических координатах показана зависимость  $I_G$  от относительного аргумента  $X/X_0$ , где в качестве  $X_0$  выбраны наибольшее и наименьшее значения  $X$ . Легко видеть, что все точки ложатся на прямую линию, проходящую через начало координат (при  $X = X_0$ ) относительные аргумент и функция равны единице. Аппроксимируя эту зависимость статистической моделью  $\ln I_G = v \ln(X/X_0)$ , находим усредненное значение  $v = 0.680 \pm 0.005$ . При каждом фиксированном значении  $X_0$  усреднялись  $v$ , получаемые для каждой изотермы, а затем находилось среднее значение набора  $v$  при всех экспериментальных значениях  $X_0$ . Обращает на себя внимание тот факт, что среднее значение  $v$  близко к  $p/2$ . Воспользовавшись еще раз подтвержденным в этой работе выражением (1), получаем

$$I_G = G(X, Y)/G(X_0, Y) = (X/X_0)^v. \quad (8)$$

Примем во внимание то обстоятельство, что в наших опытах внешнее поле отсутствовало, поэтому  $X$  и  $Y$  совершенно равноправны. Поэтому, если бы мы в процессе эксперимента изменяли не ширину образца, а его высоту, то получили бы аналогичный результат

$$I_G = G(X, Y)/G(X, Y_0) = (Y/Y_0)^v. \quad (9)$$

С помощью (8) и (9) находим  $G(X, Y) = G(X_0, Y_0)(XY/X_0Y_0)^v$ . Поскольку  $G(X, Y)$  не может зависеть от  $X_0, Y_0$  ( $X_0$  и  $Y_0$  — произвольны), то  $G(X_0, Y_0) = A(X_0, Y_0)^v$  и

$$G(X, Y) = AX^v Y^v \quad \text{или} \quad G(X, Y) = AX^{2v} (Y/X)^v. \quad (10)$$

$G(X, Y)$  — однородная функция степени  $p$ , поэтому  $v = p/2$ . Выражение для критического тока (1) принимает вид

$$I_c(X, Y, T) = AX^{p/2} Y^{p/2} f(T). \quad (11)$$

Рассмотрим этот вопрос с другой стороны. Из (3) следует  $I_G = X^p/X_0^p F_1(Y/X)/F_1(Y/X_0)$ , поэтому  $F_1(Y/X) = X_0^{p-v}/X^{p-v} F_1(Y/X_0)$ . Поскольку  $F_1(Y/X)$  является функцией отношения и не может зависеть от  $X_0$  из-за произвольности последнего, то

$$F_1(Y/X) = A(Y/X)^{p-v}.$$

Подставив этот результат в (3), находим, что  $v = p/2$ , а  $I_c$  определяется формулой (11).

Получим теперь выражение (11) с помощью мысленного эксперимента. Пусть у нас имеются два образца из одного и того же материала, один из которых имеет прямоугольное, а второй — квадратное поперечные сечения произвольных размеров. Пусть  $I_c$  и  $I_{c\Box}$  — критические токи первого и второго образцов соответственно. Уменьшая или увеличивая стороны сечений, уменьшим или увеличим число токовых путей, т.е. величины критических токов половин образца. Изменив стороны того или иного образцов, или обоих сразу, добьемся такого состояния, чтобы

$$I_{c\Box} = I_c. \quad (12)$$

Используя (3) и (7), запишем

$$X^p F_1(Y/X) = X_{\square}^p F_1(1). \quad (13)$$

Функции  $f(T)$  сократились, так как свойства и температуры образцов считаются одинаковыми. Изменив теперь высоту прямоугольного образца произвольным образом в  $k$  раз. Равенство (12) теперь нарушено. Изменим стороны второго образца в  $K$  раз так, чтобы восстановить равенство (12).  $K$  на этот раз не произвольно, а является функцией  $k$ , тогда

$$X^p F_1(kY/X) = K(k)^p X_{\square}^p F_1(1). \quad (14)$$

С помощью (13) получим

$$F_1(kY/X) = K(k)^p F_1(Y/X). \quad (15)$$

Если произвольным образом менять ширину прямоугольного образца, то приходим к выражению (15). Начальное определение однородной функции следующее [10]:  $F(kz) = g(k)F(z)$ , где  $k$  произвольно. Доказано, что в самом общем случае  $g(k) = k^q$  [10], поэтому  $F(kz) = k^q F(z)$ . Сравнив, находим, что в нашем случае  $K(k)^p = g(k) = k^q$  и

$$F_1(kY/X) = k^q F_1(Y/X), \quad (16)$$

т.е.  $F_1(Y/X)$  — однородная функция своего относительного аргумента степени  $q$  (так же как  $F_2(X/Y)$ ). Выражение (16) справедливо при любом  $k$ , в том числе и при  $k = X/Y$ , поэтому

$$F_1(Y/X) = F_1(1)(Y/X)^q. \quad (17)$$

Полагая  $F_1(1) = A$  и учитывая, что в выражении для критического тока  $X$  и  $Y$  равноправны, находим  $q = p/2$ , а  $I_c(X, Y, T)$  определяется формулой (11). Таким образом, анализ экспериментальных результатов и аналитическое рассмотрение приводят к одному и тому же результату.

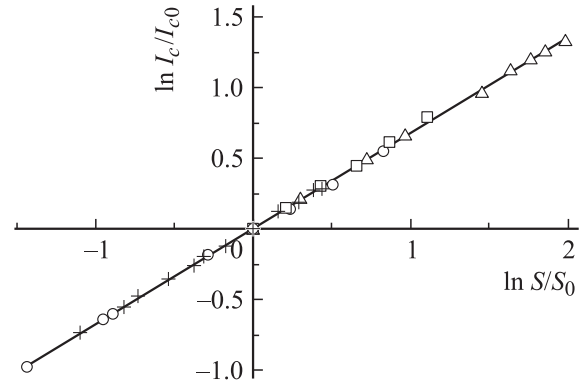
Как говорилось во введении, критический ток образца, имеющего поперечное сечение в виде прямоугольного треугольника, является однородной функцией степени  $p$  и описывается выражениями (3) и (4), но со своими функциями  $F_1$  и  $F_2$ . И в этом случае, в выражении для  $I_c$  катеты  $X$  и  $Y$  совершенно равноправны. Поэтому только что проведенное рассмотрение может быть применено и к образцам с таким сечением. В результате получим

$$I_c(X, Y, T) = BX^{p/2}Y^{p/2}f(T). \quad (18)$$

Для образца с круглым сечением (см. введение)

$$I_c(R, T) = CR^p f(T). \quad (19)$$

Заменив в (11), (18) и (19) произведения сторон прямоугольника, катетов и радиус площадью соответствующих фигур, получим для образцов с сечениями в виде



**Рис. 4.** Универсальный характер зависимости критического тока от площади поперечного сечения образца:  $\circ$  — образец 2 с круглым сечением из [6] (77.33 К, Bi-2223);  $+$  — образец из настоящей работы (101 К);  $\square$  — образец 2 из [5] (прямоугольное сечение, 77.33 К, Y-123),  $\triangle$  — образец 4 из [6] с треугольным сечением (77.33 К, Bi-2223).

прямоугольника, прямоугольного треугольника и круга следующее выражение:

$$I_c(S) = AS^{p/2}f(T), \quad (20)$$

т.е. независимо от формы поперечного сечения образцов выражения, описывающие критические токи как функции площади этого сечения, имеют один и тот же вид. Информация же о форме сечения заключена в константе  $A$ . В случае прямоугольного сечения эта константа совпадает с коэффициентом  $A$  в (11). Для образцов с сечениями в виде прямоугольного треугольника и круга  $A$  выражается через  $B$  и  $C$  из (18) и (19):  $A = 2^{p/2}B$ , и  $A = C/\pi^{p/2}$ . Поскольку  $p = 1.36 \pm 0.01$ , то из (20) следует  $I_c \sim S^{0.68 \pm 0.01}$ . Как было показано в [6], показатель  $p$  не зависит от формы поперечного сечения, поэтому безразмерный ток

$$I_c(S)/I_c(S_0) = (S/S_0)^{p/2} \quad (21)$$

не зависит уже и от формы сечения. На рис. 4 в логарифмическом масштабе показана эта зависимость для круглого, прямоугольного образцов и образца с сечением в виде прямоугольного треугольника. Все данные могут быть аппроксимированы одной общей прямой. Это подтверждает справедливость выражения (21) и тот факт, что  $p$  не зависит от формы поперечного сечения. Формула (21) выражает закон универсальной зависимости относительно критического тока керамических образцов ВТСП от относительной площади поперечного сечения при отсутствии внешнего поля. Это утверждение дополняет сформулированный в [5,6] закон подобия зависимости критического тока от относительного размера поперечного сечения образца. Поперечные сечения исследованных нами ранее и в настоящей работе образцов являются выпуклыми фигурами и образуют односвязные области (т.е. области без дыр). Обобщив полученные результаты, можно сказать следующее: если

поперечное сечение керамического образца является выпуклой односвязной областью, то независимо от формы этого сечения транспортный критический ток при отсутствии внешнего поля является однородной функцией размеров и площади поперечного сечения с единым для всех образцов показателем, а величина критического тока определяется выражениями (20) и (21).

## Заключение

Проанализированы результаты специально поставленного эксперимента, аналитическим путем получены выражения для транспортного критического тока образцов, имеющих поперечные сечения в виде круга, прямоугольника или треугольника. Показано, что зависимость критического тока от площади поперечного сечения выражается общей для всех исследованных сечений формулой. Информация о форме поперечного сечения содержится лишь в постоянном множителе. Зависимость относительного тока от относительной площади носит универсальный характер и не зависит от формы сечения. Результаты обобщены для образцов с любой формой поперечного сечения.

## Список литературы

- [1] *Dearch H., Blatter G.* // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 38. N 16-1. P. 11391–11404.
- [2] *D'Ovidio C.A., Fiscina J.E., Esparza D.A.* // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 69. N 12. P. 8265–8267.
- [3] *Kliem B.H., Wegers A., Lutzner J.* // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 69. N 3. P. 1534–1537.
- [4] *Боголюбов Н.А.* // СФТХ. 1994. Т. 7. № 2. С. 294–301.
- [5] *Боголюбов Н.А.* // ФНТ. 1997. Т. 23. № 8. С. 808–815.
- [6] *Боголюбов Н.А.* // ФНТ. 1999. Т. 25. № 12. С. 1243–1250.
- [7] *Cheng C.-W., Rose-Innes A.C., McAlford N.* et al. // Supercond. Sci. Technol. 1990. Vol. 3. N 1. P. 90–92.
- [8] *Матизен Э.В., Безверхий П.П., Мартынец В.Г.* и др. // СФТХ. 1994. Т. 7. С. 1398–1410.
- [9] *Bogoliubov N.A.* // Czechoslovak J. Phys. 1996. Vol. 46. Suppl. S3. P. 1261–1262.
- [10] *Aczel J.* Lectures on Functional Equations and their Applications. New York–London: Academic Press, 1966. 510 p.
- [11] *Kravtchenko V.S., Zhuravleva M.A., Uskov Y.M.* et al. // Superlattices and Microstructures. 1997. Vol. 21. Suppl. A. P. 87–94.
- [12] *Кравченко В.С., Журавлева М.А., Усков Е.М.* и др. // Неорганические материалы. 1998. Т. 34. № 10. С. 1274.
- [13] *Harris E.A., Bishop J.E.L., Havill R.L.* et al. // J. Phys. C. 1988. Vol. 221. N 18. P. L673–L677.
- [14] *Meisner G.P., Taylor C.A.* // Physica C. 1990. Vol. 169. N 5/6. P. 303–313.