

О термодинамическом равновесии неэкстенсивных систем

© Р.Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения,
Казанский научный центр РАН,
420111 Казань, Россия
e-mail: zaripov@mail.knc.ru

(Поступило в Редакцию 7 июня 2005 г. В окончательной редакции 30 марта 2006 г.)

Определен закон композиции энергий, рассматривается условие термодинамического равновесия неэкстенсивных систем, описываемых энтропией Хаврда–Чарват–Дароши. Дается статистический критерий устойчивости равновесия. Приводятся уравнения для равновесного распределения и оператора плотности.

PACS: 05.70.-a

Введение

В настоящее время статистическая механика и термодинамика неэкстенсивных (неаддитивных) систем является быстро развивающейся областью исследований. Подробная библиография работ приводится в сборниках [1,2]. Основой теории и ее приложений является энтропия Хаврда–Чарват–Дароши

$$S_q = \mathbf{E}_q[s_q] = \int s_q p^q dX = \frac{k}{q-1} \left(1 - \int p^q dX \right),$$

$$0 \leq p \leq \infty, \quad (1)$$

зависящая от действительного числа q . Функционал $S_q = S_q(p)$ был впервые введен и рассмотрен в работах [3,4] по статистической теории информации он является средним значением микроскопической энтропии $s_q = s_q(p) = k(1-q)^{-1}(1-p^{1-q})$, где усреднение проводится ненормированным распределением p^q . Для фрактальных систем параметр q связан с фрактальной размерностью, а для неэкстенсивных — является мерой неэкстенсивности в свойстве псевдоаддитивности энтропий

$$S_q = S_{q1} + S_{q2} + k^{-1}(1-q)S_{q1}S_{q2} \quad (2)$$

для двух независимых систем с $p(X_1, X_2) = p_1(X_1)p_2(X_2)$, $S_{q1} = S_q(p_1)$, $S_{q2} = S_q(p_2)$ и $dX = dX_1dX_2$. Выражение (2) вытекает из общего закона композиции энтропий с квадратичной нелинейностью [5]

$$S_q = \frac{S_{q1} + S_{q2} + \varepsilon S_{q1}S_{q2}}{1 + \omega S_{q1}S_{q2}} \quad (3)$$

при $\varepsilon = k^{-1}(1-q)$ и $\omega = 0$. В пределе $q \rightarrow 1$ из (1) вытекает энтропия Больцмана–Гиббса $S = -k \int p \ln p dX$, а микроскопическая энтропия совпадает с показателем вероятности $\eta = -k \ln p$ статистической механики аддитивных систем. Групповые свойства закона композиции (3) и типы одно- и двухпараметрических энтропий изучены в [5], к настоящему времени известны более 40 выражений функционалов [5,6].

Несмотря на то что многие свойства неэкстенсивных систем, которые описываются негауссовыми и негиббсовыми распределениями, исследованы, остается открытым важный вопрос о термодинамическом равновесии. Имеет место дискуссия по методу усреднения функции Гамильтона $H = H(X)$ и соответственно по закону композиции энергий [7–10]. В основном полагается справедливость равенства $H = H_1 + H_2$, где $H = H(X_1, X_2)$ — гамильтониан общей системы, $H_1 = H(X_1)$ и $H_2 = H(X_2)$. После усреднения нормированным распределением $f = p^q [\int p^q dX]^{-1}$ получим аддитивный закон композиции энергий

$$E_q = E_{q1} + E_{q2}, \quad E_q = \int H f dX. \quad (4)$$

Варьирование $\delta S_q = 0$ и $\delta E_q = 0$ для замкнутой общей системы с постоянными значениями энтропии и энергии приводит к соотношению

$$\frac{1}{1 + k^{-1}(1-q)S_{q1}} \frac{\delta S_{q1}}{\delta E_{q1}} = \frac{1}{1 + k^{-1}(1-q)S_{q2}} \frac{\delta S_{q2}}{\delta E_{q2}}, \quad (5)$$

из которого вытекает значение эффективной температуры $T_q = [1 + k^{-1}(1-q)S_q]T$ с $\delta S_q / \delta E_q = 1/T$ для обеих независимых систем, зависящих от энтропии. Такое переопределение температуры противоречит термодинамике, где абсолютная температура является интенсивным параметром, а не функционалом.

Целью данной работы является нахождение условия термодинамического равновесия двух независимых систем и условий устойчивости на основе традиционного усреднения ненормированным распределением [3–6], а также уравнения для равновесного распределения.

Закон композиции энергий и условие равновесия

Рассмотрим простой абстрактный вывод явного вида закона композиции произвольных средних значений физических величин, используя свойство псевдоаддитивности энтропий (2). Для чего запишем закон в следующем

виде:

$$U_q = U_{q1}\psi(S_{q2}, U_{q2}) + U_{q2}\eta(S_{q1}). \quad (6)$$

Поскольку значение U_q не зависит от замены одной системы на другую независимую систему, то

$$\frac{\psi(S_{q1}, U_{q1}) - \eta(S_{q1})}{U_{q1}} = \frac{\psi(S_{q2}, U_{q2}) - \eta(S_{q2})}{U_{q2}} = \varepsilon, \quad (7)$$

где ε — постоянный параметр. Для определения значения функций $\eta(S_{q1})$ и $\eta(S_{q2})$ положим $U_{q1} = S_{q1}$ и $U_{q2} = S_{q2}$. Тогда из (6) после подстановки функции (7) вытекает выражение

$$S_q = S_{q1}\eta(S_{q2}) + S_{q2}\eta(S_{q1}) - \varepsilon S_{q1}S_{q2}, \quad (8)$$

которое приравниваем формуле (2) и находим $\eta(S_{q1}) = 1 + k^{-1}(1-q)S_{q1}$, $\eta(S_{q2}) = 1 + k^{-1}(1-q)S_{q2}$. В итоге при $U_q = \beta E_q$, $U_{q1} = \beta E_{q1}$, $U_{q2} = \beta E_{q2}$, $\beta = 1/T$ имеем закон композиции энергий и свободных энергий

$$\begin{aligned} E_q &= E_{q1}[1 + k^{-1}(1-q)S_{q2}] \\ &+ E_{q2}[1 + k^{-1}(1-q)S_{q1}] - k^{-1}(1-q)\beta E_{q1}E_{q2}, \\ F_q &= F_{q1} + F_{q2} - k^{-1}(1-q)\beta F_{q1}F_{q2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Свойства псевдоаддитивности (2) и (9) вытекают однозначно из свойства мультипликативности известного равновесного распределения [11]

$$p = p(X) = \left[\frac{1 - k^{-1}(1-q)\beta H(X)}{1 - k^{-1}(1-q)\beta F_q} \right]^{1/(1-q)}, \quad (10)$$

которое выводится вариационным методом из экстремума энтропии при заданности энергии E_q и нормировки распределения. Распределение (10) приводит к уравнению равновесной термодинамики неэкстенсивных систем $dS_q = \beta dE_q$. Используя $p(\beta H) = p(\beta H_1)p(\beta H_2)$, из (10) получим закон композиции функций Гамильтона $H = H_1 + H_2 - k^{-1}(1-q)\beta H_1H_2$ и свободных энергий из (9). После усреднения закона композиции функций Гамильтона и закона композиции микроскопических энтропий $s_q = s_{q1} + s_{q2} - k^{-1}(1-q)s_{q1}s_{q2}$ имеем формулы (9) и (2) соответственно. Распределение (10) использовалось в теории самоорганизации неэкстенсивных систем [11,12] при обобщении результатов для аддитивных систем [13].

Далее варьруем (2) и (9) и получим равенства

$$\begin{aligned} \delta S_q = 0 &= \delta S_{q1}[1 - k^{-1}(1-q)S_{q2}] \\ &+ \delta S_{q2}[1 - k^{-1}(1-q)S_{q1}], \\ \delta E_q = 0 &= \delta E_{q1}[1 - k^{-1}(1-q)\beta F_{q2}] \\ &+ \delta E_{q2}[1 - k^{-1}(1-q)\beta F_{q1}] \\ &+ k^{-1}(1-q)[E_{q1}\delta S_{q2} + E_{q2}\delta S_{q1}], \end{aligned} \quad (11)$$

из которых вытекает условие

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 + k^{-1}(1-q)S_{q1}} \frac{\delta S_{q1}}{\delta E_{q1}} \left[1 - k^{-1}(1-q) \left(\beta F_{q1} - E_{q1} \frac{\delta S_{q2}}{\delta E_{q2}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1 + k^{-1}(1-q)S_{q2}} \\ &\times \frac{\delta S_{q2}}{\delta E_{q2}} \left[1 - k^{-1}(1-q) \left(\beta F_{q2} - E_{q2} \frac{\delta S_{q1}}{\delta E_{q1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Полученное условие удовлетворяется тождественно только при равенстве температур

$$\frac{\delta S_{q1}}{\delta E_{q1}} = \frac{\delta S_{q2}}{\delta E_{q2}} = \frac{1}{T} \quad (13)$$

двух независимых систем при их тепловом контакте без переопределения температуры, в отличие от результата в виде соотношения (5).

Если $q = 1$, то (10) совпадает с каноническим распределением Гиббса $p = \exp\{k^{-1}\beta(F - H)\}$. Законы композиции рассматриваемых средних и микроскопических величин становятся аддитивными.

Статистический критерий устойчивости

Рассмотрим равновесную неэкстенсивную систему, состояние которой характеризуется распределением, зависящим от некоторого интенсивного термодинамического параметра θ . Определим критерий устойчивости термодинамического равновесия системы при изменении этого параметра.

Дифференцируем по параметру θ условие нормировки распределения

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int p dX = \int \frac{\partial p}{\partial \theta} dX = 0. \quad (14)$$

При использовании выражения микроскопической энтропии из (14) вытекает равенство нулю среднего значения производной микроскопической энтропии $\mathbf{E}_q[\partial s_q / \partial \theta] = 0$. После дифференцирования получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{E}_q \left[\frac{\partial s_q}{\partial \theta} \right] = \mathbf{E}_q \left[\frac{\partial^2 s_q}{\partial \theta^2} \right] - qk \int \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \theta} \right)^2 p dX = 0, \quad (15)$$

из которого следуют строгие статистические неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_q \left[\frac{\partial^2 s_q}{\partial \theta^2} \right] &= \int \frac{\partial^2 s_q}{\partial \theta^2} p^q dX > 0 \quad \text{при } q > 0, \\ \mathbf{E}_q \left[\frac{\partial^2 s_q}{\partial \theta^2} \right] &= \int \frac{\partial^2 s_q}{\partial \theta^2} p^q dX < 0 \quad \text{при } q < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

При $q = 0$ интегралы в (16) равняются нулю. Неравенства (16) представляют собой статистический критерий

устойчивости термодинамического равновесия неэкстенсивных систем. При $q > 0$ ($q < 0$) происходит возрастание (убывание) среднего значения второй производной микроскопической энтропии по параметру θ .

В качестве примера рассмотрим устойчивость равновесия с $\theta = \beta$. Вычислим производную микроскопической энтропии

$$\frac{\partial s_q}{\partial \beta} = \frac{1}{1 - k^{-1}(1 - q)\beta F_q} \Delta_q H, \quad (17)$$

где $\Delta_q H = H - E_q p^{1-q}$ есть флуктуация функции Гамильтона [12], и найдем среднее значение

$$\int \frac{\partial^2 s_q}{\partial \beta^2} p^q dX = -\frac{1}{1 - k^{-1}(1 - q)\beta F_q} \frac{\partial E_q}{\partial \beta}. \quad (18)$$

Используя значение теплоемкости $C_q = \partial E_q / \partial T = -\beta^2 (\partial E_q / \partial \beta)$ и второй производной для энтропии $\partial^2 S_q / \partial E_q^2 = -\beta^2 / C_q$, представим (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_q \left[\frac{\partial^2 s_q}{\partial \beta^2} \right] &= \frac{1}{1 - k^{-1}(1 - q)\beta F_q} \beta^{-2} C_q \\ &= -\frac{1}{1 - k^{-1}(1 - q)\beta F_q} \left[\frac{\partial^2 S_q}{\partial E_q^2} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно статистическому критерию устойчивости неэкстенсивной системы, из неравенств (16) с учетом (19) при $\theta = \beta$ следуют условия: $C_q > 0$, $(\partial^2 S_q / \partial E_q^2 < 0)$ при $q > 0$ и $C_q < 0$ $(\partial^2 S_q / \partial E_q^2 > 0)$ при $q < 0$.

Эти выводы совпадают с известными результатами [1], полученными другими методами.

Уравнения для равновесного распределения и оператора плотности

Приведем статистический вывод уравнения для распределения. Пусть в неэкстенсивной системе дисперсии физических величин имеют конечные значения. Определим дисперсии производной микроскопической энтропии и произвольной величины

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_q \left[\frac{\partial s_q}{\partial \theta} \right] &= \int \left\{ \Delta_q \left[\frac{\partial s_q}{\partial \theta} \right] \right\}^2 p^q dX, \\ \mathbf{D}_q(P) &= \int (\Delta_q P)^2 p^q dX, \end{aligned} \quad (20)$$

где флуктуации есть $\Delta_q P = P - \mathbf{E}(P)^{1-q}$ и $\Delta_q [\partial s_q / \partial \theta] = \partial s_q / \partial \theta$.

Минимизируем функционал

$$\Phi(\lambda) = \int \left\{ \Delta_q \left[\frac{\partial s_q}{\partial \theta} \right] - \lambda \Delta_q P \right\}^2 p^q dX \geq 0 \quad (21)$$

и в итоге получим следующее неравенство:

$$\mathbf{D}_q \left[\frac{\partial s_q}{\partial \theta} \right] \mathbf{D}_q(P) \geq \left\{ \mathbf{E}_q \left(\Delta_q \left[\frac{\partial s_q}{\partial \theta} \right] \Delta_q P \right) \right\}^2. \quad (22)$$

Состояние минимальной неопределенности соответствует знаку равенства в (22), что дает

$$\frac{\partial s_q}{\partial \theta} = \lambda \Delta_q P, \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (23)$$

Коэффициент λ может зависеть от θ , а модуль его $|\lambda| = [\mathbf{D}_q(P)]^{-1/2} \{ \mathbf{D}_q[\partial s_q / \partial \theta] \}^{1/2}$ является характеристическим параметром уравнения. Коэффициент корреляции имеет значение $r = \pm 1$. Распределение удовлетворяет нелинейному уравнению.

$$-k \frac{\partial p}{\partial \theta} = \pm |\lambda| [P q^q - \mathbf{E}_q(P) p]. \quad (24)$$

В случае термодинамически сопряженной пары $\{\theta, P\} = \{\beta, H\}$ воспользуемся уравнением термодинамики $\partial \beta F_q / \partial \beta = E_q$, что приведет к значению $\lambda = [1 - k^{-1}(1 - q)\beta F_q]^{-1}$. Окончательно уравнение (23) совпадает с (17), а уравнение (24) примет вид

$$-k \frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{1}{1 - k^{-1}(1 - q)\beta F_q} (H p^q - E_q p). \quad (25)$$

Представим (10) в виде $p = p' Z_q^{-1}$, где $Z_q = [1 - k^{-1}(1 - q)\beta F_q]^{1/(1-q)}$ и $\int p' dX = Z_q$. Тогда получим следующее уравнение для p' :

$$-k \frac{\partial p'}{\partial \beta} = H (p')^q. \quad (26)$$

В квантовой неэкстенсивной статистической механике в уравнении (25) распределение заменяется оператором плотности ρ , и уравнение (26) запишется так

$$-k \frac{\partial \rho'}{\partial \beta} = H (\rho')^q, \quad \text{Sp} \rho' = [1 - k^{-1}(1 - q)\beta F_q]^{1/(1-q)}. \quad (27)$$

В координатном представлении уравнение (27) имеет вид

$$-k \frac{\partial \rho'(x, x'; \beta)}{\partial \beta} = H [\rho'(x, x'; \beta)]^q, \quad (28)$$

где оператор H действует на переменную x в $\rho'(x, x'; \beta)$.

Запишем гамильтониан $H = p^2/2m + U(x)$ для частицы с потенциальной энергией $U(x)$ и из (28) получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial \rho'(x, x'; \beta)}{\partial \beta} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 [\rho'(x, x'; \beta)]^q}{\partial x^2} \\ &+ U(x) [\rho'(x, x'; \beta)]^q. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение уравнения (29) позволяет находить оператор плотности и свободную энергию

$$\begin{aligned} \rho(x, x'; \beta) &= \frac{\rho'(x, x'; \beta)}{\int \rho'(x, x'; \beta) dx dx'}, \\ F_q &= \frac{k}{\beta(1-q)} \left\{ 1 - \left[\int \rho'(x, x'; \beta) dx dx' \right]^{1-q} \right\} \\ &= \frac{k}{\beta(1-q)} \left\{ 1 - \left[\int \rho'(x, x; \beta) dx \right]^{1-q} \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

а далее по формулам равновесной термодинамики остальные термодинамические величины. При $q = 1$

уравнение (29) совпадает с известным уравнением Блоха квантовой статистической механики в координатном представлении.

Рассмотрим случай свободной частицы. Тогда (29) примет вид

$$-k \frac{\partial \rho'(x, x'; \beta)}{\partial \beta} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 [\rho'(x, x'; \beta)]^q}{\partial x^2} \quad (31)$$

Решение квазилинейного параболического уравнения (31) находим с начальным условием $\rho'(x, x'; 0) = \delta(x - x')$. Представим искомое решение в общем виде

$$\rho'(x, x'; \beta) = \left(\frac{b}{\beta}\right)^a f(\xi), \quad \xi = \left(\frac{b}{\beta}\right)^a (x - x') \quad (32)$$

с произвольной постоянной a и $b = 2km\hbar^{-2}$. Для аддитивных систем с $q = 1$ имеем $a = 1/2$ и $f(\xi) = \exp[-(b/4\beta)(x - x')^2]$. Подставив выражение (32) в (31), получим

$$-a \left(\frac{b}{\beta}\right)^{a+1} \left(f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = \left(\frac{b}{\beta}\right)^{aq} \left(\frac{b}{\beta}\right)^{2a} \frac{\partial^2 f^q}{\partial \xi^2}. \quad (33)$$

При $a = (1 + q)^{-1}$ интегрирование уравнения (33) дает решение

$$\rho'(x, x'; \beta) = \left(\frac{2km}{\hbar^2 \beta}\right)^{\frac{1}{1+q}} \left[\frac{q-1}{2q(1+q)}\right]^{\frac{1}{q-1}} \times \left[A - \left(\frac{2km}{\hbar^2 \beta}\right)^{\frac{2}{1+q}} (x - x')^2\right]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (34)$$

Здесь A находится из условия $\int \rho'(x, x'; \beta) dx = 1$, вытекающего из уравнения (31), и при $1 < q \leq \infty$ равняется

$$A = \left\{ \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}{\Gamma\left[\frac{3q-1}{2(q-1)}\right]} \left[\frac{q-1}{2q(1+q)}\right]^{\frac{1}{q-1}} \right\}^{-\frac{2(q-1)}{q+1}}, \quad (35)$$

где Γ — гамма-функция.

Согласно (30), получим свободную энергию одномерной системы длиной L

$$F_q = \frac{k}{\beta(1-q)} \{1 - L^{1-q} \varphi(\beta, q)\},$$

$$\varphi(\beta, q) = \left(\frac{2km}{\hbar^2 \beta}\right)^{\frac{1-q}{1+q}} \left[\frac{(q-1)A}{2q(q+1)}\right]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (36)$$

В пределе $q \rightarrow 1$ решение (34) совпадает с решением для аддитивной системы, а свободная энергия принимает известное значение $F = -(k/\beta) \ln[L(mk/2\pi\hbar^2\beta)^{1/2}]$.

Здесь решена простейшая задача и, как следствие, имеем важный факт зависимости свободной энергии от L^{1-q} . Для трехмерной неэкстенсивной системы с объемом V , состоящей из N частиц имеем также линейную

зависимость F_q от $V^{N(q-1)}$, что приводит по формуле $P = -\partial F_q / \partial V$ к уравнению состояния идеального газа

$$PV = NkTV^{N(1-q)} \varphi'(\beta, q), \quad (37)$$

отличного от известного $PV = NkT$ для интенсивной системы. В уравнении (37) P есть давление и $\varphi'(\beta, q)$ — некоторая сложная функция от температуры и параметра q . Решение уравнения (29) с потенциальной энергией требует отдельного рассмотрения. Уравнение состояния (37), зависящее от значения параметра q может наблюдаться в термодинамике хаотических систем, а также в самогравитирующих системах, состоящих из межзвездной пыли, для которых энтропия не является аддитивной величиной [1,2]. Если рассмотреть асимптотику распределения (34) при больших значениях координаты, то получим степенное распределение, характерное для фрактальных систем. Наконец, уравнение состояния (37) может использоваться для термодинамического описания квазичастиц, например, фононов в кристалле.

Заключение

Нахождение условия термодинамического равновесия требует привлечения законов композиции для энтропий и энергий. В статистической термодинамике Больцмана–Гиббса эти законы имеют свойство аддитивности. Для неэкстенсивных систем важным является свойство псевдоаддитивности энтропий, которое в данной работе распространяется на энергии. Это приводит к равенству температур независимых систем, сохраняя при этом исходный метод усреднения физических величин ненормированным распределением. Такое усреднение с p^q впервые было применено в основополагающей работе [3], где приводится вывод функционала (1) для неэкстенсивных систем из известных аксиом Хинчина в теории вероятности [14] при обобщении аксиомы об энтропии совместного распределения статистически зависимых величин. В работах [5,11,12] дается иной вывод энтропии Хаврда–Чарват–Дароши, свойства которой подробно описаны в [15]. В задаче о статистическом критерии устойчивости были использованы значения производных микроскопической энтропии, получены строгие статистические неравенства, знак которых зависит от знака q . Для равновесного распределения, зависящего от температуры неэкстенсивной системы найдено квазилинейное параболическое уравнение, которое содержит потенциальную энергию частицы. Это позволит решать многие задачи равновесной квантовой статистической механики неэкстенсивных систем.

Список литературы

- [1] Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications / Ed. by S. Abe and Y. Okamoto. Series Lecture Notes in Physics. Berlin, New York, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 277 p.

- [2] Nonadditive Entropy and Nonextensive Statistical Mechanics / Ed. by M. Sugiyama. Continuum Mechanics and Thermodynamics. Vol. 16. Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. P. 221–304.
- [3] *Havrda J., Charvat F.* // *Кыбернетика*. 1967. Vol. 3. P. 30–34.
- [4] *Daroczy Z.* // *Information and Control*. 1970. Vol. 16. P. 36–51.
- [5] *Зарипов Р.Г.* // *Изв. вузов. Физика*. 2005. № 3. С. 42–47.
- [6] *Taneja I.J.* // *Advances in Electronics and Electron Physics*. 1989. Vol. 76. P. 327–413 (<http://www.mtm.ufsc.br/~taneja/book>).
- [7] *Rama S.K.* // *Phys. Lett. A*. 2000. Vol. 276. P. 103–108.
- [8] *Abe S.* // *Physica. A*. 2002. Vol. 305. P. 62–68.
- [9] *Wang Q.A., Pezeril M., Nivanen L., Mehaute A.L.* // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2002. Vol. 13. P. 131–137.
- [10] *Nauenberg M.* // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. P. 036114.
- [11] *Зарипов Р.Г.* // *Изв. вузов. Физика*. 2001. № 11. С. 24–29.
- [12] *Зарипов Р.Г.* // *Изв. вузов. Физика*. 2004. № 6. С. 67–73.
- [13] *Зарипов Р.Г.* // *ЖТФ*. 1988. Т. 58. Вып. 11. С. 2247–2249.
- [14] *Хинчин А.Я.* // *УМН*. 1953. Т. 8. Вып. 3 (55). С. 3–20.
- [15] *Aczel J., Daroczy Z.* *On measure of information and their characterizations*. New York: Acad. Press, 1975. 233 p.