

01;05;12

## К вопросу об определении параметров жесткости нанообъектов

© Е.А. Иванова,<sup>1</sup> Д.А. Индейцев,<sup>2</sup> Н.Ф. Морозов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: ivanova@ei5063.spb.edu

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения РАН,  
199178 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: ind@director.ipme.ru

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
198904 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: morozov@NM1016.spb.edu

(Поступило в Редакцию 18 января 2006 г.)

Целью данной работы является разработка теоретической основы экспериментального определения параметров жесткости нанообъектов. Один из наиболее эффективных методов определения упругих модулей, используемых в макромеханике, основан на измерении собственных частот исследуемого объекта. В работе обсуждаются нюансы использования этого метода применительно к нанообъектам. Предлагается метод экспериментального определения параметров жесткости, основанный на явлении динамического гашения колебаний („антирезонанса“). Достоинством этого метода является возможность выделения собственных частот исследуемого нанообъекта из спектра системы нанообъект–кантилевер атомного силового микроскопа.

PACS: 46.40.-f, 02.70.Dh, 61.46.Nk

### Введение

Одной из важнейших научных проблем является интерпретация экспериментальных данных. Особенно остро данная проблема встает при исследовании объектов наноразмерного масштабного уровня. Это связано с принципиальным отличием условий, в которых проводятся эксперименты с нанообъектами, от условий экспериментов с макрообъектами. При исследовании макрообъектов размеры измерительных приборов (например, тензодатчиков) существенно меньше размеров исследуемого объекта. Поэтому в случае макроэкспериментов измерительные приборы практически не оказывают воздействия на объект исследования и результатами измерений являются его характеристики. При исследовании объектов наноразмерного масштабного уровня ситуация изменяется принципиальным образом, поскольку в этих экспериментах используется микроразмерное оборудование, которое может оказывать достаточно сильное воздействие на нанообъект и существенно на свойства нанообъекта, вплоть до изменения его структуры или полного разрушения. Результатами измерений могут оказаться характеристики как нанообъекта с измененными свойствами, так и системы исследуемый нанообъект–измерительное оборудование. Таким образом, важное значение приобретает задача исследования взаимодействия нанообъектов с измерительным оборудованием. Ниже эта проблема обсуждается применительно к задаче экспериментального определения упругих характеристик нанообъектов с помощью атомного силового микроскопа (АСМ).

### Проблема определения упругих модулей нанообъектов

В настоящее время актуальна задача определения упругих модулей объектов наноразмерного масштабного уровня. Многими исследователями отмечалось несоответствие между значениями модулей упругости, полученными из микро- и макроэкспериментов. В работах [1,2] на примере двумерной монокристаллической полосы теоретически исследована зависимость значений модуля Юнга и изгибной жесткости от числа атомарных слоев монокристалла. Сравнение результатов работ [1,2] показывает, что три выражения для изгибной жесткости стержня: известное из континуальной теории, выражение, полученное путем подстановки в формулу континуальной теории модуля Юнга, вычисленное для дискретной модели [1], и выражение, полученное непосредственно для дискретной модели [2], при малом числе атомарных слоев существенно различаются. Следовательно, использование формул континуальной теории, игнорирующих дискретные свойства материала в направлении толщины наностержня, может привести к значительным погрешностям. Очевидно, что в направлении длины стержня, где число атомарных слоев велико, учет дискретных свойств становится несущественным, и при расчете наностержней использование континуальных уравнений, скорее всего, допустимо. Аналогичная ситуация возникает и при расчете нанопластин и нанооболочек. Таким образом, важной задачей является разработка методов непосредственного определения упругих характеристик тонкостенных нанообъектов без использования каких-либо формул, связывающих упру-

гие модули нанообъекта с его толщиной и модулем Юнга материала. В частности, актуальна задача экспериментального определения механических характеристик нанообъектов [3].

Один из наиболее эффективных методов определения упругих модулей, используемых в макромеханике, основан на измерении собственных частот исследуемого объекта. Ниже обсуждаются нюансы, возникающие при использовании резонансного метода применительно к нанообъектам, и предлагается метод, основанный на явлении „антирезонанса“.

## Измерение собственных частот колебаний нанообъектов с помощью АСМ

Исследование свойств нанообъектов, в том числе измерение их собственных частот, в настоящее время осуществляется с помощью зондовой микроскопии. В частности, для этих целей широко используется АСМ, принцип его работы основан на полевом взаимодействии с исследуемым объектом [4,5]. Важнейшей составляющей АСМ является сканирующий зонд — кантилевер [6,7]. В качестве механической модели кантилевера рассматривается упругая балка, один конец которой жестко зашпелен, а второй свободен. На свободном конце кантилевера находится игла наноразмерного масштабного уровня. В настоящее время стандартные промышленные кантилеверы имеют габаритные размеры порядка  $200 \times 35 \times 1.5 \mu\text{m}$  и резонансные частоты порядка 10–400 kHz; радиус кривизны иглы может изменяться в пределах 10–50 nm.

Различают три режима сканирования: контактный, бесконтактный и прерывистого контакта. Заметим, что с точки зрения механики все три режима являются контактными. Когда острие иглы приближается к образцу, между ними возникает взаимодействие, и не имеет значения, осуществляется ли это взаимодействие путем контакта или посредством силовых полей. Зависимость силы взаимодействия от расстояния между острием иглы и исследуемой поверхностью напоминает ту, которая имеет место в случае взаимодействия с потенциалом Леннарда–Джонса. В зависимости от расстояния между острием иглы и поверхностью образца сила взаимодействия является либо силой отталкивания (контактный режим), либо (бесконтактный), либо периодически меняет направление (режим прерывистого контакта). Все три режима могут использоваться для определения рельефа поверхности; режим прерывистого контакта может также использоваться для измерения собственных частот. В режиме прерывистого контакта зашпеленный конец кантилевера приводится в движение, представляющее собой вертикальные колебания заданной частоты. Изменяя частоту, измеряют амплитуды колебаний точек кантилевера, в результате чего фиксируют резонансы.

Если игла находится далеко от поверхности исследуемого объекта, резонансные частоты близки к собственным частотам кантилевера. Когда игла приближается к поверхности и вступает во взаимодействие с ней, значения резонансных частот изменяются. По изменению резонансных частот в зависимости от изменения расстояния между иглой и контактирующей с ней поверхностью можно оценить свойства исследуемого объекта.

Метод измерения собственных частот, основанный на использовании АСМ, имеет свои ограничения и недостатки, которые обусловлены различием между тем, что в принципе можно измерить этим методом, и тем, что действительно можно измерить на современном оборудовании. Перечислим проблемы, возникающие при реализации этого метода:

1) Частотный диапазон, доступный для измерения, ограничен, и для его расширения в сторону максимальной частоты требуется уменьшение массы (размеров) кантилевера и (или) увеличение его жесткости.

2) Важно, чтобы острие иглы кантилевера было существенно меньше исследуемого объекта, поэтому при уменьшении размеров исследуемых объектов потребуются уменьшение радиуса кривизны иглы.

3) Закрепление нанообъекта должно осуществляться таким образом, чтобы подложка не влияла на собственные частоты нанообъекта, так как в противном случае возникнут дополнительные трудности, связанные с интерпретацией результатов измерений и получением информации о свойствах самого нанообъекта.

4) Игла кантилевера находится в контакте с исследуемым объектом и воздействует на него, в результате чего измеряются не нанообъекта собственные частоты, а системы нанообъект–кантилевер.

Последняя проблема связана с известным в механике перераспределением собственных частот колебаний системы кантилевер–исследуемый объект между собственными частотами каждого из них в отдельности [8]. Причем характер смещения спектра существенно зависит от расстояния между острием иглы и поверхностью, ибо это равносильно изменению „жесткости“ связи полевого взаимодействия.

Фактически возникают две задачи, лежащие на стыке механики и экспериментальной физики.

Первая — определение упругих модулей нанообъектов по частотам системы; вторая — разработка условий эксперимента, при которой из спектра системы можно выделить собственные частоты нанообъекта.

## Описание исследуемой системы

Постановка задачи и описание исследуемой системы кантилевер–исследуемый нанообъект в настоящей статье является естественным продолжением работы [6]. Основное отличие заключается в изучении нанообъекта, обладающего собственной динамикой. В качестве механической модели последней могут рассматриваться



Рис. 1. Кантилевер (слева) и наностержень (справа).

элементы тонкостенных (наноразмерных) конструкций, таких как стержни, оболочки, спирали. Ниже приводится теоретическая основа определения собственных частот колебаний стержневых конструкций с помощью АСМ. Итак, рассмотрим следующую механическую модель объекта исследования (рис. 1). Стержень, изображенный слева, моделирует кантилевер. Левый конец стержня жестко зашпелен, правый взаимодействует с исследуемым объектом. Вертикальный прогиб кантилевера определяется функцией  $u(x_1, t)$ , где  $x_1$  — координата вдоль стержня, причем значение  $x_1 = 0$  соответствует левому концу кантилевера. Используются обозначения:  $L_1$  — длина кантилевера,  $D_1$  и  $\rho_1$  — его изгибная жесткость и погонная плотность. Заметим, что жесткость  $C_1$ , обычно приводимая в технических характеристиках кантилеверов, определяется как отношение силы, действующей на иглу кантилевера, к перемещению конца кантилевера. Легко показать, что жесткость кантилевера  $C_1$  связана с его  $D_1$  соотношением  $C_1 = \frac{3D_1}{L_1^3}$ . Стержень, изображенный справа, моделирует исследуемый объект, изгибную жесткость которого требуется определить [9,10]. Правый конец стержня жестко зашпелен, левый взаимодействует с кантилевером. Вертикальный прогиб наностержня определяется функцией  $v(x_2, t)$ , где  $x_2$  — координата вдоль стержня, значение  $x_2 = 0$  соответствует правому концу наностержня. Приняты обозначения:  $L_2$  — длина наностержня,  $D_2$  и  $\rho_2$  — его изгибная жесткость и погонная плотность. Полевое взаимодействие между наностержнем и кантилевером моделируется линейной пружиной жесткостью  $C$ , что соответствует линеаризации потенциала Леннарда–Джонса (или любого другого потенциала взаимодействия) в области статически равновесного состояния. Заметим, что экспериментально найти положение статического равновесия достаточно легко. Вдали от исследуемой поверхности кантилевер занимает горизонтальное положение. По мере приближения к поверхности он начинает деформироваться, но на определенном расстоянии вновь занимает горизонтальное положение, что и является признаком статического равновесия. В отсчетной конфигурации стержни считаются недеформированными, а пружина — ненапряженной. Вблизи положения статического равновесия жесткость связи между иглой кантилевера и исследуемым объектом оказывается достаточно боль-

шой, т.е. имеет место соотношение  $C \gg C_1$ . По этой причине определить жесткость связи  $C$  из статических экспериментов крайне трудно — разность между перемещением конца кантилевера и исследуемой поверхности оказывается в пределах погрешности измерений. Проводить измерения в области значений жесткости  $C \sim C_1$  или  $C \ll C_1$  сложно, поскольку эта область находится на неустойчивом участке зависимости сила–перемещение.

## Свободные колебания системы кантилевер—нанообъект

Основные уравнения динамики, описывающие свободные колебания рассматриваемой механической системы, имеют следующий вид:

$$D_1 u^{IV} + \rho_1 \ddot{u} = 0, \quad D_2 v^{IV} + \rho_2 \ddot{v} = 0. \quad (1)$$

Уравнения (1) дополняют необходимые краевые условия

$$\begin{aligned} u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(L_1) = 0, \\ D_1 u'''(L_1) = C[u(L_1) - v(L_2)], \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(L_2) = 0, \\ D_2 v'''(L_2) = -C[u(L_1) - v(L_2)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Спектральная задача, соответствующая уравнениям (1), (2), формулируется соответственно нахождению собственных частот колебаний системы, т.е. решение ищется в виде  $u(x_1, t) = u_0(x_1)e^{i\omega t}$ ,  $v(x_2, t) = v_0(x_2)e^{i\omega t}$ . Решение полученной спектральной задачи приводит к следующему частотному уравнению:

$$\begin{aligned} [1 + \cos(\lambda L_1) \operatorname{ch}(\lambda L_1)] \left( 1 + \cos(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2) \right) \\ + \frac{C}{D_2 \mu^3} [\sin(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2) - \cos(\mu L_2) \operatorname{sh}(\mu L_2)] \\ + \frac{C}{D_1 \lambda^3} [\sin(\lambda L_1) \operatorname{ch}(\lambda L_1) - \cos(\lambda L_1) \operatorname{sh}(\lambda L_1)] \\ \times (1 + \cos(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2)) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь использованы обозначения

$$\lambda^2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{D_1}} \omega, \quad \mu^2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{D_2}} \omega, \quad (4)$$

где  $\omega$  — собственная частота системы. Как видно из уравнения (3), все собственные частоты зависят от всех параметров системы и из частотного спектра системы невозможно выделить собственные частоты наностержня. Установим соотношение между величинами  $\frac{C}{D_1 \lambda^3}$  и  $\frac{C}{D_2 \mu^3}$ . Воспользовавшись формулами для волновых чисел (4) и раскрыв известные значения  $D_i = E_i I_i$

и  $\rho_i = \rho_i^* S_i$ , где  $E_i$  — модули Юнга стержней,  $\rho_i^*$  — их объемные плотности массы,  $I_i, S_i$  — моменты инерции и площади сечения стержней, получим

$$\begin{aligned} D_1 \lambda^3 &= (\rho_1^* S_1)^{3/4} (E_1 I_1)^{1/4} \omega^{3/2}, \\ D_2 \mu^3 &= (\rho_2^* S_2)^{3/4} (E_2 I_2)^{1/4} \omega^{3/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если стержни имеют прямоугольные сечения размером  $h_i \times a_i$ , где  $h_i, a_i$  — соответственно толщина и ширина  $i$ -го стержня, то выражения (5) принимают вид

$$\begin{aligned} D_1 \lambda^3 &= (\rho_1^*)^{3/4} \left( \frac{E_1}{12} \right)^{1/4} a_1 (h_1 \omega)^{3/2}, \\ D_2 \mu^3 &= (\rho_2^*)^{3/4} \left( \frac{E_1}{12} \right)^{1/4} a_2 (h_2 \omega)^{3/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если стержни имеют произвольные сечения, справедливы оценки

$$\begin{aligned} D_1 \lambda^3 &\sim (\rho_1^*)^{3/4} \left( \frac{E_1}{12} \right)^{1/4} d_1^{5/2} \omega^{3/2}, \\ D_2 \mu^3 &\sim (\rho_2^*)^{3/4} \left( \frac{E_1}{12} \right)^{1/4} d_2^{5/2} \omega^{3/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $d_i$  — характерные линейные размеры сечений. Следствием (6), (7) является

$$\frac{C}{D_1 \lambda^3} \ll \frac{C}{D_2 \mu^3}. \quad (8)$$

Таким образом, частотное уравнение (3) может быть приближенно представлено в виде

$$\begin{aligned} &[1 + \cos(\lambda L_1) \operatorname{ch}(\lambda L_1)] \left( 1 + \cos(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2) \right. \\ &\left. + \frac{C}{D_2 \mu^3} [\sin(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2) - \cos(\mu L_2) \operatorname{sh}(\mu L_2)] \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) имеет два спектра собственных частот. Первый спектр определяет собственные частоты колебаний кантилевера

$$1 + \cos(\lambda L_1) \operatorname{ch}(\lambda L_1) = 0. \quad (10)$$

Второй спектр определяет собственные частоты колебаний наностержня с подпружиненным концом, ему соответствует уравнение

$$\begin{aligned} 1 + \cos(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2) + \frac{C}{D_2 \mu^3} [\sin(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2) \\ - \cos(\mu L_2) \operatorname{sh}(\mu L_2)] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, указанная проблема, связанная с идентификацией спектров каждого из объектов при не очень сильном допущении (8) оказалась разрешенной, так как

удалось выделить спектры каждого из них в отдельности.

Заметим, что для первых собственных частот нанообъекта  $\mu L_2 \sim 1$ . В этом случае для безразмерной величины  $\frac{C}{D_2 \mu^3}$  справедлива оценка

$$\frac{C}{D_2 \mu^3} \equiv \frac{C L_2^3}{D_2 (\mu L_2)^3} \sim \frac{C}{C_2}, \quad C_2 = \frac{3 D_2}{L_2^3}. \quad (12)$$

Поскольку  $C \gg C_2$ , имеет место неравенство  $\frac{C}{D_2 \mu^3} \gg 1$ . Следовательно, уравнение (11) приближенно может быть записано в виде

$$\sin(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2) - \cos(\mu L_2) \operatorname{sh}(\mu L_2) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) соответствует спектру частот колебаний стержня, один конец которого жестко зашпелен, а другой — шарнирно опирается.

Естественной проблемой является определение форм колебаний кантилевера на найденных выше частотах, поскольку форма колебаний кантилевера существенно влияет на качество измерений при фиксировании резонанса с помощью лазерного луча, представляющего собой пятно определенного диаметра.

## Вынужденные колебания системы

Рассмотрим вынужденные гармонические колебания системы. Пусть

$$u(0, t) = A \sin(\Omega t), \quad A = \text{const}. \quad (14)$$

Решением указанной выше задачи являются функции

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= [P_1 \cos(\lambda_* x_1) + P_2 \sin(\lambda_* x_1) \\ &+ P_3 \operatorname{ch}(\lambda_* x_1) + P_4 \operatorname{sh}(\lambda_* x_1)] \sin(\Omega t), \\ v(x_2, t) &= [Q_1 \cos(\mu_* x_2) + Q_2 \sin(\mu_* x_2) \\ &+ Q_3 \operatorname{ch}(\mu_* x_2) + Q_4 \operatorname{sh}(\mu_* x_2)] \sin(\Omega t), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\lambda_*^2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{D_1}} \Omega$ ,  $\mu_*^2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{D_2}} \Omega$ . Константы  $P_i, Q_i$  определяются из граничных условий; они не приводятся здесь из-за громоздкости. Заметим, что знаменатели выражений для констант  $P_i, Q_i$  обращаются в нуль, когда частота вынужденных колебаний  $\Omega$  совпадает с одной из собственных частот системы  $\omega_n$ , определяемых уравнением (3). При значениях  $\Omega = \omega_n$  амплитуда колебаний кантилевера в рассматриваемой модели становится бесконечной, а в реальном эксперименте резко возрастает, что и позволяет фиксировать резонансные частоты, совпадающие с собственными частотами системы.

## Эффект динамического демпфирования колебаний

Экспериментально можно фиксировать не только резкое возрастание амплитуды колебаний, но и обращение амплитуды колебаний в нуль. Последнее в системах с распределенными параметрами, состоящими из нескольких тел, может иметь место в двух случаях: когда точка, в которой измеряется амплитуда, является узлом данной формы колебаний и когда происходит динамическое демпфирование колебаний одного тела на парциальной частоте другого (зачастую это явление называют „антирезонанс“). Поставим вопрос так: существуют ли частоты вынужденных колебаний  $\Omega$ , при которых правый конец кантилевера, контактирующий с нанообъектом, остается неподвижным в любой момент времени? Ответом на этот вопрос будет решение уравнения

$$u(L_1, t) = 0. \quad (16)$$

Подставив в (16) выражение (15) для  $u(x_1, t)$ , после несложных преобразований с учетом выражений для констант  $P_i$ ,  $Q_i$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & AD_1 D_2 \lambda_*^3 \mu_*^3 [2 \operatorname{ch}(\lambda_* L_1) \sin(\lambda_* L_1) \\ & + 2 \operatorname{sh}(\lambda_* L_1) \cos(\lambda_* L_1) + \operatorname{sh}(2\lambda_* L_1) + \sin(2\lambda_* L_1)] \\ & \times \left( 1 + \cos(\mu_* L_2) \operatorname{ch}(\mu_* L_2) + \frac{C}{D_2 \mu_*^3} [\sin(\mu_* L_2) \operatorname{ch}(\mu_* L_2) \right. \\ & \left. - \cos(\mu_* L_2) \operatorname{sh}(\mu_* L_2)] \right) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решив уравнение (17), можно определить частоты  $\Omega_n$ , при которых амплитуда колебаний правого конца кантилевера обращается в нуль. Нетрудно видеть, что (17) распадается на два независимых уравнения. Первое имеет вид

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{ch}(\lambda_* L_1) \sin(\lambda_* L_1) + 2 \operatorname{sh}(\lambda_* L_1) \cos(\lambda_* L_1) \\ & + \operatorname{sh}(2\lambda_* L_1) + \sin(2\lambda_* L_1) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Второе уравнение выглядит так:

$$\begin{aligned} & 1 + \cos(\mu_* L_2) \operatorname{ch}(\mu_* L_2) + \frac{C}{D_2 \mu_*^3} [\sin(\mu_* L_2) \operatorname{ch}(\mu_* L_2) \\ & - \cos(\mu_* L_2) \operatorname{sh}(\mu_* L_2)] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение (18) зависит только от параметров кантилевера и не представляет интереса; (19) зависит от параметров наностержня и жесткости связи между кантилевером и наностержнем. Именно оно определяет „антирезонансные“ частоты, при которых происходит динамическое гашение колебаний правого конца кантилевера. Заметим, что уравнение (19) в точности совпадает с уравнением (11), определяющим собственные частоты подпружиненного наностержня. Поскольку

уравнение (11) было получено из частотного уравнения системы (3) путем пренебрежения малыми величинами порядка  $\frac{C}{D_1 \lambda_*^3}$ , можно утверждать, что „антирезонансные“ частоты  $\Omega_n$  близки к собственным частотам системы  $\omega_n$  и отличаются от них на малые величины указанного порядка.

## Анализ форм колебаний

На рис. 2–5 приведены первые две формы колебаний кантилевера при резонансе и „антирезонансе“. Резонансные формы колебаний представлены на рис. 2 (здесь и далее по вертикальной оси отложены перемещения точек кантилевера, а по горизонтальной — безразмерная координата  $x_1/L_1$ ). Рисунок соответствует случаю одинаковых размеров кантилевера и исследуемого стержня. При уменьшении размеров исследуемого стержня формы колебаний кантилевера качественно не меняются. Фиксировать резонансы с помощью АСМ достаточно легко, единственным существенным недостатком метода является то, что резонансные частоты характеризуют не исследуемый объект, а систему исследуемый объект–кантилевер. В связи с этим исключительно важен „антирезонанс“, так как он позволяет определить собственные частоты колебаний исследуемой наноструктуры. Форма колебаний кантилевера, соответствующая

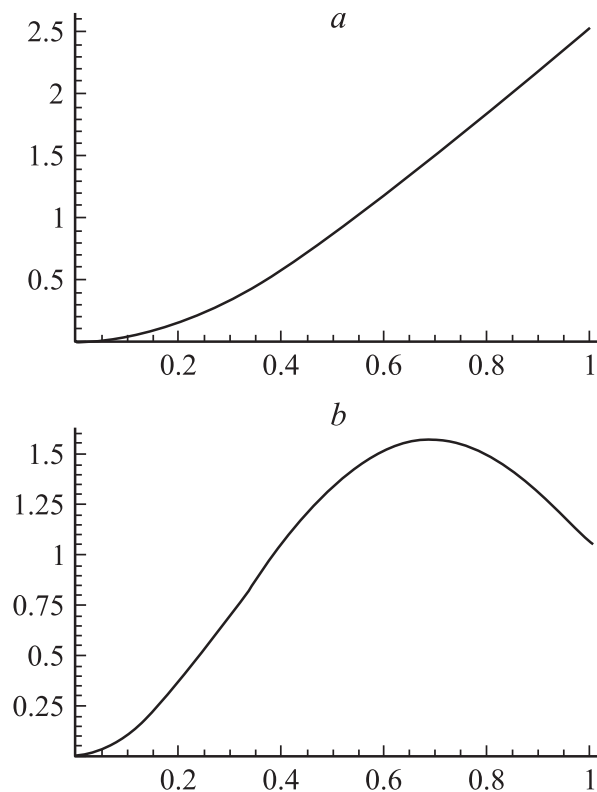


Рис. 2. Резонансные формы ( $L_2/L_1 = 1$ ,  $h_2/h_1 = 1$ ).

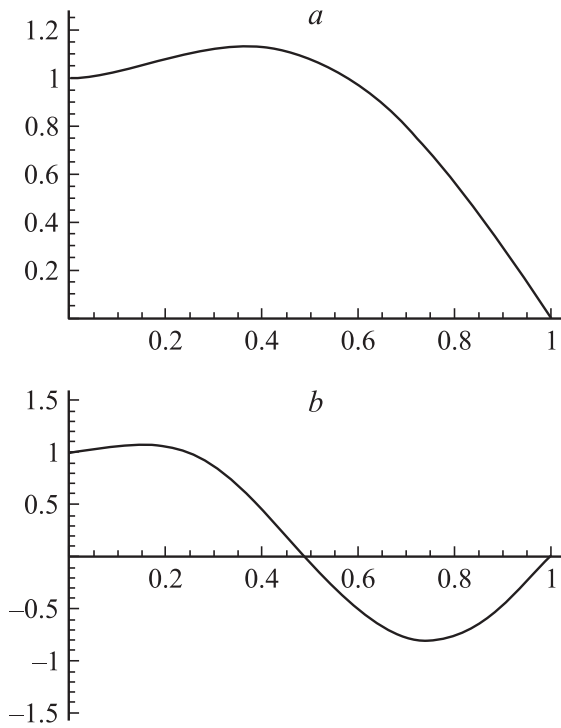


Рис. 3. „Антирезонансные“ формы ( $L_2/L_1 = 1, h_2/h_1 = 1$ ).

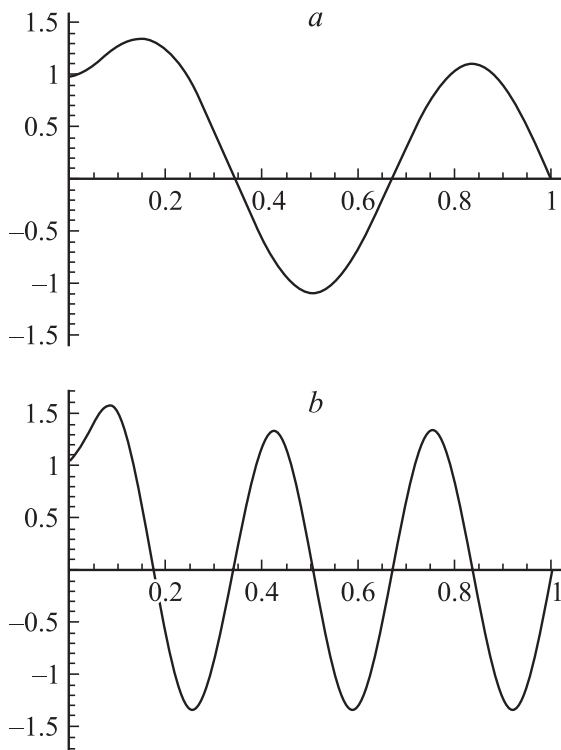


Рис. 4. „Антирезонансные“ формы ( $L_2/L_1 = 0.1, h_2/h_1 = 0.1$ ).

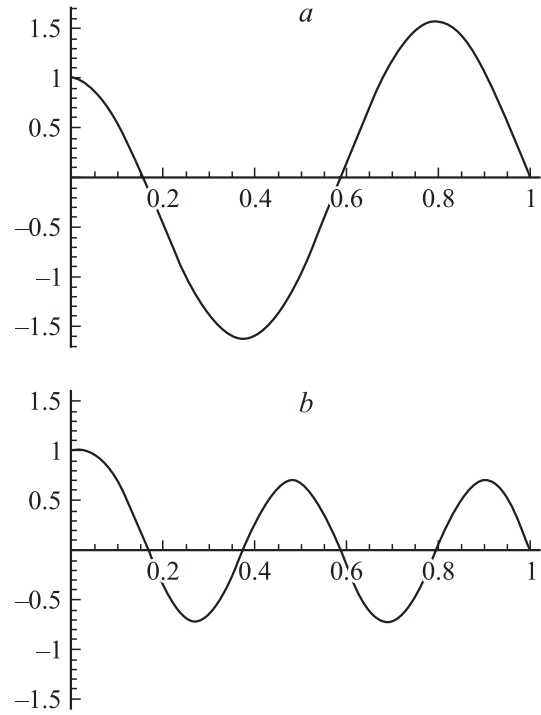


Рис. 5. „Антирезонансные“ формы ( $L_2/L_1 = 0.04, h_2/h_1 = 0.01$ ).

„антирезонансным“ частотам, — многоузловая. Количество узлов определяется порядковым номером формы и параметром

$$\frac{\mu L_2}{\lambda L_1} = \sqrt[4]{\frac{D_1 \rho_2}{D_2 \rho_1} \frac{L_2}{L_1}} = \sqrt[4]{\frac{E_1 \rho_2^* I_1 S_2}{E_2 \rho_1^* I_2 S_1} \frac{L_2}{L_1}}. \quad (20)$$

Если стержни имеют прямоугольные сечения размером  $h_i \times a_i$ , то

$$\frac{\mu L_2}{\lambda L_1} = \sqrt[4]{\frac{E_1 \rho_2^*}{E_2 \rho_1^*}} \sqrt{\frac{h_1}{h_2} \frac{L_2}{L_1}}. \quad (21)$$

Если стержни имеют произвольные сечения с характерными линейными размерами  $d_i$ , справедливы оценки

$$\frac{\mu L_2}{\lambda L_1} \sim \sqrt[4]{\frac{E_1 \rho_2^*}{E_2 \rho_1^*}} \sqrt{\frac{d_1}{d_2} \frac{L_2}{L_1}}. \quad (22)$$

Если размеры кантилевера и исследуемого стержня одинаковы, первая „антирезонансная“ форма колебаний кантилевера — безузловая, а вторая имеет один узел (рис. 3). При уменьшении всех линейных размеров исследуемого стержня в 10 раз значения „антирезонансных“ частот увеличиваются во столько же, а первые формы колебаний кантилевера становятся многоузловыми (рис. 4). Увеличение „антирезонансных“ частот может привести к тому, что они выйдут за рамки частотного диапазона измерительных приборов. При попытке зафиксировать „антирезонанс“ по многоузловой форме могут возникнуть прибремы, связанные с

тем, что луч лазера, который используется в оптической системе регистрации отклонений АСМ кантилевера [11] — это не точка, а пятно конечного размера и при измерении определяется не амплитуда в точке, а ее среднее значение на некотором участке стержня. Если длина исследуемого стержня уменьшается не столь существенно, как характерные размеры его сечения, то значения „антирезонансных“ частот и количество узлов на формах колебаний кантилевера увеличиваются не так быстро. Для иллюстрации этого факта достаточно сравнить рис. 4, который соответствует случаю, когда линейные размеры исследуемого стержня уменьшились пропорционально, с рис. 5, который отвечает случаю более существенного, но не пропорционального уменьшения линейных размеров исследуемого стержня. Таким образом, при определенных соотношениях параметров кантилевера и исследуемого объекта формы колебаний кантилевера позволяют использовать существующие лазерные устройства для фиксации „антирезонанса“.

## Обсуждение результатов

Вопрос об определении жесткостных характеристик наноразмерных объектов рассматривался в работе [12]. В данном случае изгибную жесткость наностержня можно определять как по резонансным частотам, воспользовавшись уравнением (3), так и по „антирезонансным“, воспользовавшись (19). Оба уравнения содержат два неизвестных параметра: изгибную жесткость наностержня  $D_2$  и жесткость связи иглы кантилевера с наностержнем  $C$ . (Параметры кантилевера известны; массу  $m_2$  и длину  $L_2$  наностержня можно измерить, погонная плотность для однородного стержня вычисляется по формуле  $\rho_2 = m_2/L_2$ .) Если измерены две частоты (резонансная или „антирезонансная“), их значения можно подставить в соответствующие уравнения (3) или (19), в результате чего задача определения изгибной жесткости наностержня сведется к решению системы двух трансцендентных уравнений относительно двух неизвестных. Следует отметить, что (19) проще уравнения (3) и, в отличие от уравнения (3), не содержит малого параметра  $\frac{C}{D_1 \lambda^3}$ . Таким образом, с вычислительной точки зрения метод определения изгибной жесткости наностержня по „антирезонансным“ частотам имеет преимущество. Однако для повышения достоверности результатов имеет смысл воспользоваться двумя методами и сравнить полученные значения  $D_2$  и  $C$ .

Авторы благодарят А.В. Анкудинова и А.Н. Титкова за обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05-01-00094 и гранта президента РФ, проект МД-3475.2005.1.

## Список литературы

- [1] *Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* // ДАН. 2001. Т. 381. № 3. С. 825–827.
- [2] *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* // ДАН. 2002. Т. 385. № 4. С. 494–496.
- [3] *Дунаевский М.С., Grob J.J., Забродский А.Г.* и др. // ФТП. 2004. Т. 38. Вып. 11. С. 1294.
- [4] *Binning G., Quate C.F., Gerber C.* // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 31. P. 22–26.
- [5] *Gotsmann B., Fuchs H.* // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 2597.
- [6] *Rabe U., Janser K., Arnold W.* // Rev. Sci. Instr. 1996. Vol. 67. N 9. P. 3281–3293.
- [7] *Gibson C.T., Smith D.A., Roberts C.J.* // Nanotechnology. 2005. Vol. 16. P. 234–238.
- [8] *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях. Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М., 1970.
- [9] *Принц В.Я.* // Изв. вузов. Физика. 2003. № 3. С. 35–43.
- [10] *Prinz V.Ya.* // Microelectronic Eng. 2003. Vol. 69. N 2–4. P. 466–475.
- [11] [http://www.ntmtd.ru/SPM-Techniques/Principles/AFM\\_mode2.html](http://www.ntmtd.ru/SPM-Techniques/Principles/AFM_mode2.html)
- [12] *Иванова Е.А., Морозов Н.Ф.* // ДАН. 2005. Т. 400. № 4. С. 475–479.