

01;03

Нелинейные капиллярные колебания заряженного пузырька в идеальной диэлектрической жидкости

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, И.Г. Жарова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 23 января 2006 г.)

Методом многих масштабов найдено аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных радиальных пульсациях и поверхностных осцилляциях заряженного пузырька в идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости во втором порядке малости. Показано, что при нелинейных колебаниях может иметь место резонансный обмен энергией не только между поверхностными модами, но и между радиальной и одной из поверхностных мод. Обнаружен новый по сравнению с рэллековской неустойчивостью (к собственному заряду) вид неустойчивости по отношению к избыточному давлению пара в пузырьке, сопровождающийся передачей энергии из моды центрально-симметричных пульсаций сразу во все изначально возбужденные моды поверхностных осцилляций.

PACS: 47.55.D-

Введение

Микропузырьки в жидкости играют определяющую роль в большом количестве физически и технически значимых процессов от солюлюминесценции, электрофлотации и электроразряда в жидкостях до термоядерных реакций под действием высоких температур и давлений, развивающихся при кавитационном схлопывании пузырьков, в лазерной хирургии (микропузырьки, образуются в живой ткани под действием интенсивного лазерного излучения и могут играть как положительную, так и отрицательную роль) (см., например, [1–7] и указанную там литературу). Но несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ, посвященных пузырькам в жидкостях, многие аспекты закономерностей реализации их осцилляций остались невыясненными. Так, в нелинейных исследованиях окончательно не выяснен вопрос о закономерностях нелинейного переноса энергии между центрально-симметричной модой радиальных пульсаций и модами поверхностных осцилляций, а также о закономерностях резонансного обмена энергией между модами [8–10]. В целом ряде публикаций [11–13] обсуждается идея трансляционной неустойчивости колеблющегося пузырька, при которой энергия из центрально-симметричной моды радиальных пульсаций и мод поверхностных осцилляций перекачивается в трансляционную моду, вследствие чего пузырек хаотически движется в объеме жидкости. Вызывает интерес и вопрос о закономерностях дробления растущего за счет увеличения внутреннего давления пузырька: как видно с фотографий, приведенных в [14], на финальной стадии увеличения размера пузырька на его поверхности быстро растут амплитуды высоких мод поверхностных осцилляций, что и приводит к разделению одного пузырька на множество более мелких. Проблеме нелинейного перераспределения энергии начальной деформации

пузырька между модами капиллярных колебаний и посвящено настоящая работа.

В нижеследующем изложении капиллярные колебания стенки пузырька будем разделять на радиальные центрально-симметричные пульсации, происходящие с изменением объема пузырька, и поверхностные осесимметричные осцилляции. Это удобно для физического анализа, поскольку учитывает движения стенок пузырька, различающиеся не только симметрией, но физическими процессами, их вызывающими. Так, причиной возникновения радиальных пульсаций может служить кратковременное выделение энергии лазерного или электрического импульса, испарение пара внутри пузырька и выделение в него растворенного в жидкости газа, а причиной возникновения поверхностных осцилляций, хотя бы и малой амплитуды, может служить уже тепловое движение молекул жидкости [15]. Полезно отметить, что при адиабатических пульсациях пузырька, сопровождающихся испарением и конденсацией пара окружающей жидкости в пузырьке, изменение агрегатного состояния жидкости будет существенно сказываться на изменении давления в нем.

1. Формулировка задачи

Пусть в идеальной диэлектрической жидкости плотности ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , диэлектрической проницаемостью ϵ_d , находящейся под давлением $p^{(0)}$, образовался пузырек начального радиуса r_0 , несущий на стенках электрический заряд Q , содержащий совершенный газ с давлением $p_g^{(0)}$, подчиняющийся политропическому закону с показателем политропы γ и насыщенный пар окружающей жидкости с давлением p_v . На стенку такого пузырька будет

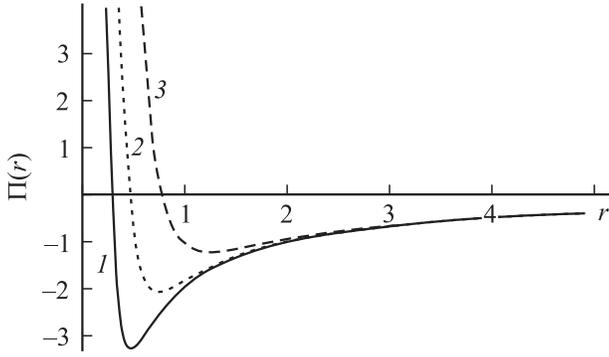


Рис. 1. Зависимости безразмерной функции $\Pi(r)$ от безразмерного радиуса пузырька r , в безразмерных переменных, в которых $\sigma = \rho = r_0 = 1$, построенные для $\gamma = 4/3$, $W = 0$, и различных значений безразмерного давления совершенного газа в пузырьке: 1 — $p_g^{(0)} = 0.05$; 2 — 0.2; 3 — 1.

действовать давление

$$P(r) = -p^{(0)} + p_V + p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_d r^4} - \frac{2\sigma}{r},$$

где r — текущий радиус пузырька. Если $P(r) \geq 0$, пузырек будет увеличивать свой объем, если $P(r) < 0$ — уменьшать, при $P(r) = 0$ пузырек будет находиться в равновесии. Для исследования положений равновесия стенок пузырька перепишем уравнение $P(r) = 0$ в виде

$$p^{(0)} - p_V = p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_d r^4} - \frac{2\sigma}{r} \equiv \Pi(r) = \text{const.} \quad (1)$$

Уравнение (1), как видно из рис. 1, может иметь два, один или ни одного корня. В частности, несложно видеть, что при $p^{(0)} - p_V \geq 0$ уравнение (1) имеет один корень $r = a$, если $(p^{(0)} - p_V)_{\min} < p^{(0)} - p_V < 0$, где $(p^{(0)} - p_V)_{\min}$ — некоторое наименьшее значение параметра $p^{(0)} - p_V$, то (1) будет иметь два решения, если же $p^{(0)} - p_V < (p^{(0)} - p_V)_{\min}$, то ни одного. Используя (1) несложно также найти

$$\partial_r \Pi(a) \equiv \partial_r \Pi(r) \Big|_{r=a} = -\rho a \omega_0^2,$$

где ω_0 — частота радиальных центрально-симметричных пульсаций пузырька, находящегося в равновесном состоянии с радиусом $r = a$, определяющаяся соотношением

$$\omega_0^2 = \frac{3\gamma}{\rho a^2} p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_d \rho a^6} - \frac{2\sigma}{\rho a^3}.$$

Из этого соотношения и рис. 1 несложно видеть, что если уравнение (1) имеет один корень, то для корня $\partial_r \Pi(a) < 0$, а значит, $\omega_0^2 > 0$, если (1) имеет два корня, то для меньшего корня $\partial_r \Pi(a) < 0$, а для большего — $\partial_r \Pi(a) > 0$, и следовательно для меньшего корня $\omega_0^2 > 0$, а для большего $\omega_0^2 < 0$ (∂_r — знак дифференцирования по радиальной координате r). Таким образом, если уравнение (1) имеет один корень, то, как

следует из линейной теории, радиальные движения стенок пузырька будут устойчивыми по отношению к бесконечно малым искажениям объема, если же будет иметь два корня, то радиальные движения стенок пузырька будут устойчивыми для пузырька, характеризующегося меньшим корнем (1) и неустойчивыми для пузырька, характеризующегося большим корнем уравнения (1).

Рассмотрим капиллярные колебания пузырька, находящегося в одном из равновесных состояний, т.е. при $r = a$. Поле скоростей течения жидкости в окрестности пузырька будем считать потенциальным с потенциалом $\psi(r, \vartheta, t)$, поле давлений жидкости в окрестности пузырька обозначим $p(r, \vartheta, t)$, а потенциалы электрического поля в окрестности пузырька и на его поверхности — $\phi(r, \vartheta, t)$ и $\phi_S(t)$ соответственно. Уравнение поверхности пузырька, совершающего радиальные центрально-симметричные пульсации и поверхностные осесимметричные осцилляции, в любой момент времени t запишем в сферической системе координат r, ϑ, φ в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - a - R(t) - \xi(\vartheta, t) \quad (2)$$

с начальным условием

$$t = 0 : \quad R = \epsilon h_0 P_0(\mu) = 0; \quad \partial_t R = 0;$$

$$\xi = \epsilon \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu); \quad \partial_t \xi = 0; \quad \mu = \cos \vartheta, \quad (3)$$

где $R(t)$ — зависящая от времени амплитуда радиальных пульсаций пузырька; $\xi(\vartheta, t)$ — искажение сферической поверхности пузырька осцилляциями поверхностных мод, заданных в начальный момент времени и возбужденными за счет нелинейного взаимодействия; символ ∂_t означает частную производную по переменной t ; ϵ — малый параметр, определенный отношением амплитуды начальной деформации пузырька к его начальному радиусу r_0 ; $P_m(\mu)$ — полином Лежандра порядка m ; Ω — множество индексов изначально возбужденных мод; h_0 и h_m — константы, учитывающие парциальный вклад m -й моды в формирование начальной формы пузырька, такие, что $h_0 + \sum_{m \in \Omega} h_m = O(a)$. В нижеследующих построениях принимается, что амплитуда радиальных пульсаций $R(t)$ и амплитуды поверхностных осцилляций $\xi(\vartheta, t)$ являются величинами одного порядка малости.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных колебаний заряженного пузырька, форма которого определена выше, состоит из уравнения Лапласа для потенциалов поля скоростей течения жидкости $\psi(\mathbf{r}, t)$, электрического потенциала $\phi(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta \psi = 0; \quad \Delta \phi = 0;$$

и условий

$$r \rightarrow +\infty : \quad \nabla \phi \rightarrow 0; \quad \nabla \psi \rightarrow 0;$$

$$r = a + R(t) + \xi(\vartheta, t) : \quad \phi = \phi_S(t);$$

$$\int \mathbf{n} \nabla \phi \, dS = -4\pi Q;$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi | : r = a + R + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$r = a + R(t) + \xi(\vartheta, t) : \quad \partial_t F + (\nabla \psi \nabla) F = 0;$$

$$-p + p_V + p_g + p_Q = p_\sigma = 0; \quad (4)$$

\mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности пузырька; p, p_σ, P_Q, p_g — давления жидкости, сил поверхностного натяжения, электрического поля собственного заряда, газа в пузырьке, которые определяются выражениями

$$p = p^{(0)} - \rho \left(\partial_t \psi + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 \right); \quad p_\sigma = \sigma (\nabla \mathbf{n});$$

$$p_Q = \frac{1}{8\pi \epsilon_d} (\nabla \phi)^2; \quad p_g = p_g^{(0)} \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma,$$

где V и V_0 — начальный и текущий объем пузырька.

2. Ход решения

Решение задачи о капиллярных колебаниях пузырька в идеальной жидкости (2)–(4) проведем методом многих масштабов, вводя два различных временных масштаба $T_m = \epsilon^m t$; $m = 0, 1$ и представив искомые величины задачи в виде разложений

$$\phi(r, \vartheta, t) = \sum_{m=0}^2 \epsilon^m \phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1) + O(\epsilon^3);$$

$$\phi_S(r, t) = \sum_{m=0}^2 \epsilon^m \phi_S^{(m)}(r, T_0, T_1) + O(\epsilon^3);$$

$$\psi(r, \vartheta, t) = \sum_{m=1}^2 \epsilon^m \psi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1) + O(\epsilon^3);$$

$$R(t) = \sum_{m=1}^2 \epsilon^m R^{(m)}(T_0, T_1) + O(\epsilon^3);$$

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{m=1}^2 \epsilon^m \xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1) + O(\epsilon^3); \quad (5)$$

2а. Задача нулевого порядка малости

Подставив выражения (5) в систему (2)–(4), и приравняв коэффициенты при ϵ^0 , выделим задачу нулевого порядка малости

$$\Delta \phi^{(0)} = 0;$$

$$r \rightarrow +\infty : \quad \nabla \phi^{(0)} \rightarrow 0;$$

$$r = a : \quad \phi^{(0)} = \phi_S^{(0)}; \quad \int_{-1}^1 a^2 \partial_r \phi^{(0)} d\mu = -2Q;$$

$$-p^{(0)} + p_V + p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_d a^4} - \frac{2\sigma}{a} = 0. \quad (6)$$

Из системы (6) найдем

$$\phi^{(0)} = \frac{Q}{r}; \quad \phi_S^{(0)} = \frac{Q}{a}.$$

2б. Задача первого порядка малости

Приравняв коэффициенты при ϵ^1 , выделим задачу первого порядка малости

$$\Delta \phi^{(1)} = 0; \quad \Delta \psi^{(1)} = 0; \quad (7)$$

$$r \rightarrow +\infty : \quad \nabla \phi^{(1)} \rightarrow 0; \quad \nabla \psi^{(1)} \rightarrow 0; \quad (8)$$

$$t = 0 : \quad R^{(1)} = h_0 P_0(\mu); \quad \partial_{T_0} R^{(1)} = 0;$$

$$\xi^{(1)} = \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu); \quad \partial_{T_0} \xi^{(1)} = 0; \quad (9)$$

$$r = a : \quad \phi^{(10)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)}) \partial_r \phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}; \quad (10)$$

$$\int_{-1}^1 \left(a \partial_r \phi^{(1)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)}) (a \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2 \partial_r \phi^{(0)}) \right) d\mu = 0; \quad (11)$$

$$-\partial_{T_0} R^{(1)} - \partial_{T_0} \xi^{(1)} + \partial_r \psi^{(1)} = 0; \quad (12)$$

$$\rho \partial_{T_0} \psi^{(1)} - p_{g0} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{3\gamma} \frac{3\gamma}{a} R^{(1)}$$

$$+ \frac{1}{4\pi \epsilon_d} \partial_r \phi^{(0)} \left(\partial_r \phi^{(1)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)}) \partial_{rr} \phi^{(0)} \right)$$

$$+ \frac{2\sigma}{a^2} R^{(1)} + \frac{\sigma}{a^2} (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} = 0. \quad (13)$$

Решения уравнений (7), с учетом условий ограниченности (8), имеют вид

$$\psi^{(1)}(r, \vartheta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n^{(1)}(T_0, T_1)}{r^{n+1}} P_n(\mu); \quad (14)$$

$$\phi^{(1)}(r, \vartheta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n^{(1)}(T_0, T_1)}{r^{n+1}} P_n(\mu). \quad (15)$$

Величину $\xi^{(1)}(\vartheta, T_0, T_1)$, определяющую форму поверхности пузырька, также разложим в ряд по полиномам Лежандра

$$\xi^{(1)}(\vartheta, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} M_n^{(1)}(T_0, T_1) P_n(\mu). \quad (16)$$

Подставим выражения (15), (16) в условия (10), (11) и, учитывая ортогональность полиномов Лежандра, найдем

$$F_0^{(1)} = 0; \quad F_n^{(1)} = a^{n-1} Q M_n^{(1)}; \quad n \geq 1;$$

$$\phi_S^{(1)} = -\frac{Q}{a^2} R^{(1)}. \quad (17)$$

В свою очередь подстановка (14)–(16) в (12), (13), с учетом (17), приводит к системе уравнений

$$D_0^{(1)} = -a^2 \partial_{T_0} R^{(1)}; \quad \frac{\partial_{T_0} D_0^{(1)}}{a^2} - \omega_0^2 R^{(1)} = 0;$$

$$D_n^{(1)} = -\frac{a^{n+2}}{(n+1)} \partial_{T_0} M_n^{(1)};$$

$$\frac{\partial_{T_0} D_n^{(1)}}{a^{n+2}} (n+1) - \omega_n^2 M_n^{(1)} = 0; \quad n \geq 1, \quad (18)$$

где ω_n — частоты поверхностных осцилляций заряженного пузырька

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho a^3} (n+1)(n-1) \left((n+2) - W \left(\frac{r_0}{a} \right)^3 \right);$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\sigma\epsilon_d r_0^3}.$$

Решение системы (18) можно записать в виде

$$R^{(1)}(T_0, T_1) = C_0^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \overline{C_0^{(1)}(T_1)} \exp(-i\omega_0 T_0);$$

$$M_1^{(1)}(T_0, T_1) = C_1^{(1)}(T_1) + B_1^{(1)}(T_1) T_0; \quad (19)$$

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1) = C_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + \overline{C_n^{(1)}(T_1)} \exp(-i\omega_n T_0); \quad n \geq 2, \quad (20)$$

где $C_0^{(1)}(T_1)$, $C_1^{(1)}(T_1)$, $B_1^{(1)}(T_1)$, $C_n^{(1)}(T_1)$ — комплексные постоянные, удовлетворяющие, согласно (9), начальным условиям

$$C_0^{(1)}(0) + \overline{C_0^{(1)}(0)} = h_0; \quad C_0^{(1)}(0) - \overline{C_0^{(1)}(0)} = 0;$$

$$C_1^{(1)}(0) = h_1; \quad B_1^{(1)}(0) = 0;$$

$$C_n^{(1)}(0) + \overline{C_n^{(1)}(0)} = h_n; \quad C_n^{(1)}(0) - \overline{C_n^{(1)}(0)} = 0; \quad n \geq 2. \quad (21)$$

Черта над символом означает взятие комплексного сопряжения.

3. Задача второго порядка малости

Данная задача получается после подстановки выражений (5) в систему (2)–(4) и выделения слагаемых, содержащих ε^2 ,

$$\Delta\phi^{(2)} = 0; \quad \Delta\psi^{(2)} = 0; \quad (22)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \nabla\phi^{(2)} \rightarrow 0; \quad \nabla\psi^{(2)} \rightarrow 0; \quad (23)$$

$$t = 0: \quad R^{(2)} = 0; \quad \partial_{T_0} R^{(2)} + \partial_{T_1} R^{(1)} = 0;$$

$$\xi^{(2)} = 0; \quad \partial_{T_0} \xi^{(2)} + \partial_{T_1} \xi^{(1)} = 0; \quad (24)$$

$$r = a: \quad \phi^{(2)} + (R^{(2)} + \xi^{(2)}) \partial_r \phi^{(0)} + \frac{1}{2} (R^{(1)} + \xi^{(1)})^2 \partial_{rr} \phi^{(0)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)}) \partial_r \phi^{(1)} = \phi_S^{(2)}; \quad (25)$$

$$\int_{-1}^1 \left[a^2 \partial_r \phi^{(2)} + a (R^{(1)} + \xi^{(1)}) (a \partial_{rr} \phi^{(1)} + 2 \partial_r \phi^{(1)}) + a (R^{(2)} + \xi^{(2)}) (a \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2 \partial_r \phi^{(0)}) + (R^{(1)} + \xi^{(1)})^2 \left(\frac{1}{2} a^2 \partial_{rrr} \phi^{(0)} + 2a \partial_{rr} \phi^{(0)} + \partial_r \phi^{(0)} \right) - \partial_{\vartheta} \xi^{(1)} \partial_{\vartheta} \phi^{(1)} \right] d(\mu) = 0; \quad (26)$$

$$-\partial_{T_0} R^{(2)} - \partial_{T_1} R^{(1)} - \partial_{T_0} \xi^{(2)} + \partial_{T_1} \xi^{(1)} + \partial_r \psi^{(2)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)}) \partial_{rr} \psi^{(1)} - \frac{1}{a^2} \partial_{\vartheta} \psi^{(1)} \partial_{\vartheta} \xi^{(1)} = 0; \quad (27)$$

$$\rho (\partial_{T_0} \psi^{(2)} + \partial_{T_1} \psi^{(1)}) + \frac{\rho}{2} \left((\partial_r \psi^{(1)})^2 + \frac{1}{a^2} (\partial_{\vartheta} \psi^{(1)})^2 \right) - \frac{3\gamma}{a} p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{3\gamma} \left(R^{(2)} - \frac{3\gamma-1}{2a} (R^{(1)})^2 + \frac{1}{a} \sum_{k \in \Omega} \frac{(M_k^{(1)})^2}{2k+1} \right) + \frac{2\sigma}{a^2} R^{(2)} + \frac{\sigma}{a^2} (2 + \Delta_{\Omega}) \xi^{(2)} - \frac{2\sigma}{a^3} (R^{(1)} + \xi^{(1)}) (R^{(1)} + (1 + \Delta_{\Omega}) \xi^{(1)}) + \frac{1}{8\pi\epsilon_d} \left[2(R^{(2)} + \xi^{(2)}) \partial_{rr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(0)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)})^2 \left((\partial_{rr} \phi^{(0)})^2 + \partial_{rrr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(0)} \right) + \frac{1}{a^2} (\partial_{\vartheta} \phi^{(1)})^2 + (\partial_r \phi^{(1)})^2 + 2 \partial_r \phi^{(2)} \partial_r \phi^{(0)} + 2(R^{(1)} + \xi^{(1)}) (\partial_{rr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(1)} + \partial_{rr} \phi^{(1)} \partial_r \phi^{(0)}) \right] = 0. \quad (28)$$

Решения системы (22) с учетом условий ограниченности (23) можно записать в виде

$$\psi^{(2)}(r, \vartheta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n^{(2)}}{r^{n+1}} P_n(\mu); \quad (29)$$

$$\phi^{(2)}(r, \vartheta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n^{(2)}}{r^{n+1}} P_n(\mu). \quad (30)$$

Величину $\xi^{(2)}(\vartheta, T_0, T_1)$, определяющую поправку второго порядка малости к форме образующей осесимметричного рельефа пузырька, разложим в ряд по полиномам Лежандра

$$\xi^{(2)}(\vartheta, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} M_n^{(2)} P_n(\mu). \quad (31)$$

Подставим выражения (15), (16), (30), (31) в уравнения (25), (26) и, учитывая (17), найдем

$$\begin{aligned} \phi_S^{(2)} &= -\frac{Q}{a^2} \left(R^{(2)} - \frac{1}{a} (R^{(1)})^2 + \frac{1}{a} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{2k+1} (M_k^{(1)})^2 \right); \\ F_0^{(2)} &= 0; \\ F_n^{(2)} &= Qa^{n-1} \left(M_n^{(2)} + \frac{1}{a} R^{(1)}(n-1)M_n^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} mK_{kmn} M_k^{(1)} M_m^{(1)} \right); \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (32)$$

где $K_{kmn} = (C_{k0m0}^{n0})^2$, а C_{k0m0}^{n0} — коэффициент Клебша–Гордона.

Затем из (27) на основе выражений (14), (16), (29), (31) с учетом (18) найдем

$$\begin{aligned} D_0^{(2)} &= -a^2 \left(\partial_{T_0} R^{(2)} + \partial_{T_1} R^{(1)} + \frac{2}{a} R^{(1)} \partial_{T_0} R^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{a} \frac{2}{2k+1} \partial_{T_0} M_k^{(1)} M_m^{(1)} \right); \\ D_n^{(2)} &= -\frac{a^{n+2}}{n+1} \left[\partial_{T_0} M_n^{(2)} + \partial_{T_1} M_n^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{a} M_n^{(1)} \partial_{T_0} R^{(1)} + \frac{1}{a} (n+2) R^{(1)} \partial_{T_0} M_n^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{a} \left((k+2)K_{kmn} - \frac{\alpha_{kmn}}{k+1} \right) M_m^{(1)} \partial_{T_0} M_k^{(1)} \right]; \\ &\quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\alpha_{kmn} = -C_{k0m0}^{n0} C_{k(-1)m1}^{n0} \sqrt{k(k+1)m(m+1)}$.

Используя выражения (14)–(18), (29)–(33) в (28) получим дифференциальные уравнения для отыскания поправок второго порядка малости к амплитудам радиальных пульсаций $R^{(2)}(T_0)$ и поверхностных осцилляций и $M_n^{(2)}(T_0)$

$$\begin{aligned} \partial_{T_0 T_0} R^{(2)} + \omega_0^2 R^{(2)} &= -2\partial_{T_0 T_1} R^{(1)} - \frac{3}{2a} (\partial_{T_0} R^{(1)})^2 \\ &\quad + \left(\eta + \frac{\omega_0^2}{a} \right) (R^{(1)})^2 - \frac{\omega_0^2}{3a} (M_1^{(1)})^2 \\ &\quad + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\chi_k + \frac{\omega_k^2}{(2k+1)a} \right) (M_k^{(1)})^2 \\ &\quad - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2k+3}{2a(2k+1)(k+1)} (\partial_{T_0} M_k^{(1)})^2; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \partial_{T_0 T_0} M_1^{(2)} &= -2\partial_{T_0 T_1} M_1^{(1)} - \frac{3}{a} \partial_{T_0} R^{(1)} \partial_{T_0} M_1^{(1)} \\ &\quad + \frac{6\omega_2^2}{5a} M_1^{(1)} M_2^{(1)} - \frac{3}{5a} \partial_{T_0} M_1^{(1)} \partial_{T_0} M_2^{(1)} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} (\Lambda_{mk1} M_k^{(1)} M_m^{(1)} + \Gamma_{km1} \partial_{T_0} M_k^{(1)} \partial_{T_0} M_m^{(1)}); \\ \partial_{T_0 T_0} M_n^{(2)} + \omega_n^2 M_n^{(2)} &= -2\partial_{T_0 T_1} M_n^{(1)} - \frac{3}{a} \partial_{T_0} R^{(1)} \partial_{T_0} M_n^{(1)} \\ &\quad + \Xi_n R^{(1)} M_n^{(1)} + \Lambda_{11n} (M_1^{(1)})^2 + \Gamma_{11n} (\partial_{T_0} M_1^{(1)})^2 \\ &\quad + \sum_{k=2}^{+\infty} \left((\Lambda_{1kn} + \Lambda_{k1n}) M_1^{(1)} M_k^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + (\Gamma_{1kn} + \Gamma_{k1n}) \partial_{T_0} M_1^{(1)} \partial_{T_0} M_k^{(1)} \right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} (\Lambda_{kmn} M_k^{(1)} M_m^{(1)} + \Gamma_{kmn} \partial_{T_0} M_k^{(1)} \partial_{T_0} M_m^{(1)}); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\eta = \frac{1}{\rho a^3} \left(\frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2} p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{3\gamma} + \frac{5Q^2}{4\pi\epsilon_d a^4} - \frac{2\sigma}{a} \right);$$

$$\begin{aligned} \chi_k &= -\frac{1}{(2k+1)\rho a^3} \left(3\gamma p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{3\gamma} \right. \\ &\quad \left. + (7k-3) \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_d a^4} - (k^2+k-1) \frac{2\sigma}{a} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{kmn} &= \frac{1}{a} \left(\frac{2\sigma}{\rho a^3} (n+1)(k^2+k-1)K_{kmn} \right. \\ &\quad \left. - \left((n-k-1)K_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k+1} \right) \omega_k^2 + \frac{Q^2}{8\pi\rho\epsilon_d a^6} (n+1) \right. \\ &\quad \left. \times \left((3-2k^2+m+k(2n+m-7))K_{kmn} + \alpha_{kmn} \right) \right); \end{aligned}$$

$$\Gamma_{kmn} = \frac{1}{a} \left(\left(\frac{n+1}{2} - k+2 \right) K_{kmn} + \left(1 + \frac{n+1}{2(m+1)} \right) \frac{\alpha_{kmn}}{k+1} \right);$$

$$\Xi_n = \frac{1}{a} \left(\omega_n^2 - (n-1)\omega_0^2 - \frac{n^2-1}{\rho a^3} \left(\frac{5Q^2}{4\pi\epsilon_d a^3} - 2\sigma(n+2) \right) \right).$$

Подставив (19), (20) в выражения (34) и (35) и исключив секулярные члены, в нерезонансном случае получим дифференциальные уравнения для определения неизвестных зависящих от времени коэффициентов

$$\partial_{T_1} C_0^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) - \overline{\partial_{T_1} C_0^{(1)}(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0)} = 0;$$

$$\begin{aligned} \partial_{T_1} B_1^{(1)}(T_1) - \frac{3}{5a} \omega_2^2 B_1^{(1)}(T_1) T_0 \\ \times \left(C_2^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + \overline{C_2^{(1)}(T_1) \exp(-i\omega_2 T_0)} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\partial_{T_1} C_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) - \overline{\partial_{T_1} C_n^{(1)}(T_1) \exp(-i\omega_n T_0)} = 0; \quad n \geq 2.$$

Решив последнюю систему совместно с начальными условиями (21), получим

$$C_0^{(1)}(T_1) = \overline{C_0^{(1)}(T_1)} = \frac{h_0}{2}; \quad C_1^{(10)}(T_1) = h_1;$$

$$B_1^{(1)}(T_1) = 0; \quad C_n^{(1)}(T_1) = \overline{C_n^{(1)}(T_1)} = \frac{h_n}{2}, \quad n \geq 2.$$

Следовательно, выражения (19), (20) можно записать в виде

$$R^{(1)}(t) = h_0 \cos(\omega_0 t); \quad M_1^{(1)}(t) = h_1; \\ M_n^{(10)}(t) = h_n \cos(\omega_n t); \quad n \geq 2. \quad (36)$$

Решение же уравнений (34), (35) определяющих нелинейные поправки второго порядка малости в нерезонансном случае можно записать в виде

$$R^{(2)}(t) = \left\{ \left(h_0^2 \left(\frac{\eta}{\omega_0^2} - \frac{1}{2a} \right) - \frac{2h_1^2}{3a} \right) \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + \frac{h_0^2}{3} \left(\frac{\eta}{\omega_0^2} + \frac{5}{2a} \right) \sin\left(\frac{3\omega_0}{2} t\right) \right\} \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \\ + \sum_{\substack{k \in \Omega \\ k \geq 2}} \frac{h_k^2}{2} \left\{ \left(\chi_k - \frac{\omega_k^2}{2a(k+1)(2k+1)} \right) \frac{2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + \left(\chi_k + \frac{(4k+5)\omega_k^2}{2a(k+1)(2k+1)} \right) \frac{\cos(2\omega_k t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - 4\omega_k^2} \right\}; \quad (37)$$

$$M_1^{(2)}(t) = \frac{12h_1 h_2}{5a} \sin^2\left(\frac{\omega_2}{2} t\right) + \sum_{\substack{k \in \Omega \\ k \geq 2}} h_k h_{k+1} \left(\frac{\delta_k^+}{(\omega_{k+1} + \omega_k)^2} \sin^2\left(\frac{\omega_{k+1} + \omega_k}{2} t\right) + \frac{\delta_k^-}{(\omega_{k+1} - \omega_k)^2} \sin^2\left(\frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2} t\right) \right); \quad (38)$$

$$M_n^{(2)}(t) = \frac{2h_0 h_n}{\omega_0(\omega_0^2 - 4\omega_n^2)} \left\{ \omega_0 \left(\Xi_n - \frac{6}{a} \omega_n^2 \right) \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \cos(\omega_n t) - \omega_n \left(2\Xi_n - \frac{3}{a} \omega_0^2 \right) \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \sin(\omega_n t) \right\} \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \\ - \frac{\Lambda_{11n}^2 h_1^2}{\omega_n^2} \sin^2\left(\frac{\omega_n}{2} t\right) + (\Lambda_{1,n-1,n} + \Lambda_{n-1,1,n}) h_1 h_{n-1} \\ \times \frac{\cos(\omega_{n-1} t) - \cos(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega_{n-1}^2} + (\Lambda_{1,n+1,n} + \Lambda_{n+1,1,n}) h_1 h_{n+1} \\ \times \frac{\cos(\omega_{n+1} t) - \cos(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega_{n+1}^2} + \sum_{\substack{k \in \Omega \\ k \geq 2}} \sum_{\substack{m \in \Omega \\ m \geq 2}} \frac{h_k h_m}{2} \\ \times \left\{ (\Lambda_{kmn} + \Gamma_{kmn} \omega_k \omega_m) \frac{\cos((\omega_k - \omega_m) t) - \cos(\omega_n t)}{\omega_n^2 - (\omega_k - \omega_m)^2} + (\Lambda_{kmn} - \Gamma_{kmn} \omega_k \omega_m) \frac{\cos((\omega_k + \omega_m) t) - \cos(\omega_n t)}{\omega_n^2 - (\omega_k + \omega_m)^2} \right\}; \\ n \geq 2; \quad (39)$$

$$\delta_k^\pm = \frac{9}{a(2k+1)(2k+3)} \times \left(\frac{\sigma}{a^3 \rho} k(k+1) \left(4(k+2) - \frac{3Q^2}{4\pi\sigma\epsilon_d a^3} \right) \pm \omega_k \omega_{k+1} \right).$$

Образующая формы пузырька, совершающего малые капиллярные колебания в окрестности положения равновесия, описывается функцией вида

$$r = a + \varepsilon R^{(1)}(t) + \varepsilon^2 R^{(2)}(t) + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} M_n^{(1)}(t) P_n(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n \in \Omega} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu), \quad (40)$$

где функции $R^{(1)}(t)$, $M_n^{(1)}(t)$, $R^{(2)}(t)$, $M_n^{(2)}(t)$ определяются выражениями (36)–(39). Выражения для электрического поля в окрестности пузырька и распределение поля скоростей течения жидкости в его окрестности легко получаются на основе соотношений (17), (18), (32), (33), (37)–(39) в виде, аналогичном (40).

4. Анализ полученных результатов

Из выражений (37)–(39) видно, что для случая $p^{(0)} - p_V \geq 0$, т.е. когда уравнение (2) имеет один корень $r = a$, или для меньшего корня уравнения (2) в случае $(p^{(0)} - p_V)_{\min} < p^{(0)} - p_V < 0$, выражения $R^{(1)}(t)$, $M_n^{(1)}(t)$, $R^{(2)}(t)$, $M_n^{(2)}(t)$ будут растущими функциями времени t , только если $\omega_n^2 < 0$. Таким образом условие неустойчивости формы пузырька можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{Q^2}{4\pi\sigma\epsilon_d a^3} \leq (n+2); \\ p^{(0)} - p_V = p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_d a^4} - \frac{2\sigma}{a}. \end{cases} \quad (41)$$

В (41) первое соотношение представляет собой критерий Рэлея [1] (критерий реализации неустойчивости заряженной сферической границы раздела фаз по отношению к собственному заряду), а второе соотношение есть условие баланса давлений на стенке равновесного пузырька. Проанализировав систему (41) несложно увидеть, что если $p^{(0)} - p_V < 0$, из второго уравнения системы (41) (из условия баланса давлений) следует

$$\frac{Q^2}{4\pi\sigma\epsilon_d a^3} < 4 - \frac{2a}{\sigma} p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{3\gamma},$$

что противоречит первому неравенству (41) (критерию неустойчивости Рэлея). Следовательно, пузырек, находящийся в равновесном состоянии с меньшим радиусом при условии $(p^{(0)} - p_V)_{\min} < p^{(0)} - p_V < 0$, будет устойчив как к бесконечно малым искажениям объема, так и формы при любом заряде пузырька.

4а. Электростатический канал реализации неустойчивости заряженного пузырька

Если $p^{(0)} - p_V \geq 0$, то из критерия Рэлея, первого из соотношений (41), видно, что наиболее неустойчивой будет являться основная мода поверхностных осцилляций пузырька ($n = 2$). Неустойчивость этой моды будет наблюдаться при условиях

$$p_g^{(0)} \left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma} + p_V \leq p^{(0)};$$

$$\frac{Q^2}{4\pi\sigma\epsilon_d r_0^3} \geq 4 \sqrt[3]{\frac{p_g^{(0)}}{p^{(0)} - p_V}},$$

когда суммарное давление газа и пара в пузырьке не превосходит давления окружающей жидкости, а заряд пузырька превышает некоторое критическое значение. Такой тип неустойчивости наиболее хорошо изучен на примере заряженных капель (см., например, [15,16]). Он характеризуется тем, что пузырек вытягивается пропорционально $P_2(\mu)$ и либо разрывается на два пузырька, либо с его вершин происходит эмиссия некоторого числа заряженных пузырьков [15,16]. Отметим также, что данный тип неустойчивости может иметь место только при достаточно большом заряде на пузырьке, который может появиться, например, при электроразряде в жидкости на финальной стадии эволюции паровой полости, за счет оседания носителей заряда на стенках пузырька. Заряд на пузырьке может присутствовать в тех случаях, когда в жидкости имеются свободные носители заряда, способные оседать на стенках пузырька, что может иметь место при неразвитой кавитации в электрогидродинамических насосах. Очевидно, что при обсуждаемом типе неустойчивости неустойчива и радиальная мода пульсаций пузырька. В частности, из (37) видно, что при достаточно больших временах будет иметь место асимптотическое равенство

$$R^{(2)}(t) \sim \frac{h_2^2}{2} \left(\chi_2 - \frac{13|\omega_2|^2}{30a} \right) \frac{\text{ch}(2|\omega_2|t)}{\omega_0^2 + 4|\omega_2|^2},$$

где $|\omega_2|$ — модуль частоты основной ($n = 2$) моды. Однако при реализации подобной неустойчивости скорость роста нелинейной поправки к основной моде поверхностных колебаний пузырька $M_2^{(2)}(t)$ значительно превосходит скорость роста нелинейной поправки к центрально-симметричной пульсационной моде $R^{(2)}(t)$, что проиллюстрировано рис. 2, на котором приведены временные зависимости величин нелинейных поправок к амплитудам пульсационной и поверхностной (основной) мод. В результате заметно искажается форма пузырька при реализации неустойчивости данного типа и незначительно изменяется его объем.

Таким образом, существует принципиальная возможность переноса энергии из основной моды поверхностных осцилляций в пульсационную радиальную. Тем не менее, следует отметить, что вероятность реализации такого канала обмена энергией между пульсационной

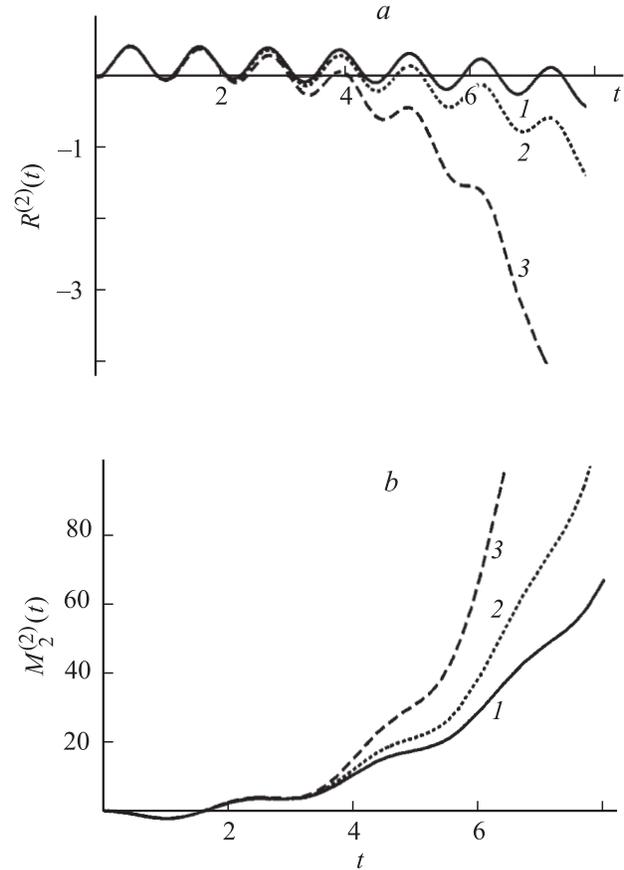


Рис. 2. Зависимости от безразмерного времени t безразмерных поправок второго порядка малости к амплитуде: a — пульсационной моды $R^{(2)}(t)$; b — основной поверхностной моды $M_2^{(2)}(t)$, построенные при $\gamma = 4/3$, $p^{(0)} - p_V = 0.5$, $p_g^{(0)} = 0.5$, $h_0 = h_2 = 0.5$ и различных значениях параметра Рэлея W : 1 — 4.05; 2 — 4.1; 3 — 4.2.

и поверхностными модами мала, поскольку для его инициирования требуется весьма большой заряд на пузырьке.

4б. Парадинамический канал реализации неустойчивости пузырька

Анализ выражений (37)–(39) также приводит к выводу, что при $\omega_0^2 < 0$ (такая ситуация реализуется только когда $(p^{(0)} - p_V)_{\min} < p^{(0)} - p_V < 0$, рис. 3) и пузырек находится в положении с большим радиусом, отвечающим большему корню уравнения (2), тогда появляется возможность перекачки энергии из пульсационной радиальной моды сразу в несколько мод поверхностных осцилляций. Так, из выражения (39) видно, что при переходе ω_0^2 через нуль в область отрицательных значений имеют место преобразования

$$\cos(\omega_0 t) \rightarrow \text{ch}(|\omega_0|t); \quad \omega_0 \sin(\omega_0 t) \rightarrow -|\omega_0| \text{sh}(|\omega_0|t),$$

где $|\omega_0|$ — модуль частоты радиальных пульсаций. Тогда выражение для нелинейной поправки к частоте

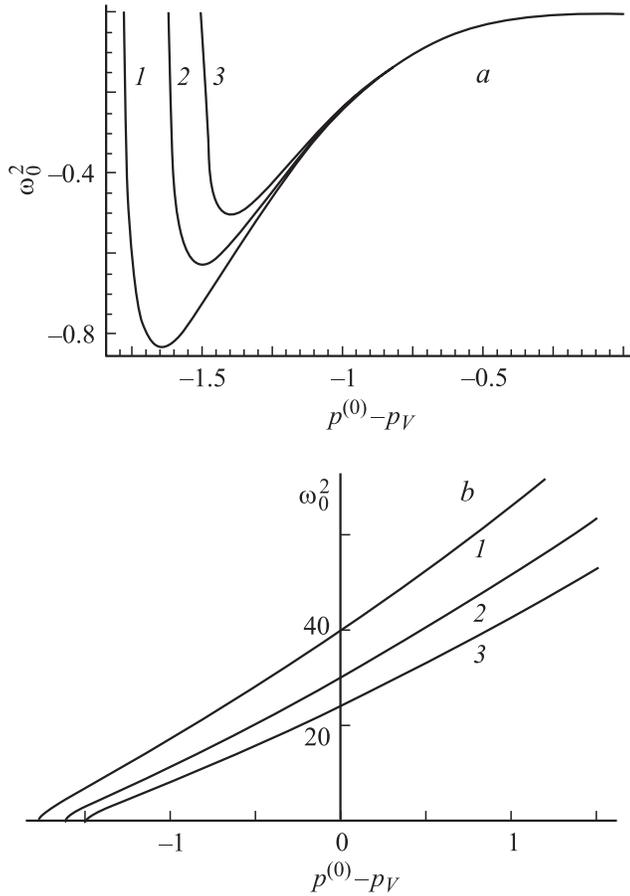


Рис. 3. Зависимости от разности безразмерных давлений $p^{(0)} - p_V$ квадрата безразмерной частоты центрально-симметричных пульсаций пузырька ω_0^2 в окрестности (*a* — большего из корней уравнения (2); *b* — меньшего из корней) построенные при $\gamma = 4/3$, $W = 0$, и различных давлениях газа в пузырьке: 1 — $p_g^{(0)} = 0.3$; 2 — 0.4; 3 — 0.5.

n -й поверхностной моды $M_n^{(2)}(t)$ при больших временах принимает вид

$$M_n^{(2)}(t) \sim \tau_n \left\{ \beta_n \operatorname{sh} \left(\frac{|\omega_0|}{2} t \right) \cos(\omega_n t) + \kappa_n \operatorname{ch} \left(\frac{|\omega_0|}{2} t \right) \sin(\omega_n t) \right\} \operatorname{sh} \left(\frac{|\omega_0|}{2} t \right);$$

$$\tau \equiv \frac{2h_0 h_n}{|\omega_0| (|\omega_0|^2 + 4\omega_n^2)}; \quad \beta_n \equiv |\omega_0| \left(\Xi_n - \frac{6}{a} \omega_n^2 \right);$$

$$\kappa_n \equiv \omega_n \left(2\Xi_n + \frac{3}{a} |\omega_0|^2 \right).$$

Это выражение можно переписать несколько иначе:

$$M_n^{(2)}(t) \sim A_n^{(2)}(t) \sin(\omega_n t + \varphi_n(t));$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_n(t)) = \frac{\beta_n}{\kappa_n} \operatorname{th} \left(\frac{|\omega_0|}{2} t \right)$$

с фазовым слагаемым $\varphi_n(t)$, практически неизменным при $0.5|\omega_0|t \gg 1$, и амплитудой $A_n^{(2)}(t)$, быстро нараста-

ющей со временем по закону

$$A_n^{(2)}(t) \sim \tau_n \left\{ \beta_n^2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{|\omega_0|}{2} t \right) + \kappa_n^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{|\omega_0|}{2} t \right) \right\}^{1/2} \operatorname{sh} \left(\frac{|\omega_0|}{2} t \right). \quad (42)$$

Таким образом, n -я мода становится неустойчивой. Источником энергии в обсуждаемом канале реализации неустойчивости пузырька является потенциальная энергия давления пара в нем. Интересно отметить, что описываемый механизм применим ко всем модам, определяющим деформацию формы пузырька в начальный момент времени, в том числе и к модам с тепловой ($\sim \sqrt{kT/\sigma}$ [15]) амплитудой, и, следовательно, применим ко всем модам, не подавляющимся вязкостью жидкости.

Описываемый тип неустойчивости принципиально отличается от электростатической, рассмотренной выше, поскольку, во-первых, она может реализоваться даже при нулевом заряде на пузырьке, во-вторых, при данном типе неустойчивости амплитуда нелинейных осцилляций поверхностных мод увеличивается с ростом номера моды (см. рис. 4, а также таблицу). Таким образом, если в начальный момент времени в спектре мод, определяющих начальную деформацию имеются моды

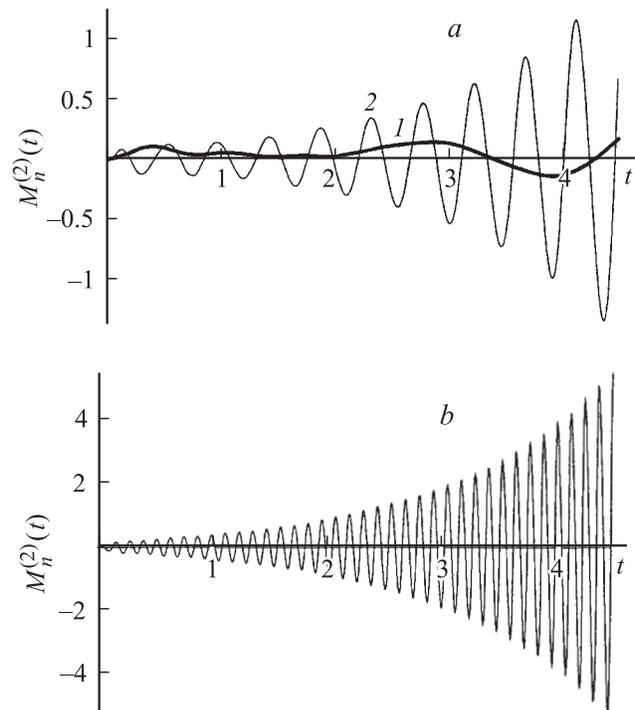


Рис. 4. Зависимости безразмерных нелинейных поправок к амплитудам поверхностных пульсаций пузырька $M_n^{(2)}(t)$ от безразмерного времени t , построенные при $\gamma = 4/3$, $p^{(0)} - p_V = -1.5$, $W = 0.1$, $p_g^{(0)} = 0.4$, $h_0 = 1/15$, $h_k = 1/15$, $2 \leq k \leq 15$ и различных значениях n . Номер у кривой совпадает с номером n поверхностной моды: *a* — кривая 1 — $n = 2$; 2 — 6; *b* — $n = 15$.

Численные значения амплитуды $A_n^{(2)}(t)$ пузырька, претерпевающего пародинамическую неустойчивость, рассчитанные по (42), при $\gamma = 4/3$, $W = 0$, $p_g^{(0)} = 0.4$, $h_0 = h_n = 0.5$ для различных мод поверхностных осцилляций и при различных значениях безразмерного давления пара в пузырьке

n	$p^{(0)} - p_V = -0.5$		$p^{(0)} - p_V = -1.5$	
	t = 0.2	t = 0.4	t = 0.2	t = 0.4
2	0.053	0.107	0.187	0.378
6	0.241	0.484	0.867	1.756
10	0.493	0.990	1.779	3.602
14	0.797	1.601	2.880	5.831
18	1.145	2.302	4.141	8.385
22	1.533	3.082	5.545	11.230
26	1.957	3.934	7.080	14.336
30	2.414	4.852	8.733	17.686
34	2.902	5.833	10.499	21.260
38	3.419	6.871	12.369	25.048
42	3.963	7.065	14.339	29.037
46	4.534	9.111	16.403	33.217
50	5.129	10.308	18.558	37.580

из интервала $[0, 1, 2, \dots, m]$, то во втором порядке малости у моды с максимальным номером m будет самая большая амплитуда колебаний, и именно эта мода внесет определяющий вклад в формирование поверхности неустойчивого пузырька (см. рис. 5, полученный численно по (40)), что и подтверждает сказанное и совпадает с данными наблюдений [17].

Построенная теория имеет лишь второй порядок малости по амплитуде начальной деформации и не дает возможности судить о финальной стадии неустойчивости, однако из физических соображений следует, что данный тип неустойчивости будет оканчиваться распадом пузырька на некоторое число малых пузырьков с последующей их стабилизацией или схлопыванием.

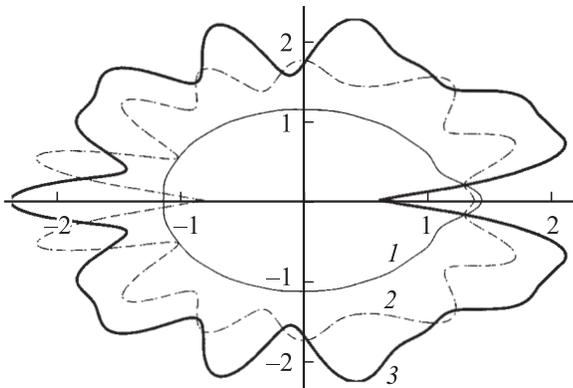


Рис. 5. Контуры образующей пузырька, претерпевающего пародинамическую неустойчивость, в различные моменты безразмерного времени: 1 — $t = 0$; 2 — 4.5; 3 — 5.27, построенные при $\varepsilon = 0.3$; остальные параметры те же, что и для рис. 4.

Пародинамический канал реализации неустойчивости пузырька имеет важное значение для понимания физических механизмов эволюции пузырей в жидкости, встречающихся в различных разделах технической физики. В частности, такой тип неустойчивости имеет место при электроразряде в жидкости или пробое жидкого диэлектрика, поскольку в данном случае из-за джоулева разогрева образуется полость, заполненная парами диэлектрика, давление которых может достигать $10^7 - 10^8 \text{ N/m}^2$ [18] (что в принятых выше обозначениях соответствует $p^{(0)} - p_V \approx -(10^7 - 10^8) \text{ N/m}^2$), и следовательно, образовавшаяся полость неустойчива по отношению к изменениям своей формы и должна проявлять тенденцию к дроблению на части. Данный факт хорошо согласуется с экспериментами по пробое жидкого диэлектрика, поскольку большинство авторов, наблюдавших распад полости, образовавшейся при пробое, отмечают, что непосредственно перед распадом полость начинает совершать капиллярные колебания, изменяя свой объем и форму [19], причем настолько интенсивно, что является источником радиоизлучения [20]. Также данный тип неустойчивости будет иметь место при кипении обычной жидкости или жидкости, помещенной в электрическое поле. Присутствие электрического поля, искажающего форму пузырька, должно привести к более быстрому дроблению пузырьков в кипящей жидкости, так как в спектре их колебаний будут присутствовать поверхностные моды большей амплитуды, чем при кипении без электрического поля, что также хорошо согласуется с экспериментальными данными [21]. Данный тип неустойчивости важен для понимания процессов, происходящих при пузырьковой кавитации. Так, известно, что при неразвитой пузырьковой кавитации происходит разрушение поверхностей, движущихся в жидкости, в окрестности которых образуются воздушные пузырьки, что связано с кавитационными микроструями, образующимися при коллапсе пузырька. Физический механизм образования кавитационных микроструй, по всей видимости, обусловлен реализацией неустойчивости одной из нечетных поверхностных мод осцилляций пузырька, сопровождающейся интенсивным переносом энергии от пульсационной радиальной моды к поверхностной.

4с. Резонансный обмен энергией между пульсационной модой и модами поверхностных осцилляций

Выражения (37)–(39) содержат в знаменателях выражения $\omega_0^2 - 4\omega_k^2$, которые при определенных условиях могут обращаться в нуль. Данный факт указывает на то, что пульсационная радиальная и поверхностные осцилляционные моды могут участвовать в нелинейном резонансном обмене энергией. В таком случае выражения (37)–(39) в окрестностях резонансов должны быть преобразованы в соответствии со стандартной математической процедурой с использованием параметра расстройки [22]. Не останавливаясь детально на получении равно пригодных разложений, описывающих форму

пузырька в резонансной ситуации, отметить лишь, что предварительные численные расчеты, проведенные при $\omega_0 = 2\omega_k$, указывают на то, что резонанс между нулевой и поверхностной модой может наблюдаться практически для любого номера моды $k \geq 2$. Помимо того, чем меньше номер поверхностной моды k , тем при меньшем значении заряда на пузырьке может наблюдаться данный резонанс. Интересно также отметить, что резонансное взаимодействие между поверхностными и радиальными модами может наблюдаться и при нулевом заряде на пузырьке.

Заметим, что анализ выражений (37)–(39), указывает на то, что, как и в задаче о капиллярных колебаниях заряженной капли, возбуждение двух соседних мод первого порядка малости приводит к возбуждению первой (трансляционной) моды колебаний пузырька, когда поверхность пузырька будет совершать малые осцилляции в окрестности центра масс всей системы, как это подробно описано в [23].

Заключение

Заряженный пузырек, находящийся в диэлектрической жидкости, в отличие от уединенной капли, может терпеть два типа неустойчивости, первый из которых реализуется при большом заряде на пузырьке и связан с потерей устойчивости второй модой поверхностных осцилляций пузырька за счет электростатической энергии его собственного заряда. Второй тип неустойчивости формы пузырька может иметь место даже при нулевом заряде пузырька и связан с интенсивной перекачкой потенциальной энергии давления пара в пузырьке от его пульсационной моды к поверхностным модам осцилляций пузырька.

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ № МК-2946-2004-1 и грантов РФФИ № 03-01-00760 и № 06-01-00066-а.

Список литературы

- [1] Жаров А.Н., Ширяева С.О. // ЭОМ. 1999. № 6. С. 9–22.
- [2] Nigmatullin R.I., Akhatov I.Sh., Vakhitova N.K., Lanev R.T. // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 414. P. 47–73.
- [3] Glinsky M.E., Baily D.S., London A.R. et al. // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13. N 1. P. 20–31.
- [4] Жаров А.Н., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 13–21.
- [5] Ахатов И.Ш., Коновалова С.И. // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 636–647.
- [6] Тесленко В.С., Дрожжин А.П., Санкин Г.Н. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 32. Вып. 4. С. 24–31.
- [7] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Жарова И.Г. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 16–24.
- [8] Feng Z.C., Leal L.G. // Phys. Fluids. 1993. Vol. A5. N 4. P. 826–836.
- [9] Trinh E.E., Thiessen D.B., Holt R.G. // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 364. P. 253–272.
- [10] Жаров А.Н., Григорьев А.И. Аналитический асимптотический расчет нелинейных осцилляций заряженного пузырька в вязкой среде. Препринт ИМИРАН. № 32. Ярославль, 2005. 17 с.
- [11] Benjamin T.B., Ellis A.T. // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 212. P. 65–80.
- [12] Feng Z.C., Leal L.G. // Phys. Fluids. 1995. Vol. A7. N 6. P. 1325–1336.
- [13] Doiñkov A.A. // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 501. P. 1–24.
- [14] Brennen C.E. // J. Fluid Mech. Vol. 472. P. 153–166.
- [15] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [16] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 19. С. 60–65.
- [17] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 2. С. 11–15.
- [18] Шамко В.В. // ЖТФ. 1978. Т. 48. Вып. 5. С. 967–971.
- [19] Калишников Н.К., Липов Г.В., Муратов В.М. // ЭОМ. 1991. № 3. С. 55–59.
- [20] Голубничий П.И., Громенко В.М., Филоненко А.Д. // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 10. С. 2260–2262.
- [21] Скимбов А.А. // ЭОМ. 1992. № 6. С. 23–27.
- [22] Ширяева С.О., Жаров А.Н., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 10–20.
- [23] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.