

01;03

Нелинейный анализ равновесной формы заряженной электропроводной капли в электростатическом подвесе

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 23 января 2006 г.)

В аналитической асимптотической процедуре получено выражение для равновесной формы заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, подвешенной в суперпозиции коллинеарных однородного внешнего электростатического и гравитационного полей, в квадратичном приближении по малой амплитуде отклонения равновесной формы от сферической (в качестве меры которой выбран квадрат безразмерной напряженности электростатического поля). Выявлено, что форма равновесной поверхности капли с учетом влияния на нее гравитационного, электростатического полей и взаимодействия собственного заряда капли с внешним электростатическим полем в области значений заряда капли и напряженности электростатического поля, далеких от критических, весьма близка к вытянутой сфероидальной. Весь анализ проведен при использовании усовершенствованной методики расчета равновесных форм капель во внешних силовых полях.

PACS: 47.55.D-

Введение

Исследование равновесных форм заряженных капель во внешних силовых полях представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, обзор [1] и указанную там литературу). В связи с важностью проблемы внимание к ней не снижается и в последние годы, используются усовершенствованные методики расчета и учитываются новые физические факторы [2–4]. К сожалению, все упомянутые расчеты равновесных форм капель выполнены лишь в линейном приближении по амплитуде отклонения от сферической формы, а попытки учесть перенос электрического заряда через поверхность капли в [3,4] выполнены неверно, на основе ошибочно выписанного условия баланса заряда на криволинейной границе раздела фаз (см., например, [5]). Отдельный интерес представляет расчет равновесных форм капель в левитаторах (бесконтактных подвесах) различного типа: акустического [6], аэродинамического [7,8], электромагнитного [9,10], электростатического [11,12] и их всевозможных комбинаций [13,14]. Широкое использование левитаторов связано с современными технологиями получения высокочистых веществ, а также с неоднократными попытками [15] проверки справедливости критерия Рэлея [16] устойчивости капли по отношению к собственному заряду.

Критические условия реализации неустойчивости изолированной капли электропроводной идеальной несжимаемой жидкости по отношению к собственному заряду теоретически вывел в конце XIX в. Рэлей в виде соотношения $W \equiv (Q^2/16\pi\sigma R^3) \geq 1$, где R , Q и σ — радиус капли, ее заряд и коэффициент поверхностного натяжения жидкости соответственно [16]. В течение XX в. и

в последние годы этот критерий неоднократно экспериментально проверялся в различного вида левитаторах. Во всех случаях справедливость критерия Рэлея была подтверждена. Причем наибольшая точность экспериментов была достигнута в [14], где критерий Рэлея был подтвержден с точностью до 4%, и в [9], где точность была около 5%.

С началом нелинейных исследований осцилляций и устойчивости заряженной капли [17–19] выяснилось, что при расчетах третьего порядка малости по амплитуде начальной деформации появляются квадратичные по амплитуде поправки к частотам осцилляций, а поскольку критические условия реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду определяются из требования прохождения квадрата частоты основной моды осцилляций через нуль в область отрицательных значений, то и критическое значение параметра Рэлея $W = W_{cr}$ оказывается зависящим от квадрата начальной деформации равновесной сферической формы. Область применимости этого результата ограничивается лишь применимостью асимптотических разложений, лежащих в основе анализов [17–20], и на величину нелинейной поправки к критическому значению параметра Рэлея накладывается только требование ее малости по сравнению с четвертым порядком. В аналитическом расчете [15], посвященном исследованию влияния вида начальной деформации сферической капли на величину критерия Рэлея, было показано, что полученная в экспериментах [9,14] точность измерений критического значения параметра Рэлея W хорошо согласуется с теоретическими данными нелинейного анализа. Тем не менее тему считать закрытой еще рано, поскольку появившиеся расчеты нелинейных осцилляций заряженных капель во внешних силовых полях [12,21] показали, что

для корректного расчета нелинейных поправок к частотам осцилляций требуется знание равновесной формы заряженной капли в силовом поле уже с точностью не ниже квадратичной по амплитуде отклонения равновесной поверхности капли от сферической. Напомним, что для корректности упомянутых выше нелинейных расчетов [12,21] было достаточно знания равновесной формы капли в линейном по амплитуде деформации приближении. В связи со сказанным становится актуальным определение равновесной формы заряженных капель во внешних силовых полях в квадратичном по амплитуде деформации приближении.

1. Постановка задачи

Рассмотрим каплю несжимаемой идеально проводящей жидкости, несущую заряд Q и подвешенную в электростатическом подвесе, когда коллинеарные внешнее однородное электростатическое поле \mathbf{E}_0 и гравитационное поле \mathbf{g} удерживают ее в „подвешенном“ состоянии. Благодаря этому система координат, связанная с центром масс капли, является инерциальной. Зададимся целью с точностью до слагаемых второго порядка малости по отклонению формы капли от сферической рассчитать форму равновесной поверхности капли в описанной системе из условия баланса давлений на ее равновесной поверхности, корректно учитывая влияние на нее гравитационного, электростатического полей и взаимодействия собственного заряда капли с внешним электростатическим полем. Принимая плотность жидкости ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ и радиус сферической (в отсутствие электростатического и гравитационного полей) формы капли R в качестве трех основных масштабов измерения физических величин, перейдем к безразмерным переменным, в которых $\rho = \sigma = R = 1$.

Поскольку очевидно, что в коллинеарных полях \mathbf{E}_0 и \mathbf{g} равновесная поверхность будет обладать осевой симметрией, обозначим ось симметрии OZ , направим ее параллельно \mathbf{E}_0 вертикально вверх и будем искать форму равновесной поверхности капли в сферических координатах в наиболее общей осесимметричной форме в виде разложения по полиномам Лежандра

$$r = r(\theta) = 1 + f(\theta) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu);$$

$$|f(\theta)| \ll 1; \quad \mu \equiv \cos \theta, \quad (1)$$

полагая, что функция $f(\theta)$ описывает малое отклонение формы от сферы. Последнее предположение позволяет нам воспользоваться методом асимптотического разложения по малому параметру ε , который введем формальным образом на основе соотношения $|f(\theta)| \sim \varepsilon \ll 1$. Соотнести величину ε с величинами присутствующих в задаче физических параметров помогут следующие рассуждения.

2. Описание математической процедуры

Поскольку заряд не нарушает сферичности равновесной формы капли, то $Q \sim \varepsilon^0$. Гравитационное и электростатическое поля \mathbf{g} и \mathbf{E}_0 должны обеспечивать неподвижность центра масс капли вне зависимости от изменения формы ее поверхности, т.е. соотношение $g \sim QE_0$ должно оставаться справедливым даже для случая твердого заряженного шарика, не изменяющего формы своей поверхности. Другими словами, компонента гравитационного давления g и компонента давления электрического поля QE_0 не должны сказываться на форме равновесной поверхности капли. К искажению равновесной сферической формы (как и в случае незаряженной капли) приводит зависящая от угла θ компонента давления электростатического поля E_0^2 . Отсюда следует, что $|f(\theta)| \sim E_0^2 \sim \varepsilon$, или $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, а в силу требования неподвижности центра масс системы получаем $g \sim QE_0 \sim \varepsilon^{1/2}$. Взаимодействие гравитационного поля g , заряда Q и электростатического поля E_0 с отклонением формы капли $f(\theta)$ будет приводить к появлению добавок в соответствующих давлениях, имеющих величину не ниже первого порядка малости, т.е. $\sim \varepsilon$, $\sim \varepsilon^{3/2}$, $\sim \varepsilon^2$ и т.д. Поэтому чтобы учесть влияние g , Q и E_0 на равновесную форму, в отличие от [1–4,22], коэффициенты a_n в (1) не будем считать зависящими от малого параметра, но представим коэффициенты a_n в (1) в виде разложения по степеням ε :

$$a_n = \varepsilon a_n^{(1)} + \varepsilon^{3/2} a_n^{(3/2)} + \varepsilon^2 a_n^{(2)} + O(\varepsilon^{5/2}).$$

В этом, собственно говоря, и проявляется предлагаемая модификация метода расчета равновесных форм капель по сравнению с предыдущими работами [1–4,22]. Полезно отметить, что результаты расчета равновесных форм капель по старой методике [1–4,22], без использования предлагаемого разложения, не согласовывались с результатами расчетов на основе принципа минимальности потенциальной энергии системы в состоянии равновесия [22] и причина этого была неясна. Как будет показано ниже, предлагаемая усовершенствованная методика дает результаты, полностью согласующиеся с расчетами на основе принципа минимальности потенциальной энергии системы в состоянии равновесия.

Ограничивая рассмотрение вторым порядком малости по ε , запишем выражение для равновесной формы поверхности капли в виде

$$r = r(\theta) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon a_n^{(1)} + \varepsilon^{3/2} a_n^{(3/2)} + \varepsilon^2 a_n^{(2)}) P_n(\mu). \quad (2)$$

Верхний индекс указывает порядок малости коэффициентов $a_n^{(m)}$. Подчеркнем еще раз, что параметр ε в (2), как и во всех последующих разложениях, является формальным, введенным лишь для удобства проведения самих разложений. В конечном результате, когда будут

получены выражения для коэффициентов $a_n^{(m)}$ через физические параметры задачи g , Q и E_0 , параметр ε следует убрать, приняв его равным единице, а малость различных слагаемых финальных соотношений будет выражена через амплитуды $a_n^{(m)}$.

На поверхности капли в состоянии равновесия должно выполняться условие баланса давлений

$$p_{\text{in}} - p_{\text{atm}} + p_{EQ} + p_g = p_\sigma. \quad (3)$$

Здесь p_{in} — давление жидкости внутри равновесной капли, p_{atm} — атмосферное давление, p_{EQ} , p_g и p_σ — давление на поверхность (2) электрических, гравитационных сил и сил поверхностного натяжения соответственно.

Условие (3) позволяет определить амплитуды $a_n^{(m)}$ в разложении (2) в результате следующей процедуры: представим входящие в (3) давления в виде формальных разложений по параметру ε

$$\begin{aligned} p_{\text{in}} &\approx p_{\text{in}}^{(0)} + \varepsilon^{1/2} p_{\text{in}}^{(1/2)} + \varepsilon p_{\text{in}}^{(1)} + \varepsilon^{3/2} p_{\text{in}}^{(3/2)} \\ &\quad + \varepsilon^2 p_{\text{in}}^{(2)} + O(\varepsilon^{5/2}); \\ p_{EQ} &\approx p_{EQ}^{(0)} + \varepsilon^{1/2} p_{EQ}^{(1/2)} + \varepsilon p_{EQ}^{(1)} + \varepsilon^{3/2} p_{EQ}^{(3/2)} \\ &\quad + \varepsilon^2 p_{EQ}^{(2)} + O(\varepsilon^{5/2}); \\ p_g &\approx p_g^{(0)} + \varepsilon^{1/2} p_g^{(1/2)} + \varepsilon p_g^{(1)} + \varepsilon^{3/2} p_g^{(3/2)} \\ &\quad + \varepsilon^2 p_g^{(2)} + O(\varepsilon^{5/2}); \\ p_\sigma &\approx p_\sigma^{(0)} + \varepsilon^{1/2} p_\sigma^{(1/2)} + \varepsilon p_\sigma^{(1)} + \varepsilon^{3/2} p_\sigma^{(3/2)} \\ &\quad + \varepsilon^2 p_\sigma^{(2)} + O(\varepsilon^{5/2}). \quad (4) \end{aligned}$$

Собрав вместе слагаемые одного порядка малости при выполнении баланса давлений для каждого из порядков малости, получим систему уравнений, позволяющую последовательно рассчитать амплитуды $a_n^{(m)}$.

3. Удовлетворение условий постоянства объема капли и неподвижности ее центра масс

Помимо баланса давлений (3) необходимо потребовать выполнения условий неизменности объема капли и неподвижности ее центра масс при деформировании поверхности

$$\begin{aligned} \iiint_V dV &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^{r(\theta)} r^2 dr d\mu = \frac{4}{3}\pi; \\ \iiint_V \mathbf{r} dV &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^{r(\theta)} \mathbf{e}_r r^3 dr d\mu = 0. \end{aligned}$$

Используя разложение (2), приведем эти условия к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon a_n^{(1)} + \varepsilon^{3/2} a_n^{(3/2)} + \varepsilon^2 a_n^{(2)}) \int_{-1}^1 P_n(\mu) d\mu \\ &\quad + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_n^{(1)} a_k^{(1)} \int_{-1}^1 P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu \right] = 0; \\ &2 \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon a_n^{(1)} + \varepsilon^{3/2} a_n^{(3/2)} + \varepsilon^2 a_n^{(2)}) \int P_n(\mu) Y_{1,m}(\mu, \varphi) d\Omega \\ &\quad + 3\varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_n^{(1)} a_k^{(1)} \int P_n(\mu) P_k(\mu) Y_{1,m}(\mu, \varphi) d\Omega \right] = 0; \\ &\quad m = (0, \pm 1), \end{aligned}$$

$d\Omega$ — элемент телесного угла.

Вычислив необходимые интегралы и последовательно приравняв к нулю выражения различных порядков малости, получим, что амплитуды нулевой и первой мод определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= 0; \quad a_0^{(3/2)} = 0; \quad a_0^{(2)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (a_n^{(1)})^2; \\ a_0^{(1)} &= 0; \quad a_0^{(3/2)} = 0; \\ a_1^{(2)} &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)}, \quad (5) \end{aligned}$$

из которых следует, что амплитуды этих мод имеют порядок малости не ниже второго.

4. Разложение по малому параметру давлений на поверхность капли

Получим отдельно для каждого из входящих в (3) давлений выражение в виде разложений по малому параметру типа (4).

4а. Давление сил поверхностного натяжения определяется через орт нормали \mathbf{n} к (2) поверхности по известным формулам

$$r = r(\theta) : \quad p_\sigma = \text{div } \mathbf{n}; \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla(r - r(\theta))}{|\nabla(r - r(\theta))|};$$

где r — сферическая координата, $r(\theta)$ — функция, описывающая образующую формы равновесной поверхности капли. Подставив в эти формулы разложение (2), учитывая выражения (5) для амплитуд нулевой и первой мод и ограниченность слагаемыми до 2-го порядка

малости по ε включительно, получим

$$\begin{aligned}
 p_\sigma^{(0)} &= 2; & p_\sigma^{(1/2)} &= 0; \\
 p_\sigma^{(1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2)a_n^{(1)}P_n(\mu); \\
 p_\sigma^{(3/2)} &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2)a_n^{(3/2)}P_n(\mu); \\
 p_\sigma^{(2)} &= -2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{2n+1} (a_n^{(1)})^2 \right) P_0(\mu) \\
 &\quad - 12 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+2)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)} \right) P_1(\mu) \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n-1)(n+2)a_n^{(2)} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} (m(m+1)-1) K_{kmn} a_k^{(1)} a_m^{(1)} \right] P_n(\mu). \quad (6)
 \end{aligned}$$

В (6) $K_{kmn} \equiv (C_{k0,m0}^{n0})^2$, $C_{k0,m0}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана, отличные от нуля, только когда индексы удовлетворяют соотношениям $|k-m| \leq n \leq k+m$, $k+m+n$ — четное.

Чтобы получить в виде разложений (4) выражения для входящих в (3) давлений гравитационного и электрического полей, необходимо выделить в явном виде порядок малости определяющих эти давления физических величин g и E_0 , что удобно сделать, введя формальные замены: $g \rightarrow \varepsilon^{1/2}$; $E_0 \rightarrow \varepsilon^{1/2}E_0$.

4б. Гравитационное давление определяется выражением

$$p_g = g[r(0) + r(\theta)\mu],$$

после подстановки в которое функции $r(\theta)$, описывающей форму поверхности (2), несложно получить

$$\begin{aligned}
 p_g^{(0)} &= 0; \\
 p_g^{(1/2)} &= g(1-\mu) = g(P_0(\mu) - P_1(\mu)); \\
 p_g^{(1)} &= 0; \\
 p_g^{(3/2)} &= g \left[\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(1)} \right) P_0(\mu) - \frac{2}{5} a_2^{(1)} P_1(\mu) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \left((1-\delta_{n,2}) \frac{n}{2n-1} a_{n-1}^{(1)} + \frac{n+1}{2n+3} a_{n+1}^{(1)} \right) P_n(\mu) \right]; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_g^{(2)} &= g \left[\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(3/2)} \right) P_0(\mu) - \frac{2}{5} a_2^{(3/2)} P_1(\mu) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \left((1-\delta_{n,2}) \frac{n}{2n-1} a_{n-1}^{(3/2)} + \frac{n+1}{2n+3} a_{n+1}^{(3/2)} \right) P_n(\mu) \right].
 \end{aligned}$$

Здесь и далее $\delta_{n,k}$ — символ Кронекера.

4с. Давление электрических сил на равновесную поверхность капли

$$r = r(\theta) : \quad p_{EQ} = \frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{1}{8\pi} (\nabla\Phi)^2,$$

в виде разложение типа (4) можно получить, рассмотрев электростатическую задачу

$$\Delta\Phi = 0;$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi \rightarrow -\varepsilon^{1/2}E_0r\mu; \quad r = r(\theta) : \quad \Phi = \Phi_S;$$

$$2\pi \int_{-1}^1 (\mathbf{n}\nabla\Phi)|_{r=r(\theta)} d\mu = -4\pi Q,$$

где Φ — потенциал электростатического поля, а Φ_S — потенциал поверхности капли.

Подставив в сформулированную краевую задачу формальное разложение для потенциала Φ в ряд по полужелым степеням параметра ε

$$\Phi \approx \Phi_0 + \varepsilon^{1/2}\Phi_{1/2} + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^{3/2}\Phi_{3/2} + \varepsilon^2\Phi_2 + O(\varepsilon^{5/2}),$$

получим набор краевых задач для определения каждой из составляющих Φ_m . Очевидно, что каждая из компонент потенциала является решением уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi_m = 0; \quad m \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots\}. \quad (8)$$

Системы краевых условий для задач нулевого порядка и порядка малости 1/2 очевидны

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi_0 \rightarrow 0;$$

$$r = 1 : \quad \Phi_0 = \Phi_S^{(0)}; \quad \int_{-1}^1 \partial_r \Phi_0|_{r=1} d\mu = -2Q;$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi_{1/2} \rightarrow -E_0r\mu;$$

$$r = 1 : \quad \Phi_{1/2} = \Phi_S^{(1/2)}; \quad \int_{-1}^1 \partial_r \Phi_{1/2}|_{r=1} d\mu = 0.$$

Решением нулевого порядка является потенциал заряженной сферы, решением порядка 1/2 — потенциал в окрестности незаряженной сферы, помещенной во внешнее однородное электростатическое поле

$$\Phi_0 = \frac{Q}{r}; \quad \Phi_{1/2}(r, \theta) = -E_0\mu r \left(1 - \frac{1}{r^3} \right). \quad (9)$$

В первом порядке малости получим следующую систему краевых условий, дополняющих уравнение (8) для функции Φ_1 :

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi_1 \rightarrow 0;$$

$$r = 1 : \quad \Phi_1 + \partial_r \Phi_0 \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(1)} P_n(\mu) = \Phi_S^{(1)};$$

$$\int_{-1}^1 \left(\partial_r \Phi_1 + (2\partial_r \Phi_0 + \partial_{rr} \Phi_0) \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(1)} P_n(\mu) \right) \Big|_{r=1} d\mu = 0.$$

Решение этой краевой задачи описывает в линейном приближении потенциал в окрестности заряженной капли, поверхность которой отлична от сферы

$$\Phi_1(r, \theta) = Q \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(1)} r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (10)$$

Задачи порядков малости 3/2 и 2 учитывают уже взаимодействие как собственного заряда капли, так и внешнего поля с отклонением формы ее поверхности от сферы. Соответствующие системы краевых условий имеют вид для порядка малости 3/2:

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi_{3/2} \rightarrow 0;$$

$$r = 1 :$$

$$\Phi_{3/2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\partial_r \Phi_0 a_n^{(3/2)} + \partial_r \Phi_{1/2} a_n^{(1)} \right) P_n(\mu) = \Phi_S^{(3/2)};$$

$$\int_{-1}^1 \left[\partial_r \Phi_{3/2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left((2\partial_r \Phi_0 + \partial_{rr} \Phi_0) a_n^{(3/2)} + (2\partial_r \Phi_{1/2} + \partial_{rr} \Phi_{1/2}) a_n^{(1)} \right) P_n(\mu) - \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(1)} \partial_\theta \Phi_{1/2} \partial_\theta (P_n(\mu)) \right] \Big|_{r=1} d\mu = 0;$$

для порядка малости 2:

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi_2 \rightarrow 0;$$

$$r = 1 :$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\partial_r \Phi_0 a_n^{(2)} + \partial_r \Phi_{1/2} a_n^{(3/2)} + \partial_r \Phi_1 a_n^{(1)} \right) P_n(\mu) \\ - \partial_r \Phi_0 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (a_n^{(1)})^2 \right) P_0(\mu) \\ - \partial_r \Phi_0 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)} \right) P_1(\mu) \\ + \frac{1}{2} \partial_{rr} \Phi_0 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} a_k^{(1)} a_m^{(1)} P_k(\mu) P_m(\mu) = \Phi_S^{(2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[\partial_r \Phi_2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left((2\partial_r \Phi_0 + \partial_{rr} \Phi_0) a_n^{(2)} + (2\partial_r \Phi_{1/2} + \partial_{rr} \Phi_{1/2}) a_n^{(3/2)} + (2\partial_r \Phi_1 + \partial_{rr} \Phi_1) a_n^{(1)} \right) P_n(\mu) - \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n^{(3/2)} \partial_\theta \Phi_{1/2} + a_n^{(1)} \partial_\theta \Phi_1 \right) \partial_\theta (P_n(\mu)) - (2\partial_r \Phi_0 + \partial_{rr} \Phi_0) \left(\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (a_n^{(1)})^2 \right) P_0(\mu) + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)} \right) P_1(\mu) + \left(\partial_r \Phi_0 + 2\partial_{rr} \Phi_0 + \frac{1}{2} \partial_{rrr} \Phi_0 \right) \times \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} a_k^{(1)} a_m^{(1)} P_k(\mu) P_m(\mu) \right) \right] \Big|_{r=1} d\mu = 0. \end{aligned}$$

Решив соответствующие краевые задачи, получим выражения для компонент электростатического потенциала порядка 3/2 и 2:

$$\begin{aligned} \Phi_{3/2} = \frac{6}{5r^2} E_0 a_2^{(1)} P_1(\mu) \\ + 3E_0 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(1-\delta_{n,2})n}{2n-1} a_{n-1}^{(1)} + \frac{n+1}{2n+3} a_{n+1}^{(1)} \right) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, \theta) = \frac{6}{5r^2} \left(E_0 a_2^{(3/2)} + 6Q \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)} \right) P_1(\mu) \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left(3E_0 \left(\frac{(1-\delta_{n,2})n}{2n-1} a_{n-1}^{(3/2)} + \frac{n+1}{2n+3} a_{n+1}^{(3/2)} \right) + Q \left(a_n^{(2)} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} k K_{kmn} a_k^{(1)} a_m^{(1)} \right) \right) \frac{P_n(\mu)}{r^{(n+1)}}. \quad (12) \end{aligned}$$

С помощью выражений (9)–(12) вычислим последовательно все компоненты в разложении давления электрического поля p_{EQ} :

$$p_{EQ}^{(0)} = Q^2/8\pi; \quad p_{EQ}^{(1/2)} = \frac{3}{4\pi} Q E_0 P_1(\mu);$$

$$p_{EQ}^{(1)} \approx \frac{1}{8\pi} \left[3E_0^2 (1 + 2P_2(\mu)) + 2Q^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1) P_n(\mu) \right];$$

$$\begin{aligned}
 P_{EQ}^{(3/2)} &\approx \frac{Q}{20\pi} \left[6E_0 a_2^{(1)} P_1(\mu) + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \left(Q(n-1) a_n^{(3/2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3E_0 \left(\frac{(1-\delta_{n,2})n(2n-3)}{2n-1} a_{n-1}^{(1)} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{(n+1)(2n-1)}{2n+3} a_{n+1}^{(1)} \right) \right) P_n(\mu) \right]; \\
 P_{EQ}^{(2)} &\approx -\frac{7Q^2}{8\pi} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1} (a_n^{(1)})^2 \right) P_0(\mu) \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{54}{35} E_0^2 a_3^{(1)} + \frac{6}{5} QE_0 a_2^{(3/2)} \right. \\
 &\quad \left. - 9Q^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)} \right) P_1(\mu) \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{Q^2}{8\pi} \left(2(n-1) a_n^{(2)} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left((3-2k^2 \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + m+k(2n+m-7) K_{kmn} + \alpha_{kmn} \right) a_k^{(1)} a_m^{(1)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{9E_0^2}{4\pi} \left(\frac{8}{15} \delta_{n,2} a_2^{(1)} + \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} a_{n+2}^{(1)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1-\delta_{n,2}-\delta_{n,3}) \frac{(n-2)(n-1)n}{(2n-3)(2n-1)} a_{n-2}^{(1)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \left((1-\delta_{n,2})n^2 \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{(n-2)n(2n+3)-1}{2n+3} \right) a_n^{(1)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3QE_0}{4\pi} \left((1-\delta_{n,2}) \frac{n(2n-3)}{2n-1} a_{n-1}^{(3/2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(n+1)(2n-1)}{2n+3} a_{n+1}^{(3/2)} \right) \right] P_n(\mu); \\
 \alpha_{kmn} &\equiv -\sqrt{k(k+1)m(m+1)} C_{k0,m0}^{n0} C_{k(-1),m1}^{n0}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

5. Расчет равновесной формы капли в электростатическом подвесе

Коэффициенты $a_n^{(m)}$ в выражении для формы равновесной поверхности (2) вычислим, подставив полученные разложения для давлений (6), (7), (13) в условие баланса давлений (3), приравняв слагаемые одинакового порядка малости по ε и используя ортогональность полиномов Лежандра.

В нулевом порядке получим равенство, описывающее баланс давлений на поверхности заряженной сфериче-

ской капли в отсутствие внешних полей

$$p_{in}^{(0)} - P_{atm} = 2 - \frac{Q^2}{8\pi}.$$

Приравняв слагаемые, имеющие порядок малости $\sim \varepsilon^{1/2}$, получим выражение для добавки к давлению в капле, возникающей вследствие действия гравитации: $p_{in}^{(1/2)} = -g$ и условие неподвижности центра масс заряженной капли в электрическом и гравитационном полях

$$g = \frac{3}{4\pi} QE_0 = 12\sqrt{wW}; \quad w \equiv \frac{E_0^2}{16\pi}; \quad W \equiv \frac{Q^2}{16\pi}; \tag{14}$$

где w и W — параметры Тейлора и Рэлея, характеризующие устойчивость поверхности капли по отношению к внешнему электрическому полю и собственному заряду соответственно.

Рассмотрение слагаемых первого порядка малости по ε позволяет определить добавку к внутреннему давлению в капле $p_{in}^{(1)} = -3E_0^2/8\pi$ и коэффициенты первого порядка в разложении (2):

$$a_n^{(1)} = \delta_{n,2} \frac{3E_0^2}{16\pi - Q^2}. \tag{15}$$

Согласно (15) первый порядок малости имеет лишь коэффициент при полиноме Лежандра $P_2(\mu)$, в то время как коэффициенты при всех остальных полиномах имеют более высокий порядок малости. В результате с точностью до слагаемых $\sim \varepsilon$ равновесная форма поверхности капли запишется в виде

$$r(\theta) \approx 1 + (3wP_2(\mu)/(1-W)) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Из сравнения этого выражения с разложением в ряд по эксцентриситету e уравнения сфероидальной поверхности, выписанного в сферических координатах

$$r_{sph} \approx 1 + e^2 P_2(\mu)/3 + O(e^4),$$

следует, что равновесную форму поверхности заряженной капли в слабом электростатическом и гравитационном полях можно считать сфероидом с точностью до слагаемых $\sim e^2$, эксцентриситет которого связан с зарядом капли и напряженностью электростатического поля соотношением $e^2 = 9w/(1-W)$, что совпадает с результатами ранее проведенных исследований [22].

Рассмотрев условие баланса давлений в порядке малости $3/2$, получим очередную поправку к давлению внутри капли $p_{in}^{3/2} = -ga_2^{(1)}$ и выражение для коэффициентов $a_n^{(3/2)}$ в разложении (2)

$$a_n^{(3/2)} = \delta_{n,3} \frac{3(9QE_0 - 4\pi g)}{20\pi(10 - Q^2/2\pi)} a_2^{(1)}.$$

В данном порядке малости отличен от нуля коэффициент $a_3^{(3/2)}$ при полиноме Лежандра $P_3(\mu)$, который учитывает влияние на равновесную поверхность

гравитационного поля и взаимодействия собственного заряда капли с внешним электростатическим полем, что приводит к нарушению симметрии равновесной формы относительно экваториальной плоскости.

Условие баланса добавок к давлениям следующего, второго порядка малости позволяет найти $p_{in}^{(2)} = -\frac{1}{5}(8-7\frac{Q^2}{8\pi})(a_2^{(1)})^2 - g a_3^{(3/2)}$ и выяснить, что из коэффициентов $a_n^{(2)}$ отличны от нуля лишь $a_2^{(2)}$ и $a_4^{(2)}$:

$$a_2^{(2)} = \frac{1}{7(2-Q^2/8\pi)} \left(\left(10 - \frac{Q^2}{4\pi}\right) (a_2^{(1)})^2 + \frac{81}{20\pi} E_0^2 a_2^{(1)} + \frac{3}{2} \left(\frac{9E_0 Q}{4\pi} - g \right) a_2^{(3/2)} \right);$$

$$a_4^{(2)} = \frac{1}{7(3-Q^2/8\pi)} \left(\frac{3}{5} \left(10 - \frac{Q^2}{4\pi}\right) (a_2^{(1)})^2 + \frac{9}{5\pi} E_0^2 a_2^{(1)} + \frac{2}{3} \left(\frac{15E_0 Q}{4\pi} - g \right) a_2^{(3/2)} \right).$$

Кроме того, согласно (5) и (15) для коэффициентов при полиномах нулевого и первого порядков получаем $a_0^{(2)} = -\frac{1}{5}(a_2^{(1)})^2$, $a_1^{(2)} = 0$, т.е. выясняем, что во втором порядке малости поправка к трансляционной моде ($n=1$) отсутствует, но имеется поправка к нулевой ($n=0$).

Форма равновесной поверхности капли с точностью до второго порядка малости по ε включительно (что эквивалентно учету слагаемых четвертого порядка по E_0 и g) описывается следующим выражением:

$$r = 1 + a_0^{(2)} P_0(\mu) + (a_2^{(1)} - a_2^{(2)}) P_2(\mu) + a_3^{(3/2)} P_3(\mu) + a_4^{(2)} P_4(\mu), \quad (16)$$

где коэффициенты $a_n^{(m)}$, выраженные с помощью (14) через параметры Тейлора w и Рэлея W , определяются соотношениями

$$a_0^{(2)} = -\frac{9w^2}{5(1-W)^2}; \quad a_2^{(1)} = \frac{3w}{1-W};$$

$$a_3^{(3/2)} = \frac{108\sqrt{Ww^3}}{5(5-4W)(1-W)};$$

$$a_2^{(2)} = \frac{9w^2(79-84W+8W^2)}{7(1-W)^3(5-4W)};$$

$$a_4^{(2)} = \frac{54w^2(65-33W-28W^2)}{35(1-W)^2(3-2W)(5-4W)}. \quad (17)$$

Разложение (16) будет равномерным в области значений параметров w и W , в пределах которой коэффициенты $a_n^{(m)}$ удовлетворяют соотношениям малости

$$F_1 \equiv a_2^{(1)} \sim \varepsilon; \quad F_3 \equiv \frac{a_3^{(3/2)}}{a_2^{(1)}} \sim \varepsilon^{1/2};$$

$$F_k \equiv \frac{a_k^{(2)}}{a_2^{(1)}} \sim \varepsilon; \quad k = 0, 2, 4. \quad (18)$$

6. Анализ полученных результатов

На рис. 1 в плоскости параметров w, W изображены линии, соответствующие знакам строго равенства в соотношениях (18). Область равномерной пригодности выражения (16) лежит ниже и левее всех кривых. Видно, что наибольшее ограничение на размеры области равномерной пригодности выражения (16) накладывает отношение между коэффициентами при полиноме Лежандра второго порядка: $F_2 \sim \varepsilon$. Пределы изменения параметров w и W ограничены сверху их критическими значениями, при которых поверхность капли теряет устойчивость: $w_{cr} \approx 0.052$, $W_{cr} = 1$. Таким образом, область равномерности разложения (16) включает достаточно большие напряженности электрического поля и величины собственного заряда капли, достигающие ~ 0.7 своих критических значений.

На рис. 2 представлены формы поверхностей равновеликих по объему сферы, сфероида и равновесной капли, уравнение образующей формы которой удовлетворяет (16). Из приведенных иллюстраций видно, что

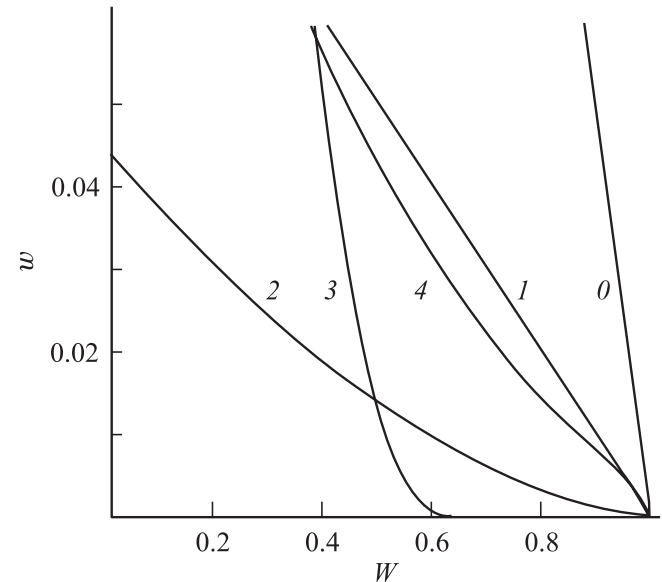


Рис. 1. Зависимость между w и W , соответствующие знакам строго равенства в соотношениях (18) при $\varepsilon = 0.3$. Номер кривой совпадает с нижним индексом F_k .

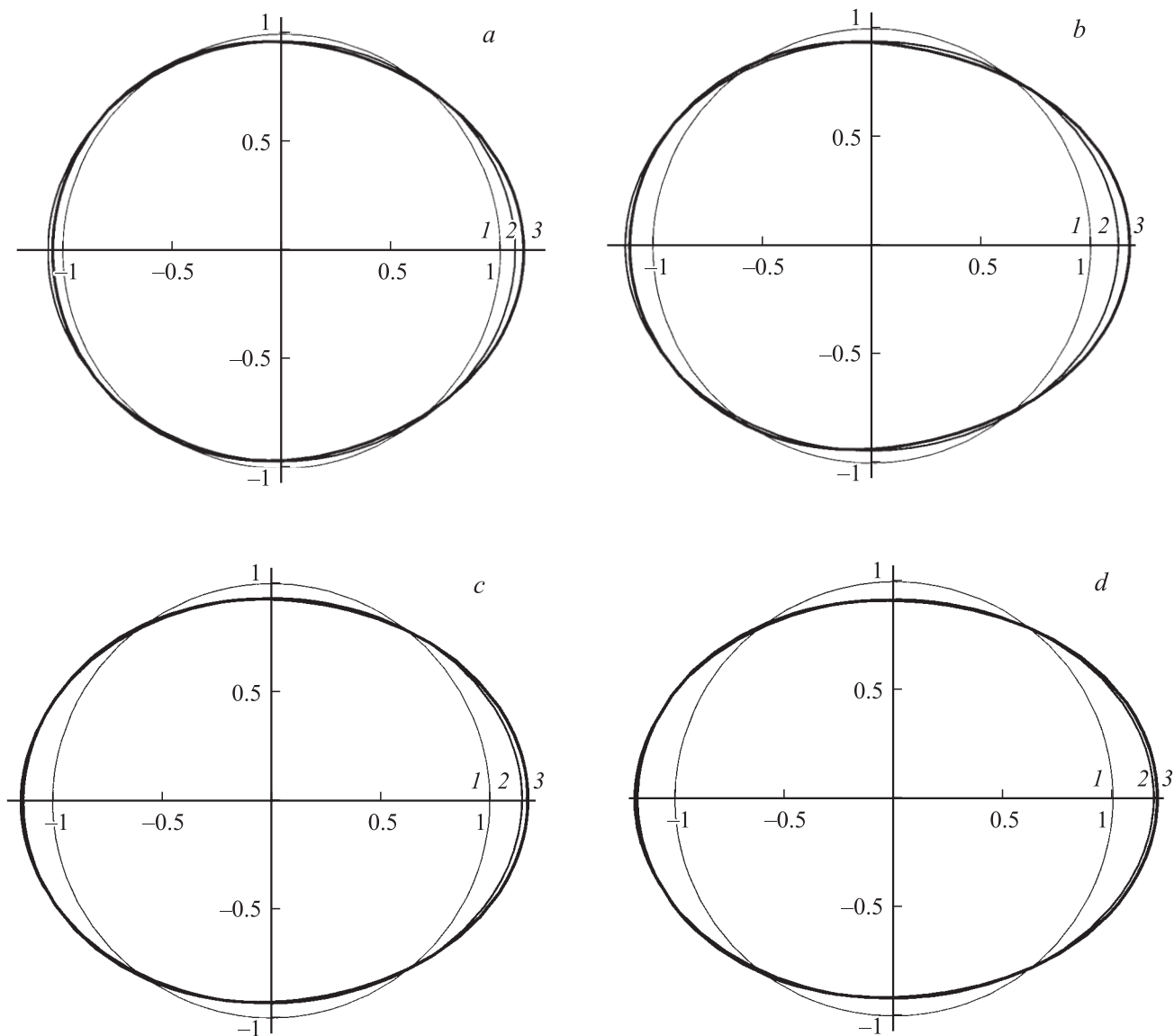


Рис. 2. Формы образующих равновеликих по объему сферы (1), сфероида (2) и равновесной капли (3). а) $w = 0.01$, $W = 0.5$; б) 0.02, 0.4; в) 0.03, 0.2; д) 0.04, 0.1.

поверхность заряженной капли, подвешенной в электростатическом и гравитационном полях, слабо отличается от сфероидальной даже на границе области применимости выражения (16). Таким образом, использование в аналитических расчетах сфероидального приближения для описания равновесной формы капли является оправданным даже в более высоком приближении, нежели квадратичное по квадрату эксцентриситета.

На рис. 3 приведена зависимость отношения меньшей полуоси равновесной фигуры капли к большей от параметров w и W , рассчитанная в области асимптотичности (16). Несложно видеть, что максимальное удлинение капли достигается при максимальных значениях w и W , даже при малых w большие значения W приводят к заметному искажению формы капли по сравнению со

сферической. Последнее обстоятельство представляет интерес в связи с широким использованием электростатических подвесов в экспериментах по проверке критерия Рэлея (критерия устойчивости капли по отношению к собственному заряду) [11–14].

Заключение

Использование усовершенствованной процедуры помодового анализа условия баланса давлений на равновесной поверхности капли показало, что применение в аналитических и численных расчетах сфероидального приближения для равновесной формы заряженной капли во внешних электростатическом и гравитационном

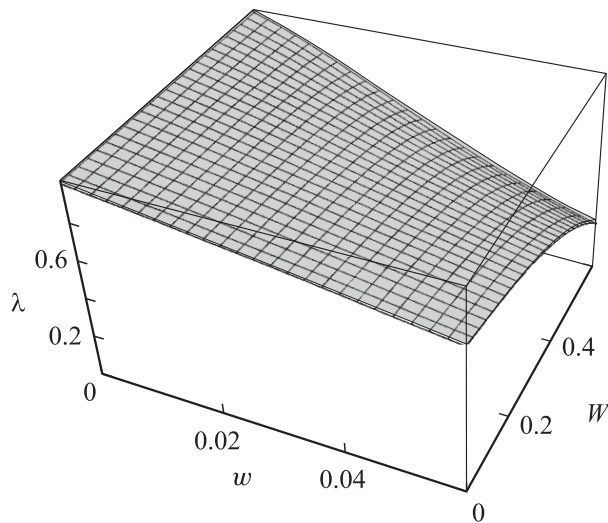


Рис. 3. Зависимость λ — отношения меньшей полуоси равновесной формы капли к большей, от параметров w и W .

полях оправдано не только в линейном по величине сфероидальной деформации приближении, но и в квадратичном. Выяснилось также, что в экспериментальных исследованиях по проверке критерия Рэлея, использовавшихся различные варианты электростатических подвесов, форма капли заметно отличалась от сферической, что неизбежно должно было проявиться в отклонении измеряемых значений критических параметров от предсказываемых строгой теорией.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-00760.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 41–47.
- [3] Zholkovskij E.K., Maslian J.H., Czarnecki J. // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 472. P. 1–27.
- [4] Шкадов В.Я., Шутов А.А. // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 54–66.
- [5] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 22–28.
- [6] Yarin A.L., Brenn G., Kastner O. et al. // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 399. P. 151–204.
- [7] Rouleau M., Desbois M. // J. Atmosph. Sci. 1972. Vol. 29. N 4. P. 565–569.
- [8] Duchemin L., Lister J.R., Lange U. // J. Fluid Mech. 2005. Vol. 533. P. 161–170.
- [9] Duft D., Lebius H., Huber B.A. et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. N 8. P. 1–4.
- [10] Dupac M., Beale D.G., Overflat R.A. // Nonlinear Dynamic. 2005. Vol. 42. P. 25–42.
- [11] Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. // J. Colloid Sci. 1964. Vol. 19. P. 136–143.
- [12] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 93–95.
- [13] Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. // J. Atmosph. Sci. 1970. Vol. 27. N 11. P. 1173–1181.
- [14] Schweizer J.W., Hanson D.N. // J. Cool. Int. Sci. 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
- [15] Григорьев А.И., Жаров А.Н., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 44–53.
- [16] Rayleigh Lord (J.V. Strett) // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [17] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 47. P. 373–395.
- [18] Tsamopoulos J.A., Akylas T.R., Brown R.A. // Proc. R. Soc., London, 1985. Vol. A401. P. 67–88.
- [19] Feng Z.C. // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [20] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.
- [21] Ширяева С.О., Волкова М.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 36–44.
- [22] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.