01;03

Регулярное асимптотическое разложение для линеаризованного уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука

© И.Б. Чекмарев

(Поступило в Редакцию 15 августа 2005 г.)

Исследована диссипативная релаксация плоской звуковой волны в неподвижном однородном газе. Процесс описан с помощью линеаризованного уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука. Решение для малых чисел Кнудсена строится с помощью техники многомасштабных разложений. Равномерно пригодное при больших временах самосогласованное разложение доведено до четвертого супербарнеттовского приближения. Получены аналитические выражения для параметров волны, включающие поправки Кнудсена для скорости и декремента затухания. Подобные решения интересны, в частности, тем, что позволяют оценить приемлемость тех или иных допущений.

PACS: 05.20.Dd, 51.10.+y

Фундаментальным уравнением, детально описывающим поведение разреженного простого газа в весьма широкой области физических параметров, является интегродифференциальное кинетическое уравнение Больцмана. С другой стороны, в предельном случае малых чисел Кнудсена для изучения динамики газов давно и успешно применяются феноменологические уравнения Навье–Стокса–Фурье, представляющие собой гидродинамическую формулировку основных законов сохранения с использованием линейных зависимостей Ньютона (Навье–Стокса) для тензора напряжения и Фурье для теплового потока. В связи с этим значительный интерес представляет связь решений уравнения Больцмана с макроскопическими уравнениями газовой динамики, тем более что наличие в этом случае в кинетическом уравнении малого числа Кнудсена открывает возможность использования аппарата теории возмущений. Первые основополагающие результаты в этой области принадлежат Д. Гильберту, опубликовавшему в 1912 г. свой известный метод приближенного решения уравнения Больцмана и показавшему возможность перехода к макроскопическому описанию поведения газа в терминах плотности, скорости и температуры [1]. Правда, уже в 1915 г. С. Богуславским [2] было показано, что высшие приближения в методе Гильберта содержат растущие пропорционально времени секулярные члены. Перекинуть мост от кинетических представлений к макроскопическим уравнениям Навье–Стокса удалось Чепмену и Энскогу, причем последний развил более изощренную процедуру последовательных приближений для решения уравнения Больцмана [3,4].

Принципиально иной подход к исследованию рассматриваемой проблемы был предложен в 1963 г. в работе [5]. Авторы попытались построить равномерно пригодное при $t \to \infty$ асимптотическое приближение к решению уравнения Больцмана с помощью техники многомасштабных разложений [6,7]. Основной целью исследования было стремление показать, что и при таком подходе полученное решение асимптотически стремится к результатам Энскога. И только уже в более поздних работах было обращено внимание также на принципиальное значение проблем совместимости и регуляризации для используемых в кинетической теории методов [8,9].

В настоящей работе рассматривается вопрос построения регулярного асимптотического разложения на простейшем примере диссипативной релаксации плоской звуковой волны в гидродинамическом режиме. С целью упрощения решения используется линеаризованное уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК). Линейность проблемы позволяет, двигаясь от приближения к приближению, построить с помощью метода многих масштабов самосогласованное и равномерно пригодное асимптотическое разложение вплоть до супербарнеттовского уровня. Как видно из работы [10], представленная здесь техника решения может быть также применена и в случае линеаризованного уравнения Больцмана.

Рассмотрим диссипативную релаксацию первоначально заданной плоской звуковой волны в неограниченном объеме неподвижного газа с постоянными плотностью и температурой. Для описания процесса воспользуемся одномерным линеаризованным уравнением БГК. В безразмерном виде имеем [3,4,10]

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+c_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\left[p+\left(\frac{c^2}{2}-\frac{5}{2}\right)T+c_z v\right]-\varphi, \quad (1)$$

где $\varepsilon = l/L$ — число Кнудсена, l — эффективная длина свободного пробега, L — макроскопический линейный масштаб, $f = f_0\varphi$ — функция распределения возмущения, причем функция распределения невозмущенного состояния представляет собой глобальный максвеллиан

$$f_0=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c^2}{2}\right). \quad (2)$$

Возмущенные макроскопические параметры определяются через фукнцию распределения известными соотношениями

$$n=\int f_0\varphi d\mathbf{c}, \quad v=\int c_z f_0\varphi d\mathbf{c}, \quad u=\int \frac{c^2}{2} f_0\varphi d\mathbf{c},$$

$$u=\frac{3}{2}p, \qquad p=n+T. \quad (3)$$

Как обычно, решение уравнения (1) для гидродинамического случая малых ε ищем в форме степенного разложения

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \dots . \tag{4}$$

Следуя идее метода многомасштабных разложений [6,7], будем считать решение зависящим от последовательности „времен“ $t_k = \varepsilon^k t$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + \varepsilon^m\frac{\partial}{\partial t_m}, \tag{5}$$

где m определяет временну́ю область справедливости разложения. Подстановка (4) в (3) дает

$$n = \sum \varepsilon^k n_k, \quad v = \sum \varepsilon^k v_k, \quad u = \sum \varepsilon^k u_k,$$

$$u_k = \frac{3}{2}\,p_k, \qquad p_k = T_k + n_k, \tag{6}$$

$$n_k = \int f_0\varphi_k d\mathbf{c}, \quad v_k = \int c_z f_0\varphi_k d\mathbf{c},$$

$$u_k = \int \frac{c^2}{2}\, f_0\varphi_k d\mathbf{c}. \tag{7}$$

Подстановка (4) и (5) в (1) приводит к цепочке уравнений для определения неизвестных φ_k

$$\varphi_k = g_k - Q_k, \tag{8}$$

где, согласно (6), имеем

$$g_k = p_k + \left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right) T_k + c_z v_k, \tag{9}$$

а Q_k содержит уже известные из предыдущих приближений выражения. Учитывая (7) и (9), получаем условия

$$\int f_0 Q_k d\mathbf{c} = 0, \quad \int c_z f_0 Q_k d\mathbf{c} = 0, \quad \int \frac{c^2}{2}\, f_0 Q_k d\mathbf{c} = 0, \tag{10}$$

определяющие в каждом приближении систему трех дифференциальных уравнений для искомых макроскопических переменных.

Перейдем к последовательному рассмотрению приближений. На нулевом этапе имеем $Q_0 = 0$ и, следовательно,

$$\varphi_0 = p_0 + \left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right) T_0 + c_z v_0. \tag{11}$$

Для следующего приближения получаем

$$Q_1 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial t_0} + c_z\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}. \tag{12}$$

Вычислив с помощью (11) и (12) интегралы в (10), получаем систему дифференциальных уравнений Эйлера для макроскопических переменных нулевого порядка в масштабе t_0

$$\frac{\partial n_0}{\partial t_0} + \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial t_0} + \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial t_0} + \frac{5}{3}\frac{\partial v_0}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

Исключим далее из первого и третьего уравнений в (13) величину v_0. После интегрирования по времени находим, что макроскопические переменные нулевого порядка связаны адиабатическими соотношениями

$$p_0 = \frac{5}{3}\,n_0, \qquad T_0 = \frac{2}{5}\,p_0. \tag{14}$$

Далее попеременное исключение скорости и давления из второго и третьего уравнений в (13) приводит к однородным волновым уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - a_0^2\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) p_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - a_0^2\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v_0 = 0, \quad a_0^2 = \frac{5}{3}. \tag{15}$$

Выберем простейшие решения (15) в форме плоской волны

$$v_0 = A_0(t_1, \dots, t_m)\exp\big[i(z - a_0 t_0)\big], \quad p_0 = a_0 v_0, \tag{16}$$

которые в силу предположения (5) содержат теперь произвольную функцию $A_0(t_1, \dots, t_m)$ от „медленных“ времен.

Перейдем к второму приближению. Здесь имеем

$$Q_2 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial t_1} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_0} + c_z\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}. \tag{17}$$

Вычислив интегралы в (10), получим неоднородные уравнения Эйлера для переменных первого порядка

$$\frac{\partial n_1}{\partial t_0} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{\partial n_0}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_0} + \frac{\partial p_1}{\partial z} = -\left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{4}{3}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v_0,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t_0} + a_0\frac{\partial v_1}{\partial z} = -\left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) p_0, \tag{18}$$

в правых частях которых содержится неизвестная функция A_0. Чтобы определить эту функцию, необходимо ввести дополнительные условия. Поскольку задача состоит в построении равномерно пригодного при больших временах асимптотического разложения, то необходимо, чтобы каждый член разложений (6) был малой поправкой по отношению к предыдущему члену в интересующем нас интервале времени. Очевидно, что это возможно не при любых зависимостях $A_0(t_1, \dots, t_m)$. Например, легко показать, что при $A_0 = \mathrm{const}$ решения системы (18) будут содержать растущие пропорционально t_0 секулярные члены [2]. Следовательно, необходимо иметь процедуру выявления и устранения источников секулярного роста решения. Именно введение иерархии „времен“ позволяет достичь этой цели и получить условия равномерности разложения. В рассматриваемом случае системы (18) процесс определения функции A_0 выглядит следующим образом. Сначала исключим из первого и третьего уравнений в (18) скорость v_1, после несложных вычислений находим

$$T_1 = \frac{2}{5}\,p_1 - \frac{2}{5}\,\frac{\partial v_0}{\partial z}. \tag{19}$$

Сравнение с (14) показывает, что для переменных первого порядка условия адиабатичности уже не выполняются. Для уменьшения в дальнейшем громоздкости формул введем следующие обозначения:

$$E = \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{4}{3}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad F = \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{2}{3}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$G = \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad H = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - a_0^2\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{20}$$

Исключив теперь попеременно неизвестные v_1 и p_1 из второго и третьего уравнений в (18), после преобразования правых частей получим

$$Hp_1 = -2\frac{\partial}{\partial t_0}Gp_0, \quad Hv_1 = -2\frac{\partial}{\partial t_0}Gv_0. \tag{21}$$

Так как p_0 и v_0 удовлетворяют уравнениям (15), то решения (21) можно представить в виде

$$p_1 = p_1^* - t_0 G p_0, \quad v_1 = v_1^* - t_0 G v_0, \tag{22}$$

где p_1^* и v_1^* — решения соответствующих однородных уравнений.

Видно, что разложения (6) будут иметь смысл (условия $\varepsilon p_1 \ll p_0$, $\varepsilon v_1 \ll v_0$ будут выполняться при $t_0 = O(\varepsilon^{-1})$), если убрать в (22) источники секулярного роста решения, т. е. положить

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) p_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v_0 = 0. \tag{23}$$

Полученные условия (23) определяют зависимость функции A_0 от переменной t_1:

$$A_0(t_1, \ldots, t_m) = A_1(t_2, \ldots, t_m)\exp(-t_1),$$

тогда

$$v_0 = A_1(t_2, \ldots, t_m)\exp\bigl[i(z - a_0 t_0) - \varepsilon t_0\bigr], \quad p_0 = a_0 v_0. \tag{24}$$

Таким образом, использование техники многомасштабных разложений позволяет во втором приближении учесть эффект затухания волны, причем декремент затухания определяется как вязкостью, так и теплопроводностью. Очевидно, что при выполнении условий (23) для переменных первого порядка из (21) следуют такие же однородные волновые уравнения, как и для переменных нулевого порядка. Однако подстановка (23) во второе и третье уравнения (18) приводит к уравнениям типа (13), но только для v_1 и новой неизвестной w_1

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_0} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t_0} + a_0^2\,\frac{\partial v_1}{\partial z} = 0,$$

$$w_1 = p_1 - \frac{1}{3}\,\frac{\partial v_0}{\partial z}. \tag{25}$$

Соотношения (25) упрощают вычисление макроскопических параметров первого порядка. Выберем для последних решение также в форме плоской волны

$$v_1 = B_0(t_1, \ldots, t_m)\exp\bigl[i(z - a_0 t_0)\bigr], \quad w_1 = a_0 v_1. \tag{26}$$

Переходим к третьему приближению. Здесь имеем

$$Q_3 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0} + c_z\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \tag{27}$$

Вычислив интегралы в (10), получим систему макроскопических уравнений для гидродинамических параметров второго порядка

$$\frac{\partial n_2}{\partial t_0} + \frac{\partial v_2}{\partial z} = -\frac{\partial n_1}{\partial t_1} - \frac{\partial n_0}{\partial t_2},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t_0} + \frac{\partial p_2}{\partial z} = -Ev_1 - \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_2} - \frac{4}{5}\,\frac{\partial^3 p_0}{\partial z^3}\right),$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t_0} + a_0^2\,\frac{\partial v_2}{\partial z} = -Fp_1 - \left(\frac{\partial p_0}{\partial t_2} + \frac{4}{9}\,\frac{\partial^3 v_0}{\partial z^3}\right). \tag{28}$$

Так как правые части здесь также содержат неизвестные нам функции, то требуется, как и на предыдущем этапе, провести анализ решений системы (28). Сначала исключаем из первого и последнего уравнений неизвестную v_2, после очевидных преобразований находим

$$T_2 = \frac{2}{5}\,p_2 - \frac{2}{5}\,\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{4}{25}\,\frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2}. \tag{29}$$

Далее исключаем попеременно из второго и третьего уравнений (28) скорость v_2 и давление p_2. Получаем неоднородные волновые уравнения

$$Hp_2 = -2\,\frac{\partial}{\partial t_0}\left[Gp_1 + \left(\frac{\partial p_0}{\partial t_2} - \frac{7}{18}\,\frac{\partial^3 v_0}{\partial z^3}\right)\right],$$

$$Hv_2 = -2\,\frac{\partial}{\partial t_0}\left[Gv_1 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_2} - \frac{7}{30}\,\frac{\partial^3 p_0}{\partial z^3}\right)\right]. \tag{30}$$

Так как p_1, v_1 также удовлетворяют уравнениям вида (15), то решения (30) можно представить в виде

$$p_2 = p_2^* - t_0\left[Gp_1 + \left(\frac{\partial p_0}{\partial t_2} - \frac{7}{18}\,\frac{\partial^3 v_0}{\partial z^3}\right)\right],$$

$$v_2 = v_2^* - t_0\left[Gv_1 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_2} - \frac{7}{30}\,\frac{\partial^3 p_0}{\partial z^3}\right)\right], \tag{31}$$

где p_2^* и v_2^* — решения соответствующих однородных волновых уравнений. Таким образом, условия $\varepsilon p_2 \ll p_1$ и $\varepsilon v_2 \ll v_1$ будут выполняться при $t_0 = O(\varepsilon^{-1})$, если будут устранены источники секулярного роста решений, т. е.

$$Gp_1 + \left(\frac{\partial p_0}{\partial t_2} - \frac{7}{18}\,\frac{\partial^3 v_0}{\partial z^3}\right) = 0,$$

$$Gv_1 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_2} - \frac{7}{30}\,\frac{\partial^3 p_0}{\partial z^3}\right) = 0. \tag{32}$$

Если теперь рассматривать условия (32) как неоднородные уравнения для p_1 и v_1, то их решения с учетом (23) можно записать в форме

$$p_1 = p_1^{**} - t_1\left(\frac{\partial p_0}{\partial t_2} - \frac{7}{18}\frac{\partial^3 v_0}{\partial z^3}\right),$$

$$v_1 = v_1^{**} - t_1\left(\frac{\partial v_0}{\partial t_2} - \frac{7}{30}\frac{\partial^3 p_0}{\partial z^3}\right), \qquad (33)$$

где p_1^{**} и v_1^{**} — решения соответствующих однородных уравнений. Следовательно, разложения (6) будут иметь смысл также и при $t_0 = O(\varepsilon^{-2})$, если выполняются условия

$$\frac{\partial p_0}{\partial t_2} - \frac{7}{18}\frac{\partial^3 v_0}{\partial z^3} = 0,$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t_2} - \frac{7}{30}\frac{\partial^3 p_0}{\partial z^3} = 0. \qquad (34)$$

Очевидно, что соотношения (34) позволяют провести дальнейшее уточнение решения (24). Определив зависимость функции A_1 от переменной t_2, находим

$$v_0 = A_2(t_3, \ldots, t_m)\exp\big[i(z - at_0) - \varepsilon t_0\big],$$

$$a = \left(1 + \frac{7}{30}\varepsilon^2\right)a_0. \qquad (35)$$

Таким образом, третье приближение дает поправку к скорости звука для волны нулевого порядка. С другой стороны, следующие из (32) с учетом (34) условия

$$Gp_1 = 0, \qquad Gv_1 = 0 \qquad (36)$$

дают возможность уточнить решение (26) для макроскопических переменных первого порядка. Находим

$$v_1 = B_1(t_2, \ldots, t_m)\exp\big[i(z - a_0t_0) - \varepsilon t_0\big], \quad w_1 = a_0 v_1. \qquad (37)$$

Преобразовав во втором и третьем уравнениях в (28) правые части с помощью условий (34) и (36), получим и в третьем приближении уравнения типа (13), но уже для v_2 и новой неизвестной w_2

$$\frac{\partial v_2}{\partial t_0} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t_0} + a_0^2\frac{\partial v_2}{\partial z} = 0,$$

$$w_2 = p_2 - \frac{1}{3}\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{17}{30}\frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2}. \qquad (38)$$

Таким образом, для параметров второго приближения в масштабе времени t_0 также можно выбрать решение в форме плоской волны

$$v_2 = C_0(t_1, \ldots, t_m)\exp\big[i(z - a_0t_0)\big], \quad w_2 = a_0 v_2. \qquad (39)$$

Перейдем к четвертому приближению. Здесь имеем

$$Q_4 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_3} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_0} + c_z\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}. \qquad (40)$$

Вычислив интегралы в (10), получим систему макроскопических уравнений для гидродинамических переменных третьего порядка

$$\frac{\partial n_3}{\partial t_0} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{\partial n_2}{\partial t_1} - \frac{\partial n_1}{\partial t_2} - \frac{\partial n_0}{\partial t_3},$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t_0} + \frac{\partial p_3}{\partial z} = -Ev_2 - \left(\frac{\partial v_1}{\partial t_2} - \frac{4}{5}\frac{\partial^3 p_1}{\partial z^3}\right) - \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_3} - \frac{104}{45}\frac{\partial^4 v_0}{\partial z^4}\right),$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial t_0} + a_0^2\frac{\partial v_3}{\partial z} = -Fp_2 - \left(\frac{\partial p_1}{\partial t_2} + \frac{4}{9}\frac{\partial^3 v_1}{\partial z^3}\right) - \left(\frac{\partial p_0}{\partial t_3} - \frac{4}{9}\frac{\partial^4 p_0}{\partial z^4}\right). \qquad (41)$$

Поскольку ход процедуры уже очевиден, ограничимся далее приведением только ключевых результатов. Как и ранее, попеременное исключение из второго и третьего уравнений в (41) p_3 и v_3 приводит к неоднородным волновым уравнениям для их определения. Требование ограниченности решений при $t_0 = O(\varepsilon^{-1})$ дает условия

$$Gp_2 + \left(\frac{\partial p_1}{\partial t_2} - \frac{7}{18}\frac{\partial^3 v_1}{\partial z^3}\right) + \left(\frac{\partial p_0}{\partial t_3} - \frac{131}{90}\frac{\partial^4 p_0}{\partial z^4}\right) = 0,$$

$$Gv_2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t_2} - \frac{7}{30}\frac{\partial^3 p_1}{\partial z^3}\right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_3} - \frac{117}{90}\frac{\partial^4 v_0}{\partial z^4}\right) = 0. \qquad (42)$$

Рассматривая соотношения (42) как уравнения для неизвестных p_2 и v_2, получим, в свою очередь, условия ограниченности их решений при $t_0 = O(\varepsilon^{-2})$:

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial t_2} - \frac{7}{18}\frac{\partial^3 v_1}{\partial z^3}\right) + \left(\frac{\partial p_0}{\partial t_3} - \frac{131}{90}\frac{\partial^4 p_0}{\partial z^4}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial t_2} - \frac{7}{30}\frac{\partial^3 p_1}{\partial z^3}\right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_3} - \frac{117}{90}\frac{\partial^4 v_0}{\partial z^4}\right) = 0. \qquad (43)$$

Попеременное исключение неизвестных p_1 и v_1 позволяет преобразовать систему (43) в неоднородные уравнения для определения этих величин. Условия ограниченности их решений при $t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ имеют вид

$$\frac{\partial p_0}{\partial t_3} - \frac{62}{45}\frac{\partial^4 p_0}{\partial z^4} = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial t_3} - \frac{62}{45}\frac{\partial^4 v_0}{\partial z^4} = 0. \qquad (44)$$

Соотношение (44) позволяет провести дальнейшее уточнение решения для p_0 и v_0. Окончательно получаем

$$v_0 = A_3(t_4, \ldots, t_m)\exp\big[i(z - at_0) - \Delta t_0\big],$$

$$\Delta = \left(1 - \frac{62}{45}\varepsilon^2\right)\varepsilon. \qquad (45)$$

Как правило, основной целью построения асимптотического разложения является получение равномерно пригодного нулевого приближения. Однако полученные выше соотношения позволяют продолжить и определение величин следующих порядков. Из (43) с учетом (44) находим

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_2} - \frac{7}{30}\frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t_2} - \frac{7}{18}\frac{\partial^3 v_1}{\partial z^3} = 0. \tag{46}$$

Тогда, определив с помощью (46) зависимость функции B_1 в (37) от переменной t_2, получим

$$v_1 = B_2(t_3, \ldots, t_m) \exp\bigl[i(z - at_0) - \varepsilon t_0\bigr]. \tag{47}$$

Далее из соотношений (42) следует

$$Gp_2 = 0, \quad Gw_2 = 0, \quad Gv_2 = 0, \tag{48}$$

что позволяет определить зависимость величины C_0 в (39) от времени t_1 и получить

$$v_2 = C_1(t_2, \ldots, t_m) \exp\bigl[i(z - a_0 t_0) - \varepsilon t_0\bigr]. \tag{49}$$

Преобразуя далее с помощью полученных соотношений правые части во втором и третьем уравнениях в (41), приходим для v_3 и новой функции w_3 снова к уравнениям типа (13).

Таким образом, вплоть до супербарнеттовского приближения не возникает, если не считать возрастающей сложности вычислений, принципиальных трудностей при построении равномерно пригодного при больших временах самосогласованного разложения для линеаризованного БГК-уравнения. Можно, конечно, рассматривать линеаризованное уравнение как самостоятельную математическую модель кинетических процессов и продолжать процесс решения дальше. Однако не следует забывать, что использование линеаризованного уравнения означает на самом деле, что мы ограничиваемся исследованием только линейного приближения при разложении полного кинетического уравнения по некоторому малому параметру возмущения γ [11]. В зависимости от соотношения между параметрами ε и γ рано или поздно возникнет проблема перекрестных членов [9], что изменит характер разложения. Заметим далее, что, поскольку декремент затухания оказывается одинаковым для всех рассмотренных здесь приближений, разложения (6) имеют смысл лишь при малых ε. Следовательно, построенное здесь асимптотическое приближение справедливо лишь для области малых чисел Кнудсена, причем первое и второе приближения определяют в рамках рассматриваемой модели газодинамические значения скорости и декремента затухания звуковой волны. Следующие барнеттовское и супербарнеттовское приближения дают для них кнудсеновские поправки. Многочисленные эксперименты демонстрируют немонотонную зависимость декремента затухания волны от числа Кнудсена в области $0 < \varepsilon < 10$ [12]. Из формулы (45) также следует немонотонное изменение Δ, но в более узкой области $0 < \varepsilon < 1$. Таким образом, полученная здесь гидродинамическая асимптотика содержит информацию о свойствах звуковой волны при далеко выходящих за область справедливости решениях числа Кнудсена.

Список литературы

[1] *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner, Leipzig. 1912. S. 267–282.
[2] *Boguslawski S.* // Math. Ann. (Leipzig). 1915. B. 76. S. 431–437.
[3] *Коган Н.М.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
[4] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
[5] *Мак-Кьюн Дж., Морзе Т., Сэндри Г.* // Некоторые вопросы кинетической теории газов. М.: Мир, 1965. С. 226–245.
[6] *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
[7] *Kevorkian J., Cole J.D.* Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. N.Y.: Springer-Verlag, 1996. 632 p.
[8] *Klimas A., Ramnath R.V., Sandri G., Math J.* // Anal. Appl. 1970. Vol. 32. P. 482–504.
[9] *Morse T.* // The Phys. Fluids. 1964. Vol. 7. N 10. P. 1691–1695.
[10] *Чекмарев И.Б., Чекмарева О.М.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 159–165.
[11] *Чекмарев И.Б.* // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. С. 170–178.
[12] *Галкин В.С., Носик В.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 126–133.