

01;05

Пиннинг линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде и возможные расстояния между ними

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 16 декабря 2005 г.)

Предложен метод расчета конфигурации двух взаимодействующих линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде, а также минимально возможного расстояния между ними при данном значении параметра пиннинга. Оси рассматриваемых вихрей располагаются в среднем ряду бесконечной полосы шириной 9 или 13 ячеек при различных условиях на границах полосы.

Система уравнений в конечных разностях вдали от центров вихрей становится линейной. При решении системы граничными являются условия квантования флюксоида в близких к центрам вихрей ячейках. Используется также идея приближения к точному решению путем последовательных итераций по значениям тех скачков фазы, которые не могут считаться малыми. Точность расчетов по этой методике значительно выше, а ее применимость намного шире, чем у предыдущих.

Рассчитаны критические значения параметра пиннинга I_d , при которых исходные два вихря еще могут удерживаться на заданном расстоянии d друг от друга. Рассчитаны максимальные силы пиннинга для различных конфигураций и исследована их зависимость от параметра пиннинга, а также от расстояния до ближайших вихрей. Показано, что близость параллельных вихрей уменьшает силу пиннинга, а антипараллельных — увеличивает.

PACS: 03.75.Lm

Введение

Одной из важнейших проблем в физике высокотемпературных сверхпроводников является анализ структуры, движения и пиннинга вихрей, возникающих в образце при внесении его во внешнее магнитное поле.

В работах [1,2] предложена модель трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды и получена система уравнений квантования флюксоида в ячейках, на основе которой проведен анализ структуры возможных экранирующих, ламинарных и вихревых токовых состояний. В статье [3] исследованы различные конфигурации линейного вихря в такой среде, в [4] рассчитаны минимальные возможные расстояния между двумя линейными вихрями при различных значениях параметра пиннинга I . При этом система уравнений для двух взаимодействующих вихрей решается внутри ограниченной области размером в несколько ячеек в предположении равенства нулю токов за границей этой области. В [4] указано, что такой подход соответствует существованию еще одной, симметричной конфигурации, находящейся на некотором расстоянии от рассматриваемой. Это утверждение весьма приблизительно, поскольку похожие дополнительные конфигурации должны существовать со всех сторон от границ области, причем ситуация зависит от формы области, расстояния между рассматриваемыми вихрями и т.д. В [4] все эти неточности снимаются предположением о том, что влиянием „удаленной“ конфигурации можно пренебречь в сравнении с взаимодействием двух рассматриваемых вихрей. Однако поскольку сила взаимодействия вихрей убывает примерно пропорционально расстоянию между

ними [4], то это пренебрежение является довольно грубым допущением даже при малых расстояниях между вихрями. Например, при расположении центров вихрей в соседних ячейках и расстоянии 7 ячеек до центра дополнительной конфигурации, соотношение сил равно примерно 1:7. Для рассмотренных в [4] случаев вихрей с центрами через одну или две ячейки это соотношение увеличивается до 2:7 и 3:7, что говорит о том, что полученные результаты справедливы лишь на качественном уровне, а полученные критические значения параметра пиннинга являются очень приближенными.

В настоящей работе на базе предложенного в [3] метода расчета токовых конфигураций в среде такого вида вычисляются точные критические значения параметра пиннинга для сколь угодно больших расстояний между вихрями. Анализ полученных результатов позволяет сделать ряд интересных выводов относительно пиннинга линейных вихрей в трехмерной джозефсоновской среде такого типа.

Методика расчета и основные уравнения

Рассмотрение будем, как и в [4], проводить на модели, представляющей собой кубическую решетку с периодом h , состоящую из сверхпроводящих проводов диаметром δ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же величиной критического тока J_C . Токовые распределения имеют плоскую структуру, т.е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вихря и расположенных

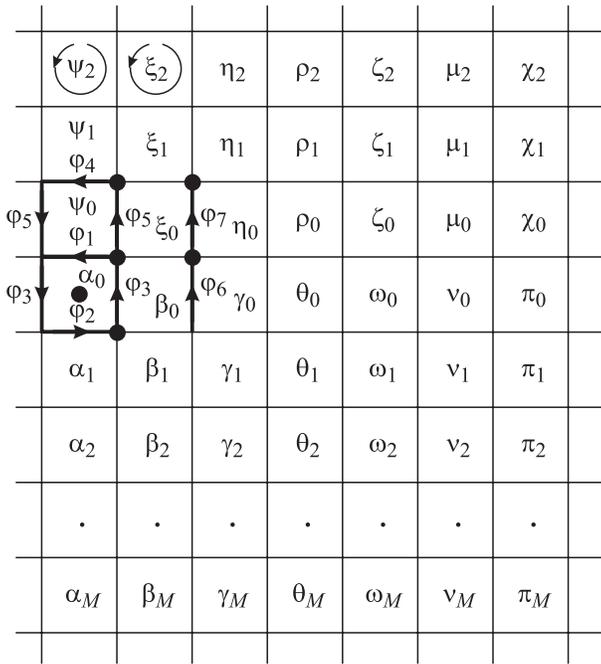


Рис. 1. Распределение скачков фазы для двух вихрей в бесконечной полосе шириной 13 ячеек в плоскости, перпендикулярной осям вихрей. В центре каждой ячейки указан ее „контурный“ скачок фазы. Все контурные токи направлены против часовой стрелки. Картина симметрично продолжается влево и вниз.

на расстоянии h друг от друга, токи распределены идентично.

Рассмотрим два параллельных линейных вихря, оси которых проходят посередине бесконечной в двух направлениях плоской пластины толщиной $(2N - 1)$ ячеек и находятся на расстоянии d ячеек друг от друга. Сечение этой картины плоскостью, перпендикулярной осям вихрей, будет представлять собой бесконечную полосу шириной $(2N - 1)$ ячеек, в среднем ряду которой находятся центры двух рассматриваемых вихрей.

На рис. 1 изображен один квадрант такой конфигурации для полосы шириной 13 ячеек ($N = 7$). Точкой обозначена центральная ячейка одного из двух вихрей. Центр второго вихря расположен внизу (вне рис. 1) симметрично или центральной линии нижнего ряда ячеек, или нижней токовой линии. В первом случае расстояние d между центрами вихрей равно четному числу ячеек ($2M$), во втором — нечетному ($2M + 1$). Это означает, что между центральными ячейками вихрей находится соответственно $(2M - 1)$ и $2M$ ячеек.

В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида [1]:

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \sum_k \varphi_k^{(m)} = 2\pi K_m, \quad (1)$$

где $\sum_k \varphi_k^{(m)}$ — сумма скачков фазы на джозефсоновских контактах m -й ячейки; Φ_m — полный магнитный поток

через m -ю ячейку; Φ_0 — квант магнитного потока; K_m — целое число, равное единице для центральной ячейки вихря и нулю для всех остальных. Величины джозефсоновских токов $J_k = J_c \sin \varphi_k$ по мере удаления от центров вихрей убывают, причем скорость убывания возрастает с ростом величины критического тока J_c . В результате расчета мы увидим, что можно считать малыми ($\sin \varphi_k \approx \varphi_k$) скачки фаз на всех контактах, кроме самых больших по величине скачков фазы $\varphi_1 - \varphi_7$. Участки, на которых скачки фаз не считаются малыми, на рис. 1 выделены жирными линиями.

Чтобы избежать выписывания условий баланса токов в узлах, удобно воспользоваться методом „контурных токов“ ячеек. Пусть в каждой ячейке протекает контурный ток против часовой стрелки, равный произведению J_c на соответствующий „контурный“ скачок фазы. На рис. 1 указаны обозначения „контурных“ скачков фазы в каждой ячейке. Тогда значения скачков фазы φ_k на контактах (кроме $\varphi_1 - \varphi_7$) определяются как разности соответствующих „контурных“ значений.

Магнитный поток через m -ю ячейку можно записать в виде [1]:

$$\Phi_m = \mu_0 S / h \left(J_\Sigma^{(m)} + b \sum_k J_k^{(m)} \right), \quad (2)$$

где b — коэффициент неоднородности поля из-за дискретности токового распределения вдоль оси вихря; S — площадь ячейки; $J_\Sigma^{(m)}$ — сумма токов, пересекаемых при прохождении из m -й ячейки в бесконечность; $\sum_k J_k^{(m)}$ — алгебраическая сумма токов в контактах m -й ячейки. При толщине провода $\delta \ll h$ параметр b определяется выражением

$$b = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(2 \operatorname{sh} \frac{\pi \delta}{h} \right).$$

Далее мы будем рассматривать малые значения I , т. е. $Ib \ll 1$, где I — параметр пиннинга, определяемый ниже. Тогда после подстановки (2) в (1) появляется возможность пренебречь вторым членом в (2). Отметим, что такое рассмотрение справедливо также для структуры, созданной из сверхпроводящих нитей, склеенных друг с другом по всей длине, так что длинными джозефсоновскими контактами являются поверхности соединения нитей. Поперечное сечение структуры должно представлять собой квадратную решетку, при этом форма ячейки не обязательно будет квадратной, в частности, она может быть образована нитями круглого сечения.

Что касается величины $J_\Sigma^{(m)}$, то для ячеек, из которых можно пройти в бесконечность, пересекая только контакты с малыми значениями φ_k (т. е. не пересекая толстые линии), она равняется соответствующему контурному току данной ячейки. И только для двух ячеек, ограниченных толстыми линиями со всех сторон, $J_\Sigma^{(m)}$ соответственно равны $J_c(\sin \varphi_3 + \beta_0)$ и $J_c(\sin \varphi_4 + \psi_1)$.

Использование контурных токов обеспечивает выполнение условий баланса токов во всех узлах, в которые

не входит ни одна толстая линия. Для узлов же, отмеченных на рис. 1 темными кружками, условия баланса токов придется записывать отдельно.

Подставив (2) в (1) и наложив дополнительное условие $\varphi_4 = \psi_0 - \psi_1$, для всех ячеек с индексами контурных токов больше или равными 1 (выше центрального ряда вихря) получим следующую систему уравнений (для $k \geq 1$);

$$\begin{aligned} (4+I)\psi_k - \psi_{k+1} - \psi_{k-1} - 2\xi_k &= 0 \\ (4+I)\xi_k - \xi_{k+1} - \xi_{k-1} - \psi_k - \eta_k &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ (4+I)\chi_k - \chi_{k+1} - \chi_{k-1} - \mu_k &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где параметр пиннинга I определяется выражением

$$I \equiv 2\pi\mu_0 J_c h / \Phi_0. \quad (4)$$

Решение системы линейных разностных уравнений (3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_k &= a\lambda^k; \quad \xi_k = B\lambda^k; \quad \eta_k = C\lambda^k; \quad \rho_k = D\lambda^k; \\ \xi_k &= E\lambda^k; \quad \mu_k = F\lambda^k; \quad \chi_k = G\lambda^k. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (5) в систему (3), преобразуем ее к виду

$$\begin{pmatrix} a & -2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & a & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & a & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ \cdot \\ F \\ G \end{pmatrix} = (0), \quad (6)$$

где введено обозначение

$$a = (4+I)\lambda - \lambda^2 - 1. \quad (7)$$

Разложив определитель n -го порядка вида (6) по первой строке, получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\Delta_n = a f_n - 2\lambda^2 f_{n-1}, \quad (8)$$

$$f_n = a f_{n-1} - \lambda^2 f_{n-2}, \quad (9)$$

где f_n — определитель n -го порядка вида

$$f_n = \begin{vmatrix} a & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & a & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & a \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Используя формулы (8)–(10), найдем определитель матрицы (6):

$$\Delta_7 = \lambda^7 k (k^6 - 7k^4 + 14k^2 - 7), \quad (11)$$

где $k = a/\lambda$. Приравняв (11) к нулю, получим условия существования ненулевого решения системы (3):

$$\begin{aligned} k_1 &= 0; \quad k_{2,3} = \pm 0.867767; \quad k_{4,5} = \pm 1.56366; \\ k_{6,7} &= \pm 1.94985. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставив (12) в (7), найдем собственные числа λ_i (i от 1 до 7):

$$\lambda_i = \left(4 + I - k_i - \sqrt{(4 + I - k_i)^2 - 4} \right) / 2. \quad (13)$$

Мы отбросили варианты с плюсами перед корнем в (13), так как выражения (5) в рассматриваемой геометрии не должны неограниченно возрастать с ростом k , т.е. все $|\lambda_i|$ должны быть меньше единицы.

Решив систему (6), выразим коэффициенты B, C, \dots, G в (5) через A :

$$\begin{aligned} 2B &= kA; \quad 2C = (k^2 - 2)A; \quad 2D = k(k^2 - 3)A; \\ 2E &= (k^4 - 4k^2 + 2)A; \quad 2F = k(k^4 - 5k^2 + 5)A; \\ 2G &= (k^6 - 6k^4 + 9k^2 - 2)A. \end{aligned} \quad (14)$$

Общее решение системы (3) имеет вид (при $m \geq 0$)

$$\begin{aligned} \psi_m &= \sum_{i=1}^7 A_i \lambda_i^m; \quad \xi_m = 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i k_i \lambda_i^m; \\ \eta_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i (k_i^2 - 2) \lambda_i^m; \quad \rho_m = 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i k_i (k_i^2 - 3) \lambda_i^m; \\ \xi_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i (k_i^4 - 4k_i^2 + 2) \lambda_i^m; \\ \mu_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i k_i (k_i^4 - 5k_i^2 + 5) \lambda_i^m; \\ \chi_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i (k_i^6 - 6k_i^4 + 9k_i^2 - 2) \lambda_i^m. \end{aligned} \quad (15)$$

Записав условия квантования флюксоида (1) для всех ячеек с индексами контурных токов больше или равными единице (ниже центрального ряда вихря) и наложив дополнительное условие $\varphi_2 = \alpha_0 - \alpha_1$, получим систему уравнений, идентичную (3), для величин $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \theta_k, \omega_k, \nu_k, \pi_k$ (для $k \geq 1$). Для этих величин справедливы все формулы (4)–(14). Единственное изменение связано с тем, что нет оснований в (13) отбросить решения с плюсом перед квадратным корнем. Вместо этого появляются условия симметричности конфигурации относительно горизонтальной оси симметрии. Если расстояние d между центрами вихрей равно четному числу ячеек ($d = 2M$), т.е. между центральными ячейками вихрей расположены $(2M - 1)$ ячеек, то эти условия имеют вид $\alpha_{M-1} = \alpha_{M+1}, \beta_{M-1} = \beta_{M+1}, \dots, \pi_{M-1} = \pi_{M+1}$. Если же $d = 2M + 1$, то условия выглядят иначе: $\alpha_M = \alpha_{M+1}, \beta_M = \beta_{M+1}, \dots, \pi_M = \pi_{M+1}$. Однако результат для обоих этих случаев один и тот же: величины $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \theta_m, \omega_m, \nu_m, \pi_m$ описываются выражениями, аналогичными (15) с i от 8 до 14, но множители λ_i^m заменяются на $(\lambda_i^m + \lambda_i^{d-m})$, причем набор k_i для i от 8 до 14 тот же, что для i от 1 до 7.

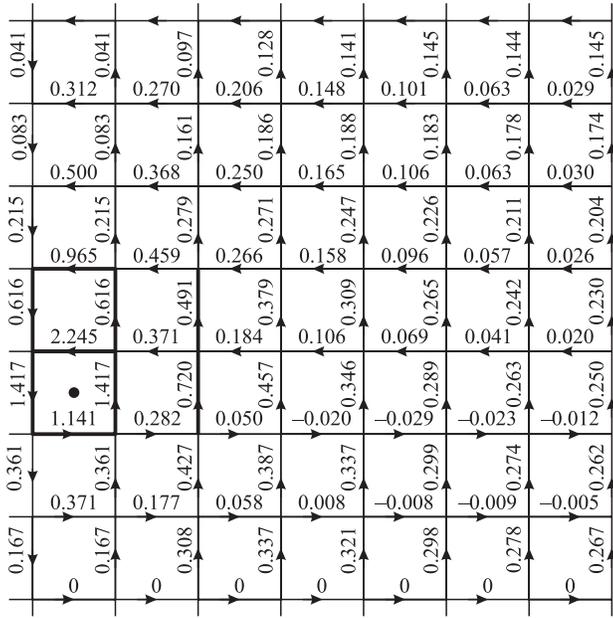


Рис. 2. Рассчитанное распределение скачков фазы по контактам для полосы шириной 13 ячеек и расстояния между центрами вихрей $d = 5$ при критическом значении $I = 0.01961$. Картина симметрично продолжается влево и вниз.

Для нахождения A_i ($i = 1, 2, \dots, 14$), а также скачков фазы $\varphi_1 - \varphi_7$, запишем: 14 условий (1) для ячеек двух рядов на рис. 2 с индексами контурных токов, равными нулю; упомянутые выше два добавочных условия $\varphi_4 = \psi_0 - \psi_1$ и $\varphi_2 = \alpha_0 - \alpha_1$; а также следующие 5 условий баланса токов в узлах, отмеченных темными кружками на рис. 2:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_5 + \xi_0 &= \sin \varphi_4 + \psi_1, \\ \sin \varphi_7 + \eta_0 &= \xi_0, \\ \sin \varphi_6 + \gamma_0 &= \beta_0, \\ \sin \varphi_3 + \beta_0 - \xi_0 &= \sin \varphi_1 + \sin \varphi_5, \\ \sin \varphi_3 + \beta_0 &= \sin \varphi_2 + \alpha_1. \end{aligned} \quad (16)$$

В результате получим 21 уравнение для 21 неизвестной. Как и в [4], воспользуемся методом последовательных приближений по величинам $\varphi_3 - \varphi_7$. Для этого представим эти величины и их синусы в виде $\varphi_3 = \varphi_3^0 + \delta_3$, $\sin \varphi_3 = \sin \varphi_3^0 + \cos \varphi_3^0 \cdot \delta_3$ и т.д., где $\varphi_3^0 - \varphi_7^0$ считаем известными (на первой итерации равными нулю), а $\delta_3 - \delta_7$ являются новыми неизвестными (вместо $\varphi_3 - \varphi_7$), относительно которых система линейна.

Тогда 19 из 21 уравнения будут линейными. Вычислив обратную матрицу: выразим 19 неизвестных $A_1 - A_{14}$, $\delta_3 - \delta_7$ через φ_1 и φ_2 . Подставив полученные выражения в оставшиеся два уравнения, получим систему из двух нелинейных уравнений относительно двух неиз-

вестных φ_1 и φ_2

$$\varphi_2 = [b_3 - \sin \varphi_1 - b_2 \varphi_1] / b_1, \quad (17)$$

$$\varphi_1 = [b_6 - \sin \varphi_2 - b_5 \varphi_2] / b_4, \quad (18)$$

где коэффициенты $b_1 - b_6$ являются функциями I , а также величин $\varphi_3^0 - \varphi_7^0$.

При величинах параметра пиннинга I , меньших некоторого критического значения I_d (индекс соответствует расстоянию между центрами вихрей), кривые (17) и (18) не имеют пересечений, это означает, что при таких значениях I вихри не могут удерживаться на столь малых расстояниях. При $I > I_d$ эти кривые имеют две точки пересечения, соответствующие разным возможным конфигурациям вихрей (оба „а“ или „б“ [3]). При уменьшении I эти точки сходятся, и при $I = I_d$ совпадают. Значения φ_1 и φ_2 точек пересечения находятся численным методом, затем находим и все остальные неизвестные. Для следующей итерации возьмем новые значения $\varphi_3^0 - \varphi_7^0$, добавив к их предыдущим значениям полученные величины $\delta_3 - \delta_7$, и снова решим систему. Итерационная процедура сходится, т.е. каждая следующая итерация дает на порядки меньшие значения $\delta_3 - \delta_7$. Таким способом исходную систему можно решить с любой степенью точности всего за несколько шагов.

Отметим, что для вихрей с центрами в соседних ячейках вышеприведенные уравнения неверны, так как $\varphi_2 = 0$. В этом случае можно воспользоваться уравнениями, полученными в [3] для уединенного вихря типа „б“, если в нижнем контакте центральной ячейки вихря заменить π на нуль.

Результаты расчетов, их интерпретация и анализ

Во втором столбце табл. 1 приведены результаты расчета критических значений параметра I для различных значений расстояния d между центрами вихрей для рассмотренной полосы шириной 13 ячеек ($N = 7$). Количество ячеек между центральными ячейками вихрей равно $(d - 1)$. Смысл величины L будет пояснен далее.

Как и следовало ожидать, по причинам, указанным во введении, эти результаты отличаются от значений, полученных в [4]: $I_1 = 0.91$, $I_2 = 0.44$, $I_3 = 0.25$. Еще раз отметим, что данная методика позволяет исследовать ситуации для любых значений расстояния d , а не только для малых, как в [4].

Для проверки справедливости исходных допущений рассмотрим получившуюся структуру типичной картины. Из рис. 2 видно, что предположение о малости всех φ_k , кроме $\varphi_1 - \varphi_7$, справедливо.

При $d > 5$ критическое состояние отсутствует, т.е. кривые (17) и (18) имеют две точки пересечения при любых, сколь угодно малых, значениях I . Этот результат подтверждает вывод работы [4] о том, что при стремлении I к нулю минимально возможное расстояние между линейными вихрями не возрастает неограниченно, как в

Таблица 1. Результаты расчета для чередующихся конфигураций

Расстояние d	$L = 14 (N = 7)$		$L = 10 (N = 5)$		$L = 13 (N = 7)$		$L = 9 (N = 5)$	
	I_d	$f(I_d)$	I_d	$f(I_d)$	I_d	$f(I_d)$	I_d	$f(I_d)$
1	0.934	0.616	0.934	0.616	0.934	0.616	0.934	0.616
2	0.339	0.268	0.336	0.268	0.339	0.268	0.333	0.269
3	0.140	0.183	0.130	0.186	0.139	0.184	0.122	0.188
4	0.0587	0.151	0.0394	0.157	0.0564	0.152	0.0256	0.161
5	0.0196	0.136	—	—	0.0160	0.137	—	—

случае плоских вихрей, а достигает некоторой конечной величины d_0 и далее остается постоянным. Правда, в [4] предсказывается большее значение этой постоянной: $d_0 = 7-8$.

Аналогичные расчеты были проведены для полосы шириной 9 ячеек ($N = 5$). Их результаты приведены в четвертом столбце табл. 1. Сравнение результатов для $N = 7$ и $N = 5$ показывает, что критические значения параметра пиннинга, при которых вихри еще могут удерживаться на определенном расстоянии друг от друга, увеличиваются с ростом ширины полосы. То же можно сказать и о величине d_0 : при $N = 5$ $d_0 = 4$, а при $N = 7$ $d_0 = 5$. Поэтому с дальнейшим увеличением ширины полосы можно ожидать увеличения d_0 . Далее этот вопрос будет обсужден более подробно.

Зависимость результатов от ширины рассматриваемой полосы говорит о том, что нельзя пренебрегать влиянием границы и считать вихри уединенными. Учет влияния границ может быть проведен на базе следующих соображений [3].

Легко видеть, что рассмотренная выше конфигурация эквивалентна периодической последовательности пар вихрей попеременно чередующейся ориентации. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим такую последовательность, в которой расстояние между центральными линиями соседних пар равняется $2N$ ячеек, т.е. между их центральными ячейками размещается $(2N - 1)$ ячеек. Для примера на рис. 3, *a* изображена такая конфигурация с $N = 3$ и $d = 2$. Центральные ячейки вихрей будем обозначать точками или крестиками в зависимости от их ориентации. Из симметрии картины ясно, что в ряду ячеек, расположенном посередине между центральными линиями соседних пар (на рис. 3, *a* он пересекается линией AA) все горизонтальные токи равны нулю. Поэтому структура картины между двумя такими соседними „осевыми“ вертикальными рядами (между линией AA и симметричной ей слева от вихрей) идентична рассмотренному нами случаю одной пары вихрей, расположенной в центральном ряду слоя шириной $(2N - 1)$ ячеек. Таким образом, влияние границ полосы может быть учтено и оценено как воздействие на рассматриваемые два вихря всей системы периодически расположенных дополнительных вихрей. Ситуация напоминает метод зеркального отражения в электростатике.

Найдем максимальную силу пиннинга вихря. Она равна силе, действующей на вихрь при критическом

значении параметра пиннинга I_d . Для расчета воспользуемся приближением непрерывной среды. В [3] было показано, что каждый вихрь имеет центральную часть (остов) размером в несколько ячеек, где существенна дискретность среды, а в наружных областях зависимость φ от координат можно считать квазинепрерывной. Поскольку взаимодействие вихрей определяется их наружными областями, то при анализе условий равновесия можно использовать выражения для сил взаимодействия вихрей в непрерывной среде.

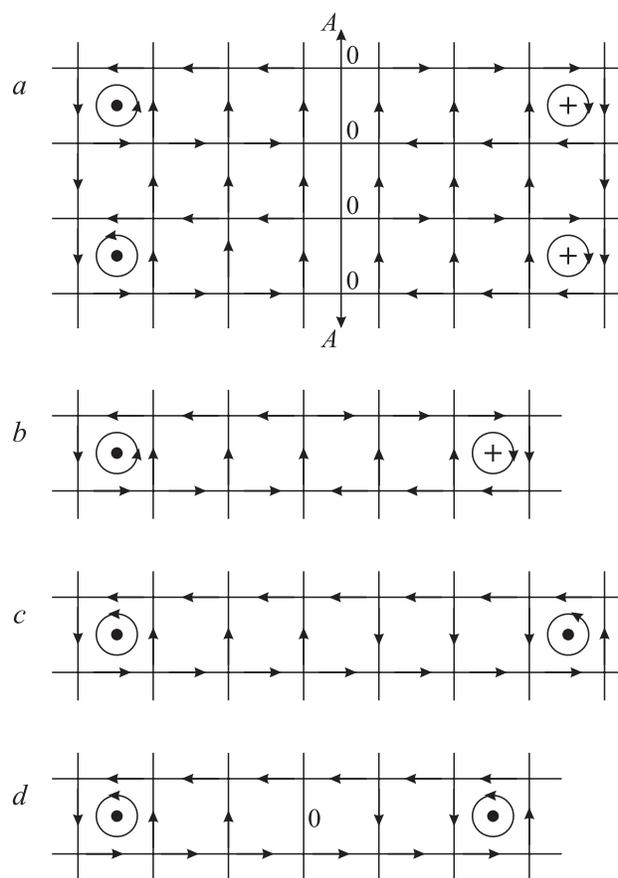


Рис. 3. Бесконечные периодические последовательности вихрей параллельной или попеременно чередующейся ориентации, эквивалентные единичному вихрю в плоской пластине толщиной в 13 ячеек и соответствующие различным граничным условиям. Точками и крестиками обозначены центральные ячейки вихрей.

В [2] был рассмотрен вопрос о переходе от дискретного случая к непрерывному при малых значениях параметра пиннинга I . Там показано, что вихрь в непрерывной среде описывается теми же уравнениями, что и обычный абрикосовский [5], но роль лондоновской глубины проникновения играет величина $\lambda = a/\sqrt{I}$. Тогда энергия взаимодействия двух таких вихрей в расчете на один вихрь равна

$$U_{\text{int}} = \pm E_0 \pi I K_0(r/\lambda), \quad (19)$$

где плюс соответствует отталкиванию, а минус — притяжению; K_0 — функция Бесселя (Ганкеля) нулевого порядка от мнимого аргумента, r — расстояние между центрами вихрей, $\lambda = a/\sqrt{I}$ — характерный размер вихря, $E_0 \equiv \Phi_0^2/4\pi^2\mu_0 a^2$. Воспользовавшись тем, что $dK_0/dx = -K_1(x)$, найдем силу, действующую на вихрь со стороны другого вихря,

$$F_{\text{int}} = -\partial U_{\text{int}}/\partial r = \pm E_0 \pi I^{3/2} K_1(r/\lambda). \quad (20)$$

Рассмотрим один из вихрей исходной пары. Он взаимодействует со всеми вихрями в обеих бесконечных цепочках. Но вихри из собственной цепочки могут лишь деформировать его, но не стремятся сдвинуть. Поэтому при рассмотрении условий его равновесия нужно учесть только силы, действующие со стороны вихрей другой цепочки. Учитывая соответствующие косинусы, получим для полной величины этой силы

$$F = \frac{E_0 \pi I}{a} \sqrt{I} \left[K_1(d\sqrt{I}) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_1 \left(\sqrt{d^2 + (mL)^2} \sqrt{I} \right) (-1)^m \frac{d}{\sqrt{d^2 + (mL)^2}} \right], \quad (21)$$

где d — расстояние между центрами вихрей пары, L — период цепочки (величины d и L выражены в числе ячеек). Первый член в скобках (21) соответствует отталкиванию вихрей пары.

Проведенное выше рассмотрение справедливо лишь в том случае, если расстояние между центральными линиями соседних пар равняется четному числу ячеек. Конфигурацию рис. 3, *a* будем называть „чередующаяся (alternate) четная“ в соответствии с ориентацией соседних пар. Рассмотрим также следующие конфигурации: „чередующаяся нечетная“ (рис. 3, *b*), „параллельная (parallel) четная“ (рис. 3, *c*) и „параллельная нечетная“ (рис. 3, *d*). В каждой из этих конфигураций последнее уравнение (3), а значит и матрица (6), будут иметь свой вид, в результате чего изменятся соотношения (8)–(15) и выражения для b_1 – b_6 в (17), (18). В частности, для рис. 3, *b* в матрице (6) надо заменить крайний правый элемент a в нижнем ряду на $(a + \lambda)$, для рис. 3, *c* — его же на $(a - \lambda)$, а для рис. 3, *d* — второй справа элемент нижнего ряда $(-\lambda)$ на (-2λ) .

Результаты расчета для „чередующейся нечетной“ конфигурации приведены в табл. 1, а для обеих „параллельных“ — в табл. 2. Отметим важность рассмотрения

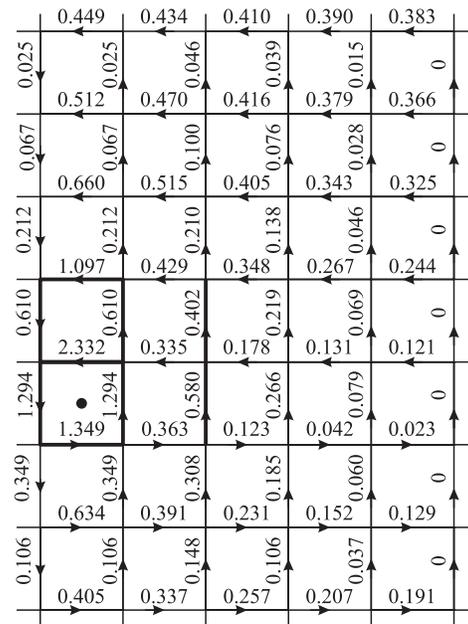


Рис. 4. Рассчитанное распределение скачков фазы по контактам вблизи центра одного из вихрей для „параллельной“ конфигурации. Картина симметрично продолжается влево.

„параллельных“ конфигураций, потому что именно они дают возможность провести расчет сил пиннинга при очень малых значениях I .

На рис. 4 изображено рассчитанное распределение скачка фазы по контактам для случая „параллельной“ конфигурации с $L = 8$ ($N = 5$) для $d = 51$ при критическом значении $I_{51} = 0.000974$. Из рис. 4 видно, что значения скачка фазы в некоторых горизонтальных участках имеют величину порядка 0.4–0.5. При уменьшении периода L для случая „параллельной“ конфигурации эти величины будут расти, так что при $L < 8$ условие $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ нарушается, и предложенная методика неприменима.

На рис. 5 приведены графики зависимости максимальной силы пиннинга (нормированной на величину $E_0 \pi/a$) от параметра I для „чередующейся“ конфигурации с

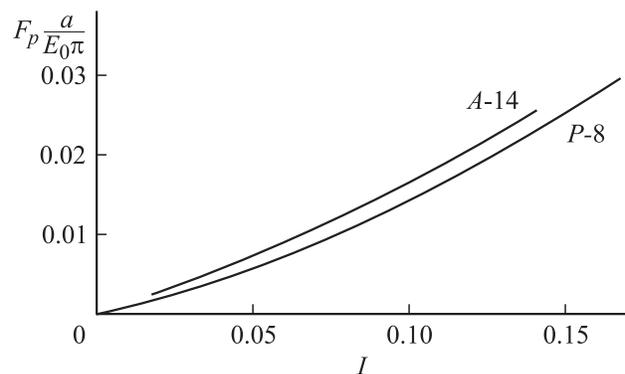


Рис. 5. Графики зависимостей максимальной силы пиннинга от параметра I .

Таблица 2. Результаты расчета для параллельных конфигураций

Расстояние d	$L = 13 (N = 7)$		$L = 12 (N = 7)$		$L = 9 (N = 5)$		$L = 8 (N = 5)$	
	I_d	$f(I_d)$	I_d	$f(I_d)$	I_d	$f(I_d)$	I_d	$f(I_d)$
2	0.340	0.267	0.341	0.267	0.346	0.266	0.351	0.265
3	0.144	0.182	0.146	0.182	0.157	0.179	0.166	0.178
4	0.0702	0.147	0.0726	0.147	0.0864	0.144	0.0953	0.142
6	0.0248	0.118	0.0271	0.118	0.0389	0.116	0.0456	0.115
11	0.00664	0.101	0.00781	0.101	0.0133	0.098	0.0164	0.0961
51	0.000364	0.091	0.000437	0.090	0.000782	0.084	0.000974	0.080
101	0.0000956	0.090	0.000115	0.0886	0.000207	0.082	0.000259	0.077

$d = 14$ (кривая A-14) и „параллельной“ с $d = 8$ (кривая P-8). Расчет проводился по формуле (21), но для случая „параллельных“ конфигураций в членах ряда отсутствует $(-1)^m$. Остальные кривые из табл. 1 и 2 располагаются между этими двумя.

Для более детального анализа этих зависимостей вычислим значения коэффициента пропорциональности $f(I) = Fa/E_0\pi I$ при критических значениях I_d . Результаты расчета приведены в соответствующих столбцах табл. 1 и 2. На рис. 6 изображены графики функций $f(I)$ для всех рассмотренных случаев (табл. 1 и 2). Крестиками на графиках обозначены рассчитанные точки. Цифры около них обозначают расстояние d , при котором вычислялось соответствующее значение I_d .

Проанализировав результаты расчетов в табл. 1 и 2 и графики рис. 6, можно сформулировать следующие выводы.

1. Критическое значение параметра пиннинга I_d , при котором пара вихрей еще может удерживаться на определенном расстоянии d друг от друга, убывает с ростом d . При этом величина I_d зависит от периода последовательности вихрей L и типа конфигурации: для

„чередующихся“ с ростом L величина I_d убывает, для „параллельных“ — наоборот. Чем меньше d , тем слабее эта зависимость. Это объясняется тем, что равнодействующая сил, действующих на вихрь со стороны вихрей последовательности, в „чередующихся“ конфигурациях направлена против силы взаимодействия вихрей пары, т. е. уменьшает ее и тем самым помогает вихрям удержаться на месте, а в „параллельных“ — наоборот. Поэтому в „чередующихся“ конфигурациях уменьшение L ведет к уменьшению I_d , а в „параллельных“ — к увеличению. Чем меньше d , тем это влияние слабее.

2. Кривая для двух уединенных вихрей ($L = \infty$) пройдет между кривыми A-14 и P-13. С уменьшением L кривые для „чередующихся“ и „параллельных“ конфигураций удаляются от нее в разные стороны. Будем ориентировочно считать, что эта кривая пересекается с осью ординат в точке 0.1. Тогда условие равенства максимальной силы пиннинга силе взаимодействия двух уединенных вихрей примет вид

$$0.1E_0 \frac{\pi}{a} I = \frac{E_0\pi I}{a} \sqrt{I} K_1(d\sqrt{I}). \quad (22)$$

При малых значениях x функция $K_1(x)$ примерно равна $1/x$, и из (22) следует, что минимальное расстояние между вихрями d_0 равно 10 ячейкам вне зависимости от I . Величина x при этом равна $10\sqrt{I}$, т. е. условие малости x принимает вид $\sqrt{I} \ll 0.1$ ($I \ll 0.01$). Ранее уже говорилось о том, что подобный результат был получен в [4], но минимальное расстояние там равнялось 7–8 ячейкам.

Таким образом, при стремлении I к нулю минимальное расстояние между двумя уединенными линейными вихрями в дискретной среде не возрастает неограниченно (как для плоских вихрей, а также для абрикосовских вихрей в непрерывной среде), а достигает некоторой конечной величины d_0 и далее остается постоянным. Этот факт говорит о том, что при стремлении I к нулю пренебречь пиннингом линейных вихрей нельзя, а пиннингом плоских — можно. Это объясняется тем, что в случае плоских вихрей с уменьшением I ширина вихря стремится к бесконечности. Поэтому при смещении вихря на величину, малую в сравнении с его размером, изменение его энергии, т. е. и сила пиннинга, при стремлении I к нулю убывает значительно быстрее,

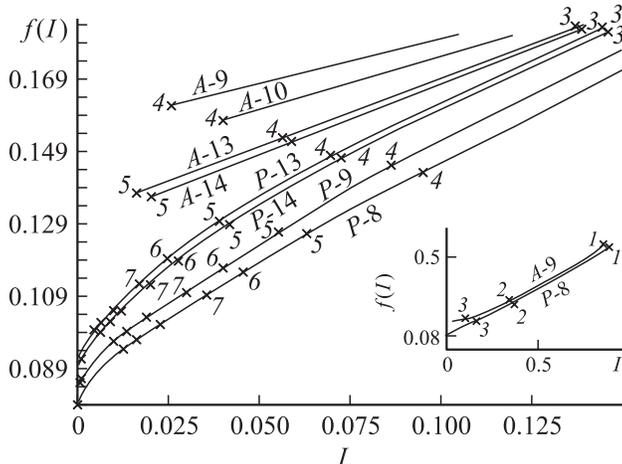


Рис. 6. Графики зависимостей коэффициента пропорциональности $f(I) = Fa/E_0\pi I$ при критических значениях I_d . „Чередующиеся“ конфигурации обозначаются буквой A (alternate), а „параллельные“ — буквой P (parallel), число рядом с буквой обозначает период L . На вставке показаны крайние графики A-9 и P-8 в более широком диапазоне I .

чем сила взаимодействия вихрей. Линейный же вихрь при сколь угодно малых значениях I имеет центральную часть размером в несколько ячеек, где скачки фазы намного больше, чем в остальной области вихря, причем форма центральной части вихря не изменяется при стремлении I к нулю. Сила пиннинга такого вихря при стремлении I к нулю убывает значительно медленнее, чем в случае плоских вихрей, так что при очень малых I максимальная сила пиннинга и сила взаимного отталкивания линейных вихрей зависят от I одинаково.

Эти рассуждения справедливы только для уединенной пары вихрей на бесконечном расстоянии от границы, когда отсутствуют как реальные, так и „мнимые“ дополнительные вихри. Существование же дополнительных вихрей меняет ситуацию. В случае „чередующейся“ конфигурации они помогают вихрю удержаться на месте, поэтому d_0 становится меньше 10, что подтверждается и численным расчетом (табл. 1). В „параллельных“ конфигурациях дополнительные вихри увеличивают силу отталкивания, поэтому вихрю труднее удержаться. Пусть при некотором значении I условие равенства силы F из (21), без множителей $(-1)^m$, силе пиннинга из (22) выполнено при расстоянии d между вихрями пары. Из (22) следует, что на грани равновесия величина F/I равна константе, т.е. не зависит от I и d . Оценим поведение величины F/I при уменьшении I . Даже если $d\sqrt{I} \ll 1$, вследствие чего первые члены в скобках в (22) пропорциональны $1/d\sqrt{I}$, то с ростом m аргумент функции $K_1(x)$ перестает быть малым, а при малых x с уменьшением x функция $K_1(x)$ растет быстрее, чем $1/x$. Поэтому при уменьшении I величина F/I растет и сила пиннинга не может удержать вихрь на прежнем расстоянии. Поэтому величина d возрастает, в результате чего F/I уменьшается и вихрь может находиться в равновесии в своем новом положении. Это рассуждение не зависит от периода L . Таким образом, при любом, сколь угодно большом, периоде L при стремлении I к нулю минимально возможное расстояние между вихрями пары неограниченно возрастает, т.е. d_0 равна бесконечности. Справедливость этого утверждения подтверждается результатами численного расчета (табл. 2 и рис. 6). Меняют ситуацию и отдельные дополнительные вихри (не бесконечный ряд). Каждая подобная конфигурация может анализироваться на базе оценки дополнительных сил притяжения или отталкивания, действующих на вихри пары.

3. При одном и том же значении I максимальные силы пиннинга (рис. 4) различаются для разных конфигураций. Это означает, что наличие дополнительных вихрей влияет на величину максимальной силы пиннинга: в „чередующихся“ конфигурациях пиннинг растет, а в „параллельных“ — уменьшается. При этом эффект тем сильнее, чем меньше период L . Если трактовать вихрь как шарик в яме, то параллельные ему вихри (в том же ряду) как бы приподнимают его, уменьшая глубину ямы, а антипараллельные — наоборот, увеличивают ее.

Заключение

Предложен новый метод решения нелинейной системы уравнений квантования флюксоида в ячейках трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, позволяющий найти токовую конфигурацию двух взаимодействующих линейных вихрей, а также минимально возможное расстояние между ними при данном значении параметра пиннинга.

Этот метод позволяет весьма точно рассчитывать токовую конфигурацию, сечение которой плоскостью, перпендикулярной ее оси, представляет собой не квадрат, как в предыдущих работах, а бесконечную полосу, в среднем ряду которой находятся центры вихрей. Ширина полосы для рассмотренных в работе случаев равна 13 или 9 ячейкам, но предложенная методика позволяет произвольно увеличить эту ширину. При этом число неизвестных растёт пропорционально ширине полосы. Существовавшие ранее методики были ограничены небольшими по размеру квадратами, поскольку число неизвестных пропорционально площади квадрата.

Методика близка к предложенной в [3] для расчета конфигурации уединенного вихря. Она основана на том, что уже на небольшом удалении от центров вихрей скачки фазы на контактах могут считаться малыми, что позволяет перейти к линейной системе уравнений в конечных разностях. Эта система имеет разные решения в области между рассматриваемыми вихрями и в двух симметричных областях от центров вихрей до бесконечности. Сшивая эти решения в близких к центру вихря ячейках, в которых линейность уравнений нарушается, можно найти точное решение. Кроме того, используется идея приближения к точному решению путем последовательных итераций по значениям скачков фазы, которые не могут считаться малыми [3]. Сходимость метода во всех случаях подтверждена проверкой выполнения исходных уравнений системы.

Показано, что рассматриваемая конфигурация двух вихрей в бесконечной полосе эквивалентна периодической последовательности пар вихрей попеременно чередующейся ориентации, в которой расстояние между центральными линиями соседних пар равно четному числу ячеек. Такая конфигурация названа „чередующейся четной“. Рассмотрены также „чередующаяся нечетная“, „параллельная четная“ и „параллельная нечетная“ конфигурации в соответствии с расположением и ориентацией соседних пар. Отметим важность рассмотрения „параллельных“ конфигураций, потому что именно они дают возможность провести расчеты при очень малых значениях I .

Для всех перечисленных случаев рассчитаны критические значения параметра пиннинга I_d , при которых исходные два вихря еще могут удерживаться на заданном расстоянии d друг от друга. Оказалось, что для заданного d значения I_d зависят от граничных условий, т.е. от ширины полосы и типа конфигурации, причем с ростом d эта зависимость усиливается.

В критическом положении суммарная сила, действующая на один из вихрей пары со стороны другого и всей системы дополнительных вихрей, равна максимальной силе пиннинга. Вычисление этих сил взаимодействия в приближении обычных абрикосовских вихрей позволяет, с одной стороны, найти максимальную силу пиннинга a , с другой, оценить роль дополнительных вихрей, т.е. необходимость учета граничных условий.

Для всех четырех конфигураций рассчитаны максимальные силы пиннинга и исследована их зависимость от I , а также от расстояния до ближайших вихрей и их ориентации. Показано, что близость параллельных вихрей уменьшает силу пиннинга, а антипараллельных — увеличивает.

При стремлении I к нулю минимальное расстояние между двумя уединенными линейными вихрями в дискретной среде не возрастает неограниченно (как для плоских вихрей, а также для абрикосовских вихрей в непрерывной среде), а достигает некоторой конечной величины d_0 и далее остается постоянным. Этот факт говорит о том, что при стремлении I к нулю пренебречь пиннингом линейных вихрей нельзя.

Список литературы

- [1] *Zelikman M.A.* // Superconductor Science & Technology. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469–474.
- [2] *Zelikman M.A.* // Superconductor Science & Technology. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795–800.
- [3] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 4. С. 9–16.
- [4] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 7–15.
- [5] *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.