01;03

Конвективные движения в слое вязкой жидкости с однородно заряженной свободной поверхностью

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 17 января 2005 г.)

Теоретически обнаружен эффект снижения в результате взаимодействия капиллярно-гравитационных и конвективных движений жидкости критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда. Выявлено, что при стремлении плотности поверхностного заряда к критической в смысле проявления неустойчивости Тонкса–Френкеля конвективные движения жидкости возникают при сколь угодно малых значениях градиента температуры, причем этот эффект зависит от толщины слоя жидкости.

PACS: 47.55.pb

Введение

Феномен тепловой конвекции представляет как академический интерес, так и в связи с многочисленными приложениями в технике и технологии. Он неоднократно становился предметом исследования [1–3], в том числе и при наличии волнового возмущения формы свободной поверхности жидкости [4,5]. Тем не менее до сих пор не исследована конвекция в неоднородно нагретом плоском слое жидкости на твердом дне, когда по свободной поверхности жидкости распределен электрический заряд, хотя такая ситуация достаточно часто встречается как в геофизических, так и технических, и технологических приложениях. Очевидно, что возникновение конвективного движения в поверхностно заряженном слое жидкости конечной глубины вызовет деформацию равновесной ее свободной поверхности с амплитудой, много большей амплитуды тепловых возмущений [6], что в свою очередь должно привести к снижению порога устойчивости по отношению к собственному заряду [7,8].

Постановка задачи

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью Oz, направленной вертикально вверх, против направления действия поля сил тяжести $\mathbf{g}$, горизонтальный слой вязкой теплопроводной идеально проводящей жидкости конечной толщины занимает область $0 \le z \le h$. Верхняя, свободная однородно электрически заряженная с плотностью κ_0, и нижняя, опирающаяся на плоское твердое дно, границы жидкости поддерживаются при постоянных температурах. Примем толщину слоя жидкости такой, что изменения плотности жидкости, вызванные изменением с глубиной гидростатического давления, пренебрежимо малы по сравнению с изменениями плотности, обусловленными неравномерным распределением температуры жидкости. При этих условиях гидродинамика слоя хорошо описывается системой уравнений Буссинеска–Обербека [1], в которой локальное значение температуры жидкости управляет плавучестью малых элементов ее объема, а значит, и условиями возникновения тепловой конвекции. В отсутствие конвекции в равновесном состоянии в жидком слое поле скоростей течения жидкости тождественно равно нулю, кроме того постоянны: вертикальный градиент равновесной температуры $\nabla T_0 = -A\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ — орт оси Oz), градиент равновесного давления $\nabla p_0 = -\rho_0 \mathbf{g}$ (ρ_0 — средняя по температуре плотность в определенном выше слое жидкости) и поверхностная плотность электрического заряда κ_0 на свободной поверхности.

В описанной физической системе при определенных параметрах могут реализоваться две качественно различных неустойчивости: Тонкса–Френкеля (неустойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному электрическому заряду) и конвективная, проявляющаяся в возникновении под действием архимедовых сил вихревого движения в плоскости Oxz.

Зададимся целью исследовать устойчивость равновесного состояния слоя жидкости по отношению к малым возмущениям полей: температуры $T(\mathbf{r}, t)$, поверхностной плотности электрического заряда $\kappa(x, t)$, давления $p(\mathbf{r}, t)$, плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$, скорости $U(\mathbf{r}, t)$ и деформации $\xi(x, t)$ свободной поверхности жидкости, имея в виду возможное влияние на устойчивость равновесных состояний вариаций градиента температуры и поверхностной плотности электрического заряда.

Естественно считать, что на верхней и нижней границах слоя жидкости, в силу принятого утверждения о постоянстве температур, при которых они поддерживаются, возмущения температуры, связанные с деформацией равновесной свободной поверхности, обращаются в нуль. Будем, однако, учитывать изменения капиллярных, гравитационных и электрических сил, действующих на элемент площади, деформированной тепловым капиллярным волновым движением свободной поверхности, полагая что возмущение физических параметров обусловлено тепловым движением молекул [6], и для оценки порядка величины амплитуды возмущений положим, что в случае рассматриваемых ниже безразмерных переменных $T \sim \rho \sim p \sim U \sim \xi \sim \sqrt{kT/\gamma}$, где k — постоянная Больцмана, γ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Примем, что коэффициенты кинематической вязкости жидкости ν, поверхностного натяжения γ, теплового расширения жидкости $\beta = -\rho_0^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p$ и температуропроводности χ незначительно изменяются с температурой, и их можно принять за постоянные исходные параметры. Без ограничения общности можно считать возмущения всех физических величин независящими от горизонтальной координаты y: $\xi = \xi(x,t)$, $p = p(x,z,t)$, $T = T(x,z,t)$, $\rho = \rho(x,z,t)$, $\mathbf{U} = u(x,z,t)\mathbf{e}_x + \upsilon(x,z,t)\mathbf{e}_z$, где t — время, $\mathbf{e}_x$ — орт оси Ox.

Учтем, что плотность жидкости связана с изменением температуры известным соотношением [9]:

$$\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p T \equiv -\beta\rho_0 T.$$

Напряженность же электрического поля над искаженной волновым движением свободной поверхностью $z = h + \xi(x,t)$ определим соотношением $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \times \times\big(\Phi_0 + \Phi(x,z,t)\big)$, где малая поправка $\Phi = \Phi(x,z,t)$ является величиной того же порядка малости, что и $\xi(x,t)$, а $\boldsymbol{\nabla}\Phi_0 = -4\pi\kappa_0\mathbf{e}_z$ [10].

Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $h = \rho_0 = \nu = \boldsymbol{\nabla}T_0 = 1$. За всеми физическими величинами оставим их прежние обозначения.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярно-гравитационного и конвективного движения жидкости в указанных безразмерных переменных в линейном приближении по малым величинам имеет вид

$$0 \le z \le 1: \qquad \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}p + \Delta\mathbf{U} + \mathrm{Gr}T\mathbf{e}_z;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - (\mathbf{U}\mathbf{e}_z) = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T; \quad \boldsymbol{\nabla}\mathbf{U} = 0;$$

$$z \ge 1: \quad \Delta\Phi = 0; \qquad z \to \infty: \quad |\boldsymbol{\nabla}\Phi| \to 0;$$

$$z = 1: \ \frac{\partial\xi}{\partial t} = \upsilon; \ \ -g\xi + p - 2\frac{\partial\upsilon}{\partial z} - \frac{E_0}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\upsilon}{\partial x} = 0; \qquad \Phi - E_0\xi = 0; \qquad T - \xi = 0;$$

$$z = 0: \qquad \upsilon = 0; \quad \frac{\partial\upsilon}{\partial z} = 0; \quad T = 0;$$

$$\mathrm{Gr} \equiv g\beta A h^4/\nu^2; \qquad \mathrm{Pr} \equiv \nu/\chi. \tag{1}$$

Здесь Gr — число Грассгофа; Pr — число Прандтля.

Вывод критических условий возникновения конвективного движения

Решение задачи (1) будем искать, полагая, что зависимости физических параметров от координат и времени имеют вид

$$\upsilon(x,z,t) \equiv V(z)\exp(st - ikx);$$
$$u(x,z,t) \equiv U(z)\exp(st - ikx);$$
$$p(x,z,t) \equiv p(z)\exp(st - ikx);$$
$$\Phi(x,z,t) \equiv \varphi(z)\exp(st - ikx);$$
$$\xi = \xi_0\exp(st - ikx);$$
$$T(x,z,t) \equiv \tau(z)\exp(st - ikx), \tag{2}$$

здесь s — комплексная частота, k — волновое число.

Подставив (2) в (1), из требования совместимости граничных условий можно найти дисперсионное уравнение задачи, которое, однако, имеет весьма громоздкий вид и поэтому не приводится. Целью настоящего рассмотрения является определение критических условий начала возникновения конвекции, которые можно найти, если в дисперсионном уравнении положить комплексную частоту s равной нулю. В этом случае критические условия выводятся в виде алгебраического соотношения между безразмерными физическими параметрами системы (1) в виде

$$\det(M) = 0; \tag{3}$$

$$M =$$
$$= \begin{pmatrix}
1 & G_1 & 0 & \mathrm{Ch}(q_1)G_1 & \mathrm{Ch}(q_1)G_1^2 & k^2\Omega\mathrm{Ch}(q_1) - \mu q_1 G_1(-3k^2 + q_1^2)\mathrm{Sh}(q_1) \\
0 & 0 & q_1G_1 & \mathrm{Sh}(q_1)G_1 & \mathrm{Sh}(q_1)G_1^2 & k^2\Omega\mathrm{Sh}(q_1) - \mu q_1 G_1(-3k^2 + q_1^2)\mathrm{Ch}(q_1) \\
1 & G_2 & 0 & \mathrm{Ch}(q_2)G_2 & \mathrm{Ch}(q_2)G_2^2 & k^2\Omega\mathrm{Ch}(q_2) - \mu q_2 G_2(-3k^2 + q_2^2)\mathrm{Sh}(q_2) \\
0 & 0 & q_2G_2 & \mathrm{Sh}(q_2)G_2 & \mathrm{Sh}(q_2)G_2^2 & k^2\Omega\mathrm{Sh}(q_2) - \mu q_2 G_2(-3k^2 + q_2^2)\mathrm{Ch}(q_2) \\
1 & G_3 & 0 & \mathrm{Ch}(q_3)G_3 & \mathrm{Ch}(q_3)G_3^2 & k^2\Omega\mathrm{Ch}(q_3) - \mu q_3 G_3(-3k^2 + q_3^2)\mathrm{Sh}(q_3) \\
0 & 0 & q_3G_3 & \mathrm{Sh}(q_3)G_3 & \mathrm{Sh}(q_3)G_3^2 & k^2\Omega\mathrm{Sh}(q_3) - \mu q_3 G_3(-3k^2 + q_3^2)\mathrm{Ch}(q_3)
\end{pmatrix};$$

$$\Omega \equiv 1 + k^2\eta^2 - k\eta W;$$

$$q_1 = \sqrt{Q_1}; \quad q_2 = \sqrt{Q_2}; \quad q_3 = \sqrt{Q_3}; \quad G_i \equiv k^2 - Q_i^2;$$

$$Q_1 = k^2 - k^{2/3}\mathrm{Ra}^{1/3}, \quad Q_2 = k^2 + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})k^{2/3}\mathrm{Ra}^{1/3},$$

$$Q_3 = k^2 + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})k^{2/3}\mathrm{Ra}^{1/3};$$

$$\eta \equiv h/\alpha; \quad \mu \equiv \nu\chi/gh^3; \quad \mathrm{Ra} \equiv \mathrm{Cr}\,\mathrm{Pr}; \quad W \equiv E_0^2/4\pi\sqrt{\rho g\gamma},$$

где Ra — число Рэлея, характеризующее порог возникновения конвекции; W — параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость заряженной свободной поверхности жидкости по отношению к собственному заряду. При $W \ge 2$ заряженная равновесная плоская поверхность жидкости становится неустойчивой по отношению к капиллярным волновым возмущениям бесконечно малой амплитуды с размерным волновым числом $k \ge 1/\alpha$, где α — капиллярная постоянная жидкости ($\alpha \equiv \sqrt{\gamma/\rho_o s}$). При этом сила давления электрического поля превосходит давление сил поверхностного натяжения, и с заряженной поверхности жидкости начинается сброс избыточного заряда [6].

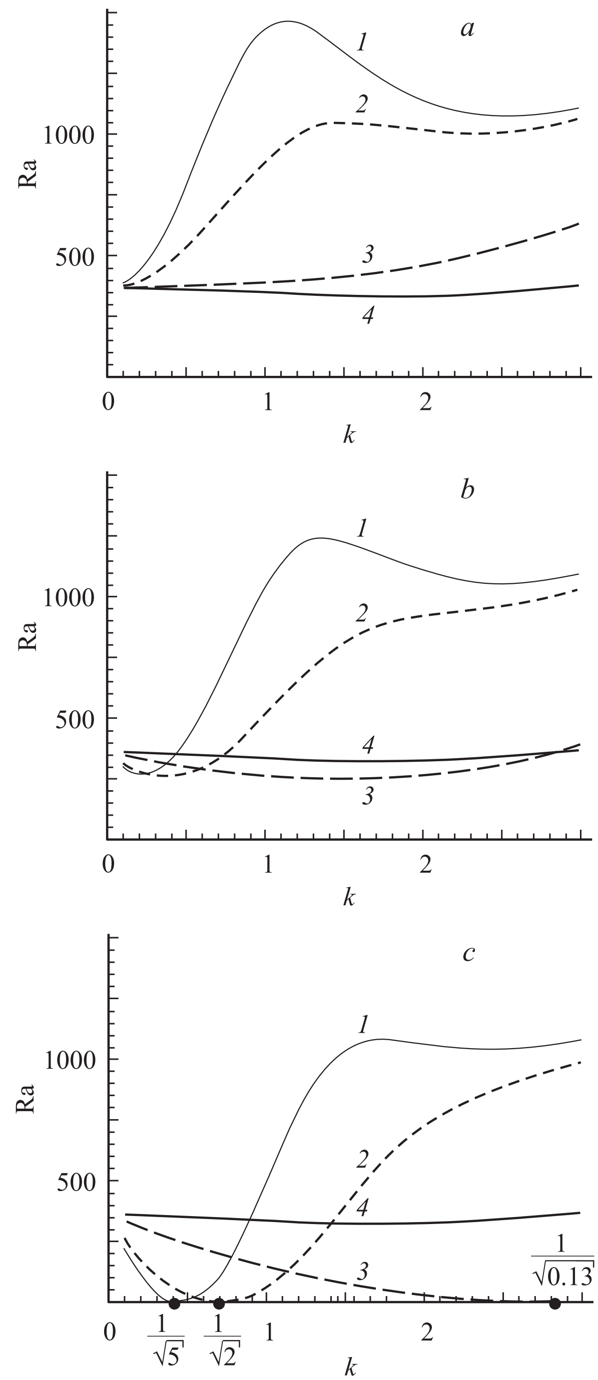
Анализ влияния электрического заряда на условия развития конвективной неустойчивости

Примеры расчетов по уравнению (3) приведены на рисунке в виде зависимостей критического для начала реализации конвективной неустойчивости значения параметра Рэлея Ra от безразмерного волнового числа k при различных значениях отношения толщины слоя к капиллярной постоянной η. В пределе $W \to 0$ полученные результаты совпадают с результатами работы [5], где показано, что при $\mu \geq 0.01$ влияние деформации поверхности на критические условия возникновения конвекции наиболее заметно.

Из рисунка видно, что увеличение поверхностной плотности электрического заряда существенно влияет на критические условия реализации конвективной неустойчивости: с ростом поверхностной плотности электрического заряда уменьшается критическое значение Ra, при котором развивается неустойчивость, и увеличивается (при принятом обезразмеривании) значение волновых чисел, соответствующее наиболее неустойчивой волне, определяющееся положением минимумов на приведенных кривых.

Из рисунка, c видно, что при $W = 2$ критическое значение градиента температуры, пропорциональное Ra при определенных значениях волнового числа обращается в нуль для слоев жидкости конечной толщины. Причем, оказалось, что для каждой из зависимостей наиболее неустойчивое безразмерное волновое число (положение минимума) определяется из условия $k/\eta = 1$. Для размерного волнового числа это условие будет иметь вид $\alpha k = 1$ (что означает: при обезразмеривании вида $\gamma = \rho_0 = g = 1$ волновое число наиболее неустойчивой моды остается неизменным с изменением толщины слоя жидкости). Но значение параметра Тонкса–Френкеля $W = 2$ соответствует критическому значению поверхностной плотности электрического заряда, выше которого развивается неустойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда. Это означает, что на пороге реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля конвективная неустойчивость может начать развиваться при весьма незначительной разности температур между дном и свободной поверхностью.

Проведенный анализ указывает на взаимное влияние друг на друга электрокапиллярно-гравитационных и конвективных движений. Это влияние наиболее интенсивно вблизи значений $W = 2$. При W чуть меньше 2 даже небольшая разность температур между дном и свободной поверхностью приведет к развитию конвективной неустойчивости. Эта неустойчивость приведет к появлению на свободной поверхности волн конечной амплитуды с волновым числом, близким к $k = 1/\alpha$. Но именно для периодических волн с такими волновыми числами критические условия (критическая величина



Зависимости критического для начала возникновения тепловой конвекции значения Ra от k, рассчитанные при $\mu = 0.01$ для слоев жидкости различной толщины η. Кривая *1* получена для слоя толщиной $\eta = 0.2$; *2* — 0.5; *3* — 0.77; *4* — $\eta \to \infty$; a — $W = 0$; b — 1; c — 2.

поверхностной плотности электрического заряда) реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля минимальны по сравнению с волнами других длин и заметно снижаются с увеличением их амплитуды [7,8]. Иными словами, конвективная неустойчивость инициирует именно то волновое движение свободной поверхности жидкости, которое ответственно за снижение порога проявления неустойчивости Тонкса–Френкеля. Сказанное можно также интерпретировать как возникновение вихревого конвенктивного движения электропроводной жидкости при реализации неустойчивости ее заряженной поверхности по отношению к собственному заряду, что согласуется с данными экспериментальных наблюдений [11].

Из рисунка видно также, что зависимость критической для возникновения конвективной неустойчивости в поверхностно заряженном слое вязкой электропроводной жидкости величины параметра Рэлея от толщины слоя немонотонна.

Заключение

Критические условия возникновения конвекции в слое вязкой жидкости конечной толщины заметно снижаются с увеличением поверхностной плотности электрического заряда на свободной поверхности жидкости. Независимо от толщины слоя жидкости наиболее неустойчивой является волна с размерным волновым числом $k = 1/\alpha$. В результате взаимодействия электрокапиллярно-гравитационных и конвективных движений снижаются критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 03-01-00760 и 06-01-00066-а, и гранта президента РФ № МД-1990-2005-1.

Список литературы

[1] *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
[2] *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений в жидкостях. М.: Наука, 1989. 320 с.
[3] *Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б.* Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. Т. 1. М.: Мир, 1991. 678 с.
[4] *Изаксон В.Х., Юдович В.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 4. С. 23–28.
[5] *Изаксон В.Х.* // ПМТФ. 1969. № 3. С. 89–92.
[6] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1989. 733 с.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[9] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЭОМ. 2004. № 4. С. 34–40.
[10] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 19–27.
[11] *Hayati J., Bailey A.J., Tadros H.F.* // Nature. 1986. Vol. 319. N 1. P. 41–43.