01;03

Нелинейные осцилляции заряженной струи электропроводной жидкости при многомодовой начальной деформации ее поверхности

© С.О. Ширяева, Н.В. Воронина, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 9 ноября 2005 г.)

Во втором порядке малости по амплитуде осцилляций поверхностно однородно заряженной струи идеальной несжимаемой проводящей жидкости, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси симметрии невозмущенной цилиндрической поверхности, получено аналитическое выражение для формы струи как функции времени, когда начальная деформация равновесной поверхности представлена суперпозицией конечного числа как осесимметричных, так и неосесимметричных мод. Определены поле скоростей течения жидкости в струе и распределение электрического поля в ее окрестности. Найдены положения внутренних нелинейных вторичных комбинационных трехмодовых резонансов, характерных для нелинейных поправок к аналитическим выражениям для формы струи, потенциалам поля скоростей течения жидкости в струе и электростатического поля в окрестности струи.

PACS: 47.20.-k

Исследование капиллярных осцилляций, устойчивости и дробления на отдельные капли заряженной цилиндрической струи представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, [1–4] и указанную там литературу). В связи с актуальностью эта проблема неоднократно становилась предметом теоретического исследования в линейной и нелинейной постановках. Однако подавляющее большинство проведенных исследований посвящено исследованию осесимметричных осцилляций струй и их вынужденного капиллярного распада на монодисперсные капли [1,3,4]. В то же время спонтанный распад струй (характерный возбуждением неосесимметричных мод), образующихся при реализации неустойчивости заряженной поверхности [5–9] в теоретическом отношении исследован недостаточно полно, хотя количество экспериментальных работ, ему посвященных, исчисляется сотнями (см., например, [2,10–12] и указанную там литературу). В настоящем рассмотрении будет проведено аналитическое асимптотическое исследование нелинейных осцилляций поверхности однородно заряженной идеально проводящей струи, когда начальная деформация ее равновесной цилиндрической поверхности представлена суперпозицией конечного числа как осесимметричных, так и неосесимметричных мод. Решение указанной задачи будет проведено в рамках метода многих масштабов, использованного ранее для исследования нелинейных осцилляций как незаряженной струи [13], так и заряженной, но в ситуации, когда начальная деформация определялась одной модой [8,9], что ограничило общность рассмотрения проявлением в нелинейных поправках лишь вырожденных резонансов.

Рассмотрим движущуюся с постоянной скоростью $\mathbf{U}_0$ бесконечную струю постоянного радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ. Примем, что внешняя среда отсутствует, однако в окружающем струю пространстве создано электростатическое поле, перпендикулярное оси струи. Вследствие этого на поверхности, распределен заряд, поверхностная плотность которого в равновесном состоянии, т. е. в отсутствие каки-либо возмущений цилиндрической формы струи имеет величину χ.

Рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат, начало которой движется со скоростью $\mathbf{U}_0$, а ось OZ направлена вдоль оси симметрии струи по направлению ее движения: $\mathbf{n}_z \parallel \mathbf{U}_0$. Очевидно, что в такой системе координат поле скоростей движения жидкости в струе будет полностью определяться капиллярными колебаниями ее поверхности.

Зададимся целью проследить эволюцию во времени движущегося по поверхности струи в положительном направлении оси OZ волнового пакета, представляющего собой суперпозицию из N осесимметричных и неосесимметричных волн с волновыми числами k_n, амплитуда которых мала по сравнению с радиусом струи.

Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, полагая $R = \rho = \sigma = 1$. В этом случае уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \quad |\xi| \ll 1, \tag{1}$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты, t — время, ξ — функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической формы струи.

В рамках модели потенциального течения математическая формулировка задачи о расчете временной эволюции виртуального волнового возмущения поверхности струи, заданного в начальный момент времени, будет состоят из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей течения жидкости с струе Ψ и электростатического потенциала Φ в окрестности струи

$$\Delta\Psi = 0, \quad \Delta\Phi = 0, \tag{2}$$

условий ограниченности решений на оси струи и на бесконечности

$$r \to 0: \quad |\nabla\Psi| \to 0; \qquad r \to \infty: \quad |\nabla\Phi| \to 0, \tag{3}$$

граничных условий на свободной поверхности (1)

$$r = 1 + \xi: \qquad \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Psi\nabla F = 0;$$

$$F(r, \varphi, z, t) \equiv r - \big[1 + \xi(\varphi, z, t)\big]; \tag{4}$$

$$r = 1 + \xi: \qquad \Delta P - \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\mathbf{n} = 0 \tag{5}$$

и условия эквипотенциальности поверхности струи

$$r = 1 + \xi: \qquad \Phi = \Phi_S(t). \tag{6}$$

В выражении (5) ΔP — перепад давлений внутри и вне цилиндрической струи в равновесном состоянии; предпоследнее и последнее слагаемые — давления электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно; $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности (1): $\mathbf{n} = \nabla F/|\nabla F|$.

Краевую задачу (1)–(6) следует дополнить условиями сохранения заряда и объема участка струи, длина которого равна некоторому характерному масштабу Λ, в который укладывается целое число длин всех волн, определяющих начальную деформацию

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S (\mathbf{n}\nabla\Phi) r d\varphi dz = 2\pi\chi\Lambda; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \\ z_0 \le z \le z_0 + \Lambda; \end{cases} \tag{7}$$

$$\int_V r dr d\varphi dt = \pi\Lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \le r \le 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \\ z_0 \le z \le z_0 + \Lambda. \end{cases} \tag{8}$$

Для полного замыкания системы уравнений (2)–(8) необходимо задать еще начальные условия. Однако, в силу того что начальные условия произвольного вида могут привести к чрезмерной громоздкости получаемого решения, в нелинейных задачах о расчете волновых профилей и течений жидкости принято формулировать начальные условия по ходу решения так, чтобы решение принимало наиболее простой вид [8,13,14]. Этот прием и будет использован в нижеследующих рассуждениях.

Будем искать решение задачи (2)–(8) в виде разложения по малому параметру ε, в качестве которого выберем отношение амплитуды волнового пакета к радиусу струи. Используя метод многих масштабов и ограничиваясь точностью до второго порядка малости включительно, представим искомые функции ξ, Ψ и Φ в виде рядов по степеням ε, полагая одновременно, что их эволюция во времени определяется двумя временными масштабами — основным $T_0 = t$ и более медленным $T_1 = \varepsilon t$:

$$\xi(\varphi, z, t) = \varepsilon\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2\xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Psi(\varphi, z, t) = \varepsilon\Psi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2\Psi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi(r, \varphi, z, t) = \Phi^{(0)}(r) + \varepsilon\Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3). \tag{9}$$

Поскольку мы считаем, что волны, распространяющиеся по поверхности струи, бегут в положительном направлении оси OZ, то примем, что форма свободной поверхности жидкости

$$r = 1 + \varepsilon\sum_{n=1}^{N} h_n f_n(\varphi)\big(A_n(T_1)\exp(i\theta_n) + \overline{A_n(T_1)}\exp(-i\theta_n)\big) + O(\varepsilon^2),$$

где $\theta_n \equiv k_n z - \omega_n T_0$; ω_n — частота n-й волны; $f_n(\varphi)$ — действительная функция, описывающая форму поперечного сечения струи; $A_n(T_1)$ — пока неизвестные комплексные функции, зависящие от медленного времени T_1; h_n — парциальный вклад n-й волны в начальное возмущение равновесной формы струи: $\sum\limits_{n=1}^{N} h_n = 1$. Горизонтальная черта над символом означает комплексное сопряжение.

Очевидно, что $f_n(\varphi)$ — периодические функции с периодом 2π, и следовательно, могут быть разложены в ряд Фурье

$$f_n(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\big(C_{mn}\exp im_n\varphi + \overline{C_{mn}}\exp(-im_n\varphi)\big);$$

$$C_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\varphi)\exp im_n\varphi d\varphi \Big/ 2\pi\big(1 + \delta_{m_n}, 0\big).$$

Для упрощения дальнейших выкладок ограничимся рассмотрением случая, когда для каждой n-й волны ее зависимость от азимутального угла φ определяется какой-либо одной гармоникой с азимутальным числом m_n, т. е.

$$f_n(\varphi) = C_{mn}\exp im_n\varphi + \overline{C_{mn}}\exp im_n\varphi.$$

Введя коэффициенты $\xi_n^{(-)}(T_1) = \overline{C_{mn}}A(T_1)$, $\xi_n^{(+)}(T_1) = \overline{C_{mn}}A(T_1)$, запишем выражение для свободной поверхности струи в виде

$$r = 1 + \varepsilon \sum_{n=1}^{N} h_n \big[\big(\xi_n^{(+)}(T_1)\exp im_n\varphi + \xi_n^{(-)}(T_1)\exp(-im_n\varphi)\big)\exp i\theta_n\big]\mathrm{O}(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Здесь и далее не приводятся слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным; $\theta_n \equiv k_n z - \omega_{mn}(k_n)T_0$, где $\omega_{mn}(k_n)$ — частота n-й волны с волновым k_n и азимутальным числами m_n.

Выражение (10) будем рассматривать как первое начальное условие, необходимое для замыкания краевой задачи (2)–(8), а второе будет задано ниже.

Подстановка разложений (9) в уравнения (2)–(8), использование оператора $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}$ для вычисления производной по времени и разложение условий (4)–(8) в ряд Тейлора в окрестности равновесной цилиндрической поверхности $r = 1$ с последующим выделением и суммированием слагаемых при одинаковых степенях ε с приравниванием их нулю позволяют получить задачи различных порядков малости.

В нулевом приближении имеем равновесное состояние, которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости с постоянной поверхностной плотностью заряда χ. Электрическое поле в окрестности невозмущенного однородно заряженного цилиндрического столба определяется потенциалом

$$\Phi^{(0)}(r) = -4\pi\chi\ln(r). \quad (11)$$

При записи (11) принято, что потенциал невозмущенной волновым движением поверхности цилиндрической струи равен нулю: $\Phi_S^{(0)} = 0$. Динамическое граничное условие в нулевом приближении позволяет определить равновесный перепад давлений на поверхности струи $\Delta p = 1 - 2\pi\chi^2$.

В силу линейности уравнений (2), условий ограниченности (3) и разложений (9), функции $\Psi^{(j)}$ и $\Phi^{(j)}$ ($j = 1, 2$) в первом приближении являются решениями записанных для них уравнений, полностью аналогичных (2), (3).

Система граничных и дополнительных условий (4)–(8) в первом порядке малости принимает вид

$$r = 1: \qquad \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad (12)$$

$$-\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi}\left\{2\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}\right)^2\xi^{(1)}\right\} + \xi^{(1)} + \frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial z^2} = 0; \quad (13)$$

$$\Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr}\xi^{(1)} = \Phi_S^{(1)}(t); \quad (14)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\Lambda}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}\right)\xi^{(1)}\right]\Big|_{r=1} d\varphi dz = 0; \quad (15)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\Lambda}\int_0^{2\pi}\xi^{(1)}d\varphi dz = 0. \quad (16)$$

На основании (1), (9) и (10) для функции поправки первого порядка малости к профилю волны $\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1)$ получим выражение

$$\xi^{(1)} = \sum_{n=1}^{N} h_n\big[\xi_n^{(+)}(T_1)\exp im_n\varphi + \xi_n^{(-)}(T_1)\exp(-im_n\varphi)\big]\exp i\theta_n. \quad (17)$$

Явный вид функций $\xi_n^{+}(T_1)$ и $\xi_n^{-}(T_1)$ может быть определен лишь при анализе задачи следующего порядка малости. Несложно убедиться, что функция $\xi^{(1)}$ в виде (17) удовлетворяет условию неизменности объема (16).

Приняв во внимание, что поправки первого порядка малости к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатическому потенциалу $\Phi^{(1)}$ связаны с функцией $\xi^{(1)}$ кинематическим граничным условием (12) и условием эквивалентности (14), будем искать выражения для $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ методом разделения переменных:

$$\Psi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{N}\big[A_n(T_1)B_n(r)D_n(\varphi)\exp i\theta_n\big];$$

$$\Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{N}\big[S_n(T_1)C_n(r)W_n(\varphi)\exp i\theta_n\big] + \Phi_S^{(1)}(t). \quad (18)$$

Подставив (18), а также (17), (11) в (12), (14) и приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим

$$A_n(T_1)D_n(\varphi) = -i\omega_{mn}h_n\big[\xi_n^{(+)}(T_1)\exp im_n\varphi + \xi_n^{(-)}(T_1)\exp(-im_n\varphi)\big]/B_n';$$

$$S_n(T_1)W_n(\varphi) = 4\pi\chi h_n\big[\xi_n^{(+)}(T_1)\exp im_n\varphi + \xi_n^{(-)}(T_1)\exp(-im_n\varphi)\big]/C_n. \quad (19)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу, взятую на невозмущенной поверхности струи.

Зависимость поправок к потенциалам $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ от координаты r определяется из уравнений Лапласа (2), которые после подстановки в них (18), (19) легко сводятся к имеющим одинаковый вид дифференциальным уравнениям относительно функций $B_n(r)$ и $C_n(r)$:

$$\frac{d^2V_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_n(r)}{dr} - \left(k_n^2 + \frac{m_n^2}{r^2}\right)V_n(r) = 0,$$

где $V_n(r) \equiv B_n(r)$ или $V_n(r) \equiv C_n(r)$. Решениями этого уравнения являются модифицированные функции Бесселя $I_{mn}(k_n r)$ и $K_{mn}(k_n r)$. Учитывая, что добавки к потенциалам $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ должны удовлетворять условиям ограниченности (3), можно записать $B_n(r) = I_{mn}(k_n r)$, $C_n(r) = K_{mn}(k_n r)$. В результате выражения для поправки к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатическому потенциалу $\Phi^{(1)}$ примут окончательный вид

$$\Psi^{(1)}(r,\varphi,z,T_0,T_1) = \sum_{n=1}^{N}\Big\{-i\omega_n \frac{h_n I_{mn}(k_n r)}{k_n I'_{mn}(k_n)}$$
$$\times \big[\xi_n^{(+)}(T_1)\exp im_n\varphi + \xi_n^{(-)}(T_1)\exp(-im_n\varphi)\big]\exp i\theta_n\Big\};$$

$$\Phi^{(1)}(r,\varphi,z,T_0,T_1) = 4\pi\chi\sum_{n=1}^{N}\Big\{h_n\frac{K_{mn}(k_n r)}{K_{mn}(k_n)}$$
$$\times \big[\xi_n^{(+)}(T_1)\exp im_n\varphi + \xi_n^{(-)}(T_1)\exp(-im_n\varphi)\big]\exp i\theta_n\Big\}. \quad (20)$$

При записи выражения для $\Phi^{(1)}$ учтено, что добавка первого порядка к значению электростатического потенциала на поверхности равна нулю: $\Phi_S^{(1)}(t) = 0$.

Из системы граничных и дополнительных условий (12)–(16) осталось неиспользованным динамическое граничное условие (13). Подставив в него решения (17), (20) и (11), получим дисперсионное уравнение, связывающее волновое число k_n и азимутальное число m_n с частотой колебаний ω_{mn}:

$$\omega_{mn}^2(k_n) = G_{mn}(k_n)\big[k_n^2 + m_n^2 - 1 + 4\pi\chi^2\big(1 + H_{mn}(k_n)\big)\big];$$
$$G_{mn}(k_n) = k_n I'_{mn}(k_n)/I_{mn}(k_n);$$
$$H_{mn}(k_n) = k_n K'_{mn}(k_n)/K_{mn}(k_n). \quad (21)$$

Во втором порядке малости из системы (4)–(8) получим неоднородные уравнения для поправок второго порядка малости $\xi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ [8]. Правые части этих уравнений играют роль функций неоднородности и выражаются через решения нулевого (11) и первого (17), (20) порядков малости, после подстановки которых граничные и дополнительные условия, получающиеся во втором порядке малости, примут вид

$r = 1:$

$$\frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_0} = \sum_{n=1}^{N} h_n\Big[\frac{\partial\xi_n^{(+)}}{\partial T_1}\exp im_n\varphi$$
$$+ \frac{\partial\xi_n^{-}}{\partial T_1}\exp(-im_n\varphi)\Big]\exp i\theta_n$$
$$+ i\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} h_n h_l\Big\{[X_1^{nl}Q_{nl} + X_2^{nl}R_{nl}]\exp\big[i(\theta_n+\theta_l)\big]$$
$$+ \big[X_3^{nl}S_{nl} + X_4^{nl}T_{nl}\big]\exp\big[i(\theta_n-\theta_l)\big]\Big\}; \quad (22)$$

$$-\frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial T_0} - \chi\Big[\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r} + 4\pi\chi\xi^{(2)}\Big]$$
$$+ \xi^{(2)} + \frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial z^2}$$
$$= -i\sum_{n=1}^{N}\Big\{\frac{\omega_{mn}h_n}{G_{mn}(k_n)}\Big[\frac{\partial\xi_n^{(+)}}{\partial T_1}\exp im_n\varphi$$
$$+ \frac{\partial\xi_n^{(-)}}{\partial T_1}\exp(-im_n\varphi)\Big]\exp i\theta_n\Big\}$$
$$+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} h_n h_l\Big\{[Y_1^{nl}Q_{nl} + Y_2^{nl}R_{nl}]\exp\big[i(\theta_n+\theta_l)\big]$$
$$+ \big[Y_3^{nl}S_{nl} + Y_4^{nl}T_{nl}\big]\exp\big[i(\theta_n-\theta_l)\big]\Big\}; \quad (23)$$

$$\Phi^{(2)} - 4\pi\chi\xi^{(2)} = \Phi_S^{(2)}(t) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} h_n h_l L_n\Big\{(Q_{nl} + R_{nl})$$
$$\times \exp\big[i(\theta_n+\theta_l)\big] + (S_{nl} + T_{nl})\exp\big[i(\theta_n-\theta_l)\big]\Big\}. \quad (24)$$

$$r \le 1: \quad \int_{z_0}^{z_0+\Lambda}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r}\,d\varphi dz = -4\pi^2\chi\Lambda$$
$$\times\sum_{n=1}^{N} h_n^2(k_n^2 + m_n^2)\big(|\xi_n^{(+)}|^2 + |\xi_n^{(-)}|^2\big); \quad (25)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\Lambda}\int_0^{2\pi}\xi^{(2)}d\varphi dz = -\pi\Lambda\sum_{n=1}^{N} h_n^2\big(|\xi_n^{(+)}|^2 + |\xi_n^{(-)}|^2\big), \quad (26)$$

где Q_{nl}, R_{nl}, S_{nl} и T_{nl} выражаются через $\xi_n^{(\pm)}$, $\xi_l^{(\pm)}$ следующим образом:

$$Q_{nl} \equiv \xi_n^{(+)}\xi_l^{(+)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi]$$
$$+ \xi_n^{(-)}\xi_l^{(-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi];$$

$$R_{nl} \equiv \xi_n^{(+)}\xi_l^{(-)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]$$
$$+ \xi_n^{(-)}\xi_l^{(+)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi];$$

$$S_{nl} \equiv \xi_n^{(+)}\xi_l^{(+)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]$$
$$+ \xi_n^{(-)}\xi_l^{(-)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi];$$

$$T_{nl} \equiv \xi_n^{(+)}\xi_l^{(-)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi]$$
$$+ \xi_n^{(-)}\xi_l^{(+)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi].$$

Все недостающие обозначения приведены в Приложении А.

Зададимся целью найти частное решение задачи второго порядка малости, удовлетворяющее записанным для функций $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ уравнениям (2), (3) и (22)–(26). Вид функций неоднородности в (22)–(24) подсказывает характер зависимости искомого решения от координаты φ и аргумента θ_n. На этом основании примем

$$\begin{aligned}
\xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) = \sum_{n=1}^{N}\Big\{&A_n^0 + \big[A_n^{(+)}\exp im_n\varphi \\
&+ A_n^{(-)}\exp(-im_n\varphi)\big]\exp i\theta_n\Big\} \\
+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Big\{&\big[A_{nl}^{(1+)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi] \\
&+ A_{nl}^{(1-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)] \\
&+ \big[A_{nl}^{(2+)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi] \\
&+ A_{nl}^{(2-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)] \\
&+ \big[A_{nl}^{(3+)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi] \\
&+ A_{nl}^{(3-)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)] \\
&+ \big[A_{nl}^{(4+)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi] \\
&+ A_{nl}^{(4-)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)]\Big\};
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = \sum_{n=1}^{N}\Big\{&B_n^0F_n^0(r) \\
&+ \big[B_n^{(+)}F_n^{(+)}(r)\exp im_n\varphi \\
&+ B_n^{(-)}F_n^{(-)}(r)\exp(-im_n\varphi)\big]\exp i\theta_n\Big\} \\
+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Big\{&\big[B_{nl}^{(1+)}F_{nl}^{(1+)}(r)\exp[i(m_n+m_l)\varphi] \\
&+ B_{nl}^{(1-)}F_{nl}^{(1-)}(r)\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)] \\
&+ \big[B_{nl}^{(2+)}F_{nl}^{(2+)}(r)\exp[i(m_n+m_l)\varphi] \\
&+ B_{nl}^{(2-)}F_{nl}^{(2-)}(r)\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)] \\
&+ \big[B_{nl}^{(3+)}F_{nl}^{(3+)}(r)\exp[i(m_n-m_l)\varphi] \\
&+ B_{nl}^{(3-)}F_{nl}^{(3-)}(r)\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)] \\
&+ \big[B_{nl}^{(4+)}F_{nl}^{(4+)}(r)\exp[i(m_n-m_l)\varphi] \\
&+ B_{nl}^{(4-)}F_{nl}^{(4-)}(r)\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)]\Big\};
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = \sum_{n=1}^{N}\Big\{&D_n^0C_n^0(r) \\
&+ \big[D_n^{(+)}C_n^{(+)}(r)\exp im_n\varphi \\
&+ D_n^{(-)}C_n^{(-)}(r)\exp(-im_n\varphi)\big]\exp i\theta_n\Big\} \\
+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Big\{&\big[D_{nl}^{(1+)}C_{nl}^{(1+)}(r)\exp[i(m_n+m_l)\varphi] \\
&+ D_{nl}^{(1-)}C_{nl}^{(1-)}(r)\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)] \\
&+ \big[D_{nl}^{(2+)}C_{nl}^{(2+)}(r)\exp[i(m_n+m_l)\varphi] \\
&+ D_{nl}^{(2-)}C_{nl}^{(2-)}(r)\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)] \\
&+ \big[D_{nl}^{(3+)}C_{nl}^{(3+)}(r)\exp[i(m_n-m_l)\varphi] \\
&+ D_{nl}^{(3-)}C_{nl}^{(3-)}(r)\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)] \\
&+ \big[D_{nl}^{(4+)}C_{nl}^{(4+)}(r)\exp[i(m_n-m_l)\varphi] \\
&+ D_{nl}^{(4-)}C_{nl}^{(4-)}(r)\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big] \\
&\times \exp[i(\theta_n-\theta_l)]\Big\} + f(t).
\end{aligned} \tag{29}$$

Зависимости функций $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ от координаты r определим из уравнений Лапласа, подставив (28), (29) в (2) при условии обращения в ноль сумм коэффициентов при экспонентах с различными показателями. В итоге получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $F_{nl}^{j(\pm)}(r)$ и $C_{nl}^{j(\pm)}(r)$, $j = 0, 1, 2, 3$. Их решения с учетом условий ограниченности (3) позволяют привести выражения (28), (29) для потенциалов $\Psi^{(2)}$, $\Phi^{(2)}$ к виду

$$\begin{aligned}
\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = \sum_{n=1}^{N}\Big\{&B_n^0 + \big[B_n^{(+)}\exp im_n\varphi \\
&+ B_n^{(-)}\exp(-im_n\varphi)\big]I_{m_n}(k_nr)\exp i\theta_n\Big\} \\
+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Big\{&\big[B_{nl}^{(1+)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi] \\
&+ B_{nl}^{(1-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]I_{(m_n+m_l)}[(k_n+k_l)r]\exp[i(\theta_n+\theta_l)] \\
&+ \big(\Omega I_{(m_n+m_l)}[|k_n-k_l|r] + \Xi r^{2m_n}\big)\big[B_{nl}^{(2+)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi] \\
&+ B_{nl}^{(2-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)] \\
&+ \big[B_{nl}^{(3+)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi] + B_{nl}^{(3-)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big] \\
&\times I_{(m_n-m_l)}[(k_n+k_l)r]\exp[i(\theta_n+\theta_l)] \\
&+ \big[B_{nl}^{(4+)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi] + B_{nl}^{(4-)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big] \\
&\times I_{(m_n-m_l)}[|k_n-k_l|r]\Omega\exp[i(\theta_n-\theta_l)]\Big\};
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\Phi^{(2)}(r,\varphi,z,T_0)=\sum_{n=1}^{N}\Big\{D_n^0\ln(r)+\big[D_n^{(+)}\exp im_n\varphi$$

$$+D_n^{(-)}\exp(-im_n\varphi)\big]K_{m_n}(k_nr)\exp i\theta_n\Big\}$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Big\{\big[D_{nl}^{(1+)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi]$$

$$+D_{nl}^{(1-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]$$

$$\times K_{(m_n+m_l)}[(k_n+k_l)r]\exp[i(\theta_n+\theta_l)]$$

$$+\big(\Omega K_{(m_n+m_l)}[|k_n-k_l|r]+\Xi r^{-2m_n}\big)\big[D_{nl}^{(2+)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi]$$

$$+D_{nl}^{(2-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)]$$

$$+\big[D_{nl}^{(3+)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]+D_{nl}^{(3-)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]$$

$$\times K_{(m_n-m_l)}[(k_n+k_l)r]\exp[i(\theta_n+\theta_l)]$$

$$+\big[D_{nl}^{(4+)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]$$

$$+D_{nl}^{(4-)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\Omega K_{(m_n-m_l)}[|k_n-k_l|r]$$

$$\times\exp[i(\theta_n-\theta_l)]\Big\}+f(t), \tag{31}$$

где ступенчатые функции Ω и Ξ от аргумента $(n-1)$ определены следующим образом:

$$\Omega\equiv\Omega(n-l)=1 \text{ при } n=l \text{ и } \Omega(n-l)=0 \text{ при } n\neq l;$$

$$\Xi\equiv\Xi(n-l)=1 \text{ при } n=l \text{ и } \Xi(n-l)=0 \text{ при } n\neq l.$$

Коэффициенты $A_{nl}^{j(\pm)}$, $B_{nl}^{j(\pm)}$ и $D_{nl}^{j(\pm)}$ определяются из системы уравнений (22)–(26). Заметим, что B_n^0 является функцией времени, которая может быть выбрана в удобной для записи решения форме в силу определения потенциала.

Из условий сохранения объема (26) и заряда (25) несложно найти

$$A_n^0+A_{nn}^{(4+)}+A_{nn}^{(4-)}=-\frac{h_n^2}{2}\big(|\xi_n^{(+)}|^2+|\xi_n^{(-)}|^2\big);$$

$$D_n^0=-2\pi\chi h_n^2(k_n^2+m_n^2)\big(|\xi_n^{(+)}|^2+|\xi_n^{(-)}|^2\big). \tag{32}$$

Подставив (27) и (30) в кинематическое граничное условие (22) и приравняв друг другу коэффициенты при одинаковых экспонентах из левой и правой частей равенства, получим

$$k_nI'_{m_n}(k_n)B_n^{(\pm)}+i\omega_{mn}A_n^{\pm}=h_n\frac{\partial\xi_n^{(\pm)}}{\partial T_1};$$

$$(k_n+k_l)I'_{(m_n+m_l)}(k_n+k_l)B_{nl}^{(1\pm)}+i(\omega_{mn}+\omega_{ml})A_{nl}^{(1\pm)}$$

$$=ih_nh_lX_1^{nl}\xi_n^{(\pm)}\xi_l^{(\pm)};$$

$$(\Omega|k_n-k_l|I'_{(m_n+m_l)})(|k_n-k_l|+\Xi 2m_n)B_{nl}^{(2\pm)}$$

$$+i(\omega_{mn}-\omega_{ml})A_{nl}^{(2\pm)}=ih_nh_lX_4^{nl}\xi_n^{(\pm)}\overline{\xi_l^{(\mp)}};$$

$$(k_n+k_l)I'_{(m_n-m_l)}(k_n+k_l)B_{nl}^{(3\pm)}+i(\omega_{mn}+\omega_{ml})A_{nl}^{(3\pm)}$$

$$=ih_nh_lX_2^{nl}\xi_n^{(\pm)}\xi_l^{(\mp)};$$

$$\Omega|k_n-k_l|I'_{(m_n-m_l)}(|k_n-k_l|)B_n^{(4\pm)}$$

$$+i(\omega_{mn}-\omega_{ml})A_{nl}^{(4\pm)}=ih_nh_lX_3^{nl}\xi_n^{(\pm)}\overline{\xi_l^{(\pm)}}. \tag{33}$$

Аналогичным образом, использовав (27) и (31), из условия эквипотенциальности поверхности струи (24) получим следующую систему равенств:

$$K_{m_n}(k_n)D_n^{(\pm)}-4\pi\chi A_n^{(\pm)}=0;$$

$$K_{(m_n+m_l)}(k_n+k_l)D_{nl}^{(1\pm)}-4\pi\chi A_{nl}^{(1\pm)}=h_nh_lL_n\xi_n^{(\pm)}\xi_l^{(\pm)};$$

$$\big[\Omega K_{(m_n+m_l)}(|k_n-k_l|)+\Xi\big]D_{nl}^{(2\pm)}-4\pi\chi A_{nl}^{(2\pm)}$$

$$=h_nh_lL_n\xi_n^{(\pm)}\overline{\xi_l^{(\mp)}};$$

$$K_{(m_n-m_l)}(k_n+k_l)D_{nl}^{(3\pm)}-4\pi\chi A_{nl}^{(3\pm)}=h_nh_lL_n\xi_n^{(\pm)}\xi_l^{(\mp)};$$

$$\Omega\big[K_{(m_n-m_l)}(|k_n-k_l|)D_{nl}^{(4\pm)}-4\pi\chi A_{nl}^{(4\pm)}\big]$$

$$=\Omega h_nh_lL_n\xi_n^{(\pm)}\overline{\xi_l^{(\pm)}};$$

$$f(t)-4\pi\chi\sum_{n=1}^{N}\big(A_n^0+A_{nn}^{(4+)}+A_{nn}^{(4-)}\big)$$

$$=\Phi_S^{(2)}(t)+\sum_{n=1}^{N}h_n^2L_n\big(|\xi_n^{(+)}|^2+|\xi_n^{(-)}|^2\big). \tag{34}$$

Отметим, что при получении добавки второго порядка малости к потенциалу поверхности $\Phi_S^{(2)}$ были использованы выражения (32).

Наконец, подставив (27), (30) и (31) в динамическое граничное условие (23), а также учтя (32), найдем:

$$\big(1-k_n^2-m_n^2-w\big)A_n^{(\pm)}+i\omega_{mn}I_{m_n}(k_n)B_n^{(\pm)}$$

$$-\chi k_nK'_{m_n}(k_n)D_n^{(\pm)}=-i\,\frac{h_n\omega_{mn}}{G_{m_n}(k_n)}\frac{\partial\xi_n^{(\pm)}}{\partial T_1};$$

$$w\equiv 4\pi\chi^2;$$

$$\big[1-(k_n+k_l)^2-(m_n+m_l)^2-w\big]A_{nl}^{(1\pm)}$$

$$+i(\omega_{mn}+\omega_{ml})I_{(m_n+m_l)}(k_n+k_l)B_{nl}^{(1\pm)}$$

$$-\chi(k_n+k_l)K'_{(m_n+m_l)}(k_n+k_l)D_{nl}^{(1\pm)}$$

$$=h_nh_lY_1^{nl}\xi_n^{(\pm)}\xi_l^{(\pm)};$$

$$\begin{aligned}&\big[1-(k_n-k_l)^2-(m_n+m_l)^2-w\big]A_{nl}^{(2\pm)}\\&\quad+i(\omega_{mn}-\omega_{ml})\big[\Omega I_{(m_n+m_l)}(|k_n-k_l|)+\Xi\big]B_{nl}^{(2\pm)}\\&\quad-\chi\big[\Omega|k_n-k_l|K'_{(m_n+m_l)}(|k_n-k_l|)-\Xi\,2m_n\big]D_{nl}^{(2\pm)}\\&\quad=h_nh_lY_4^{nl}\xi_n^{(\pm)}\overline{\xi_l^{(\mp)}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\big[1-(k_n+k_l)^2-(m_n-m_l)^2-w\big]A_{nl}^{(3\pm)}\\&\quad+i(\omega_{mn}+\omega_{ml})I_{(m_n-m_l)}(k_n+k_l)B_{nl}^{(3\pm)}\\&\quad-\chi(k_n+k_l)K'_{(m_n-m_l)}(k_n+k_l)D_{nl}^{(3\pm)}\\&\quad=h_nh_lY_2^{nl}\xi_n^{(\pm)}\xi_l^{(\mp)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Big\{\big[1-(k_n-k_l)^2-(m_n-m_l)^2-w\big]A_{nl}^{(4\pm)}\\&\quad+i(\omega_{mn}-\omega_{ml})I_{(m_n-m_l)}(|k_n-k_l|)B_{nl}^{(4\pm)}\\&\quad-\chi|k_n-k_l|K'_{(m_n-m_l)}(|k_n+k_l|)D_{nl}^{(4\pm)}\Big\}\Omega\\&\quad=h_nh_lY_3^{nl}\xi_n^{(\pm)}\overline{\xi_l^{(\pm)}}\Omega;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial B_n^0}{\partial T_0}-\chi D_n^0+(1-w)\big(A_n^0+A_{nn}^{(4+)}+A_{nn}^{(4-)}\big)\\&\quad=h_nh_lY_3^{nn}\big(|\xi_n^{(+)}|^2+|\xi_n^{(-)}|^2\big).\end{aligned}\qquad(35)$$

Выяснение вида функции B_0 (см. последнее из равенств (35)) имеет чисто академическое значение, поскольку потенциал определяется с точностью до произвольной аддитивной функции, зависящей только от времени.

Совместное решение системы (33)–(35) позволяет определить искомые коэффициенты. Рассмотрим первые равенства из выписанных систем. Выразив из (33) коэффициенты $B_n^{(\pm)}$, а из (34) — $D_n^{(\pm)}$ и подставив их в (35), получим

$$\left[1-k_n^2-m_n^2-w\big(1+H_{mn}(k_n)\big)+\frac{\omega_{mn}^2}{G_{mn}(k_n)}\right]A_n^{(\pm)}=i2\,\frac{\omega_{mn}}{G_{mn}(k_n)}\,\frac{\partial\xi_n^{(\pm)}}{\partial T_1}.$$

Несложно заметить, что в силу дисперсионного соотношения (21) квадратная скобка обращается в ноль. В результате получим

$$(\partial\xi_n^{(\pm)}/\partial T_1)=0.\qquad(36)$$

Уравнение (36) означает, что комплексные амплитуды $\xi_n^{(\pm)}$ не зависят от временного масштаба T_1, и при решении рассматриваемой задачи с точностью до второго порядка малости являются константами.

Коэффициенты $A_n^{(\pm)}$ остались не определенными. Их значения можно выяснить только из начальных условий. Поскольку мы поставили перед собой цель построить решение, имеющее наиболее простой вид, подобрав нужным образом начальные условия, то мы вправе выбрать второе начальное условие в виде требования: $A_n^{(\pm)}=0$. При этом, согласно (33) и (34), получим $B_n^{(\pm)}=0$ и $D_n^{(\pm)}=0$. Определив из системы (33)–(35) все оставшиеся коэффициенты, запишем решение второго порядка малости в окончательном виде

$$\begin{aligned}\xi^{(2)}(\varphi,z,T_0)&=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}h_n^2\big(|\xi_n^{(+)}|^2+|\xi_n^{(-)}|^2\big)\\&+\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}h_nh_l\Big\{\alpha_{nl}^{(1)}\big[\xi_n^{(+)}\xi_l^{(+)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi]\\&+\xi_n^{(-)}\xi_l^{(-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)]\\&+(\Omega\alpha_{nl}^{(2)}+\Xi a_n^{(2)})\big[\xi_n^{(+)}\overline{\xi_l^{(-)}}\exp[i(m_n+m_l)\varphi]\\&+\xi_n^{(-)}\overline{\xi_l^{(+)}}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)]\\&+\alpha_{nl}^{(3)}\big[\xi_n^{(+)}\xi_l^{(-)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]\\&+\xi_n^{(-)}\xi_l^{(+)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)]\\&+\Omega\alpha_{nl}^{(4)}\big[\xi_n^{(+)}\overline{\xi_l^{(+)}}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]\\&+\xi_n^{(-)}\overline{\xi_l^{(-)}}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)]\Big\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(2)}(r,\varphi,z,T_0)&=-\sum_{n=1}^{N}h_n^2b_n^0\big(|\xi_n^{(+)}|^2+|\xi_n^{(-)}|^2\big)T_0\\&-i\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}h_nh_l\Big\{\beta_{nl}^{(1)}I_{(m_n+m_l)}[(k_n+k_l)r]\\&\times\big[\xi_n^{(+)}\xi_l^{(+)}\exp[i(m_n+m_l)\varphi]\\&+\xi_n^{(-)}\xi_l^{(-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)]\\&+\big[\Omega I_{(m_n+m_l)}(|k_n-k_l|r)\beta_{nl}^{(2)}+\Xi r^{2m_n}b_n^{(2)}\big]\\&\times\big[\xi_n^{(+)}\overline{\xi_l^{(-)}}\exp[i(m_n+m_l)\varphi]\\&+\xi_n^{(-)}\overline{\xi_l^{(+)}}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)]\\&+\beta_{nl}^{(3)}I_{(m_n-m_l)}[(k_n+k_l)r]\big[\xi_n^{(+)}\xi_l^{(-)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]\\&+\xi_n^{(-)}\xi_l^{(+)}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n+\theta_l)]\\&+\Omega\beta_{nl}^{(4)}I_{(m_n-m_l)}(|k_n-k_l|r)\big[\xi_n^{(+)}\overline{\xi_l^{(+)}}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]\\&+\xi_n^{(-)}\overline{\xi_l^{(-)}}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\exp[i(\theta_n-\theta_l)]\Big\};\end{aligned}$$

$$\Phi^{(2)}(r,\varphi,z,T_0)=\sum_{n=1}^{N}h_n^2\big[-2\pi\chi(k_n^2+m_n^2)\ln r\big]$$
$$\times\left(|\xi_n^{(+)}|^2+|\xi_n^{(-)}|^2\right)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}h_nh_l\Big\{d_{nl}^{(1)}\big[\xi_n^{(+)}\xi_l^{(+)}$$
$$\times\exp[i(m_n+m_l)\varphi]+\xi_n^{(-)}\xi_l^{(-)}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]\big]$$
$$\times K_{(m_n+m_l)}[(k_n+k_l)r]\exp[i(\theta_n+\theta_l)]$$
$$+\big[\Omega K_{(m_n+m_l)}(|k_n-k_l|r)d_{nl}^{(2)}+\Xi r^{-2m_n}d_n^{(2)}\big]\big[\xi_n^{(+)}\overline{\xi_l^{(-)}}$$
$$\times\exp[i(m_n+m_l)\varphi]+\xi_n^{(-)}\overline{\xi_l^{(+)}}\exp[-i(m_n+m_l)\varphi]$$
$$\times\exp[i(\theta_n-\theta_l)]+d_{nl}^{(3)}\big[\xi_n^{(+)}\xi_l^{(-)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]$$
$$+\xi_n^{(-)}\xi_l^{(+)}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]\big]K_{(m_n-m_l)}[(k_n+k_l)r]$$
$$\times\exp[i(\theta_n+\theta_l)]+d_{nl}^{(4)}\big[\xi_n^{(+)}\overline{\xi_l^{(+)}}\exp[i(m_n-m_l)\varphi]$$
$$+\xi_n^{(-)}\overline{\xi_l^{(-)}}\exp[-i(m_n-m_l)\varphi]\big]\Omega K_{(m_n-m_l)}(|k_n-k_l|r)$$
$$\times\exp[i(\theta_n-\theta_l)]\Big\};$$
$$\Phi_S^{(2)}(t)=4\pi\chi\sum_{n=1}^{N}h_n^2\big(1+H_{mn}(k_n)\big),\qquad(37)$$

где вновь введенные обозначения приведены в Приложении B.

Решение поставленной задачи с точностью до второго порядка малости определяется выражениями (1), (9), (11), (17), (20), (21), (36), (37).

Форма струи для случая, когда ее начальная деформация определена суперпозицией двух волн с волновыми $k_1=k$ и $k_l=lk$ и азимутальными числами m_1 и m_l определяется выражением

$$r(z,\varphi,t)=1+\varepsilon\big[h_1\cos m_1\varphi\cos\theta_1+h_l\cos m_l\varphi\cos\theta_l\big]$$
$$+0.25\varepsilon^2\Big\{\big[-0.5(h_1^2+h_l^2)+h_1^2a_1^{(2)}\cos 2m_1\varphi$$
$$+h_l^2a_l^{(2)}\cos 2m_l\varphi\big]+h_1^2\big[\alpha_{11}^{(1)}\cos 2m_1\varphi+\alpha_{11}^{(3)}\big]\cos 2\theta$$
$$+h_l^2\big[\alpha_{ll}^{(1)}\cos 2m_l\varphi+\alpha_{ll}^{(3)}\big]\cos 2\theta_l$$
$$+h_1h_l\big[(\alpha_{1l}^{(1)}+\alpha_{l1}^{(1)})\cos[(m_1+m_l)\varphi]$$
$$+(\alpha_{1l}^{(3)}+\alpha_{l1}^{(3)})\cos[(m_1-m_l)\varphi]\big]\cos(\theta+\theta_l)$$
$$+h_1h_l\big[(\alpha_{1l}^{(2)}+\overline{\alpha_{l1}^{(2)}})\cos[(m_1+m_l)\varphi]$$
$$+(\alpha_{1l}^{(4)}+\overline{\alpha_{l1}^{(4)}})\cos[(m_1-m_l)\varphi]\cos(\theta-\theta_l)\Big\},\qquad(38)$$

где θ_1 определено ранее, а $\theta_l\equiv lkz-\omega_{ml}T_0$.

Из (38) видно, что за счет нелинейного взаимодействия волн во втором порядке малости возбуждаются волны как с удвоенными волновыми и азимутальными числами, так волны с волновыми и азимутальными числами, получающимися в результате сложения и вычитания чисел волн, определяющих начальную деформацию равновесной цилиндрической формы струи.

Выражения, аналогичные (38), легко выписать по полученным выше выражениям и для поля скоростей волнового течения жидкости в струе и поля электростатического потенциала в ее окрестности. Из вида нелинейных поправок $\Phi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ и $\xi^{(2)}$ несложно видеть, что они имеют резонансный вид, определяющийся видом коэффициентов, которые при определенных соотношениях между частотами волн стремятся к бесконечности, что в теории нелинейных осцилляций и волн соответствует проявлению резонансного обмена энергией между волнами. Условия реализации резонансного взаимодействия имеют вид

$$\big(\omega_{mn}(k_n)\pm\omega_{ml}(k_l)\big)^2=\omega_{(mn\pm ml)}^2(k_n\pm k_l),\qquad(39)$$

где $\omega_{mn}(k_n)$ и $\omega_{ml}(k_l)$ определяются (21), а $\omega_{(mn\pm ml)}(k_n\pm k_l)$ соотношением

$$\omega_{mn\pm ml}^2(k_n\pm k_l)=G_{(mn\pm ml)}(|k_n\pm k_l|)\Big\{(k_n\pm k_l)^2$$
$$+(m_n\pm m_l)^2-1+w[1+H_{(mn\pm ml)}(|k_n\pm k_l|)]\Big\}.\qquad(40)$$

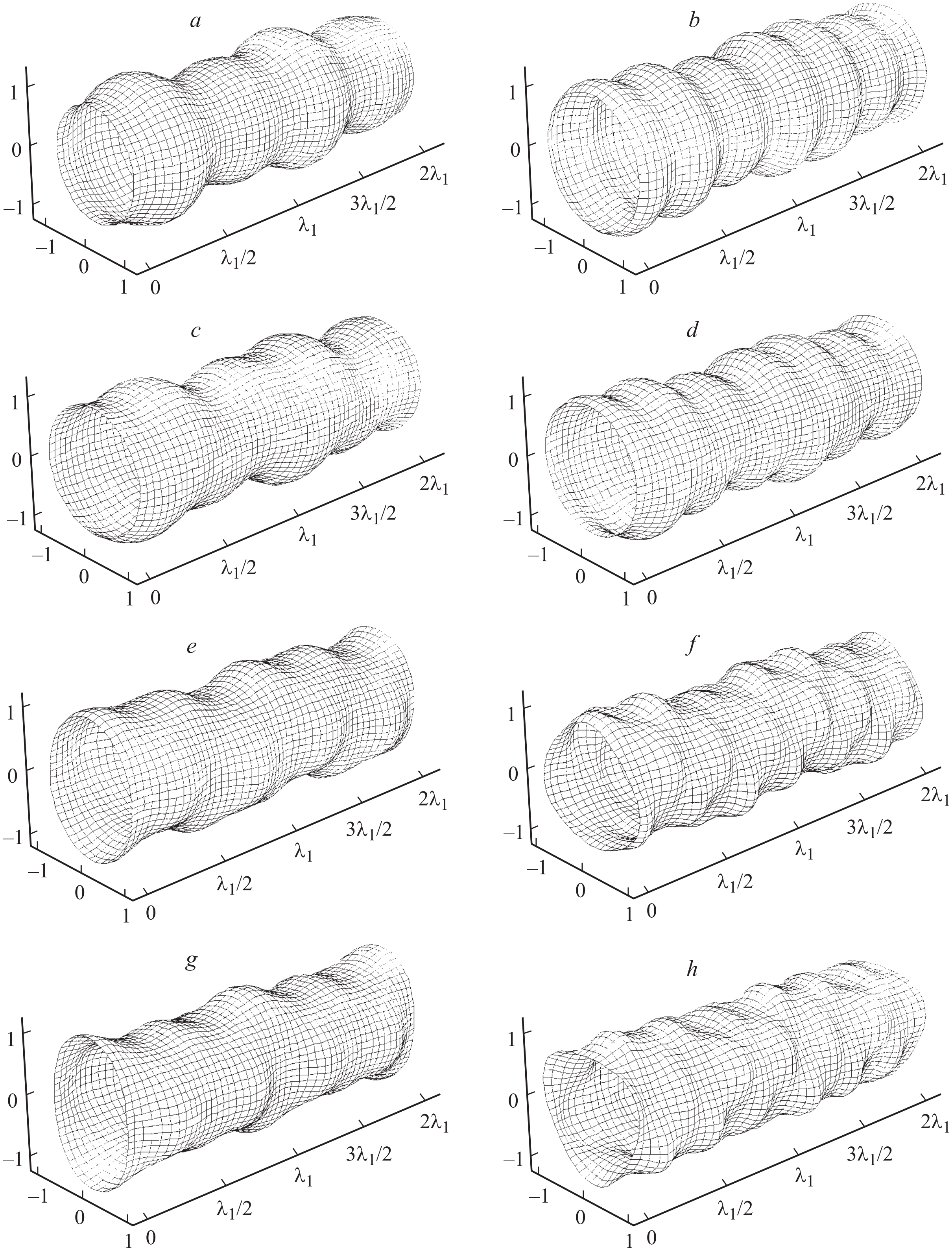
Исследование закономерностей резонансного обмена энергией между волнами требует отдельного рассмотрения, но из вида соотношений (21), (39), (40) сразу можно сказать, что в реализующихся при многомодовой начальной деформации вторичных комбинационных резонансах возможен обмен энергией между длинными и короткими волнами в обоих направлениях (от коротких к длинным, и обратно), а также между волнами с различной симметрией (различающимися значениями азимутальных чисел).

На рисунке приведены рассчитанные по (38) формы струи и ситуации, когда начальная деформация определена суперпозицией двух волн для различных комбинаций волновых и азимутальных чисел. Несложно видеть, что при достаточно больших амплитудах волн спонтанное дробление струи на отдельные капли будет иметь полидисперсный характер, что и отмечается в экспериментах [2,10–12].

Интересно отметить, что нелинейные осцилляции струи возникают не в окрестности равновесной цилиндрической формы, а в окрестности струи с формой, зависящей от вида начальной деформации

$$r(z,\varphi)=1-0.25\varepsilon^2\left[\frac{1}{2}(h_1^2+h_l^2)-h_1^2a_1^2\cos 2m_1\varphi\right.$$
$$\left.-h_l^2a_l^2\cos 2m_l\varphi\right].$$

Такой же феномен ранее был обнаружен для нелинейных осцилляций капель [15,16].



Формы поверхности нелинейно-осциллирующих струй при докритической в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду значении поверхностной его плотности, рассчитанные по прошествии четверти периода волны с минимальным волновым числом при $\varepsilon = 0.2$, $\chi = 0.25$, $h_1 = h_2 = 0.5$: *a*) $k_1 = 1.25$, $k_2 = 2.5$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0$; *b*) $k_1 = 1.25$, $k_2 = 3.75$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0$; *c*) $k_1 = 1.25$, $k_2 = 2.5$, $m_1 = 0$, $m_2 = 1$; *d*) $k_1 = 1.25$, $k_2 = 3.75$, $m_1 = 0$, $m_2 = 1$; *e*) $k_1 = 1.25$, $k_2 = 2.5$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$; *f*) $k_1 = 1.25$, $k_2 = 3.75$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$; *g*) $k_1 = 1.25$, $k_2 = 2.5$, $m_1 = 2$, $m_2 = 2$; *h*) $k_1 = 1.25$, $k_2 = 3.75$, $m_1 = 3$, $m_2 = 3$.

Заключение

При исследовании закономерностей спонтанного распада струй жидкости, выбрасываемых при реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости, неиболее естественной является ситуация, когда поверхность струи подвержена деформации, обусловленной суперпозицией не одиночной волны, но набора волн, различающихся как волновыми, так и азимутальными числами. Проведенное нелинейное аналитическое исследование осцилляций таких струй указывает на полидисперсный характер спонтанного распада неустойчивой струи на отдельные капли.

Приложение A

Выражения для коэффициентов в граничных и дополнительных условиях (22)−(26).

$$X_1^{nl}=\omega_{mn}\big[-1+(k_n^2+m_n^2+k_nk_l+m_nm_l)/G_{mn}(k_n)\big];$$

$$X_2^{nl}=\omega_{mn}\big[-1+(k_n^2+m_n^2+k_nk_l-m_nm_l)/G_{mn}(k_n)\big];$$

$$X_3^{nl}=\omega_{mn}\big[-1+(k_n^2+m_n^2-k_nk_l-m_nm_l)/G_{mn}(k_n)\big];$$

$$X_4^{nl}=\omega_{mn}\big[-1+(k_n^2+m_n^2-k_nk_l+m_nm_l)/G_{mn}(k_n)\big];$$

$$Y_1^{nl}=P_n+0.5\big\{[(k_nk_l-m_nm_l-\omega_{mn}\omega_{ml})$$

$$-wH_{mn}(k_n)H_{ml}(k_l)]+(\mu_{nl}+w)(k_nk_l+m_nm_l)\big\};$$

$$Y_2^{nl}=P_n+0.5\big\{[(k_nk_l+m_nm_l-\omega_{mn}\omega_{ml})$$

$$-wH_{mn}(k_n)H_{ml}(k_l)]+(\mu_{nl}+w)(k_nk_l-m_nm_l)\big\};$$

$$Y_3^{nl}=P_n+0.5\big\{[(k_nk_l-m_nm_l-\omega_{mn}\omega_{ml})$$

$$-wH_{mn}(k_n)H_{ml}(k_l)]+(\mu_{nl}-w)(k_nk_l+m_nm_l)\big\};$$

$$Y_4^{nl}=P_n+0.5\big\{[(k_nk_l-m_nm_l-\omega_{mn}\omega_{ml})$$

$$-wH_{mn}(k_n)H_{ml}(k_l)]+(\mu_{nl}+w)(k_nk_l-m_nm_l)\big\};$$

$$P_n=1-1.5w-\big(2m_n^2+\omega_{mn}^2\big)+w\big(k_n^2+m_n^2-2H_{mn}(k_n)\big);$$

$$L_n=-2\pi\chi[1+2H_{mn}(k_n)];$$

$$\mu_{nl}=[\omega_{mn}\omega_{ml}/G_{mn}(k_n)G_{ml}(k_l)]+w.$$

Приложение B

Обозначения, использованные при записи решения второго порядка малости.

$$\alpha_{nl}^{(1)}=N_1/M_1;$$

$$M_1\equiv\big(\omega_{mn}(k_n)+\omega_{ml}(k_l)\big)^2-\omega_{(mn+ml)}^2(k_n+k_l);$$

$$N_1\equiv G_{(mn+ml)}(k_n+k_l)\big[Y_1^{nl}+H_{(mn+ml)}(k_n+k_l)\chi L_n\big]$$

$$+(\omega_{mn}+\omega_{ml})X_1^{nl};$$

$$\alpha_{nl}^{(2)}=N_2/M_2,\quad n\neq l;$$

$$M_2\equiv\big(\omega_{mn}(k_n)-\omega_{ml}(k_l)\big)^2-\omega_{(mn+ml)}^2(|k_n-k_l|);$$

$$N_2\equiv G_{(mn+ml)}(|k_n-k_l|)\big[Y_4^{nl}+H_{(mn+ml)}(|k_n-k_l|)\chi L_n\big]$$

$$+(\omega_{mn}-\omega_{ml})X_4^{nl};$$

$$a_n^{(2)}\equiv\frac{Y_4^{mn}-2m_n\chi L_n}{(1-2m_n)(1+2m_n-w)};\quad \alpha_{nl}^{(3)}\equiv N_3/M_3;$$

$$M_3\equiv\big(\omega_{mn}(k_n)+\omega_{ml}(k_l)\big)^2-\omega_{(mn-ml)}^2(k_n+k_l);$$

$$N_3\equiv G_{(mn-ml)}(k_n+k_l)\big[Y_2^{nl}+H_{(mn-ml)}(k_n+k_l)\chi L_n\big]$$

$$+(\omega_{mn}+\omega_{ml})X_2^{nl};$$

$$\alpha_{nl}^{(4)}=N_4/M_4,\quad n\neq l;$$

$$M_4\equiv\big(\omega_{mn}(k_n)-\omega_{ml}(k_l)\big)^2-\omega_{(mn-ml)}^2(|k_n-k_l|);$$

$$N_4\equiv G_{(mn-ml)}(|k_n-k_l|)\big[Y_3^{nl}+H_{(mn-ml)}(|k_n-k_l|)\chi L_n\big]$$

$$+(\omega_{mn}-\omega_{ml})X_3^{nl};$$

$$b_n^0\equiv Y_3^{nn}+0.5[1-w(1+k_n^2+m_n^2)];\quad \beta_{nl}^{(1)}\equiv R_1/Q_1;$$

$$Q_1\equiv(k_n+k_l)I'_{(mn+ml)}(k_n+k_l)\big[\big(\omega_{mn}(k_n)+\omega_{ml}(k_l)\big)^2$$

$$-\omega_{(mn+ml)}^2(k_n+k_l)\big];$$

$$R_1\equiv(\omega_{mn}+\omega_{ml})G_{(mn+ml)}(k_n+k_l)$$

$$\times\big[Y_1^{nl}+H_{(mn+ml)}(k_n+k_l)\chi L_n\big]+\omega_{(mn+ml)}^2(k_n+k_l)X_1^{nl};$$

$$\beta_{nl}^{(2)}\equiv R_2/Q_2,\ n\neq l;$$

$$Q_2\equiv(|k_n-k_l|)I'_{(mn+ml)}(|k_n-k_l|)\big[\big(\omega_{mn}(k_n)-\omega_{ml}(k_l)\big)^2$$

$$-\omega_{(mn+ml)}^2(|k_n-k_l|)\big];$$

$$R_2\equiv(\omega_{mn}-\omega_{ml})G_{(mn+ml)}(|k_n-k_l|)$$

$$\times\big[Y_4^{nl}+H_{(mn+ml)}(|k_n-k_l|)\chi L_n\big]+\omega_{(mn+ml)}^2(|k_n-k_l|)X_4^{nl};$$

$$b_n^{(2)}\equiv X_1^{nn}/2m_n,\quad \beta_{nl}^{(3)}\equiv R_3/Q_3;$$

$$Q_3\equiv(k_n+k_l)I'_{(mn-ml)}(k_n+k_l)\big[\big(\omega_{mn}(k_n)+\omega_{ml}(k_l)\big)^2$$

$$-\omega_{(mn-ml)}^2(k_n+k_l)\big];$$

$$R_3\equiv(\omega_{mn}+\omega_{ml})G_{(mn-ml)}(k_n+k_l)$$

$$\times\big[Y_2^{nl}+H_{(mn-ml)}(k_n+k_l)\chi L_n\big]+\omega_{(mn-ml)}^2(k_n+k_l)X_2^{nl};$$

$$\beta_{nl}^{(4)}\equiv R_4/Q_4,\ n\neq l;$$

$$Q_4\equiv(|k_n-k_l|)I'_{(mn-ml)}(|k_n-k_l|)\big[\big(\omega_{mn}(k_n)-\omega_{ml}(k_l)\big)^2$$

$$-\omega_{(mn-ml)}^2(|k_n-k_l|)\big];$$

$$R_4\equiv(\omega_{mn}-\omega_{ml})G_{(mn-ml)}(|k_n-k_l|)$$

$$\times\big[Y_3^{nl}+H_{(mn-ml)}(|k_n-k_l|)\chi L_n\big]+\omega_{(mn-ml)}^2(|k_n-k_l|)X_3^{nl};$$

$$d_{nl}^{(1)} \equiv W_1/S_1;$$

$$S_1 \equiv K_{(mn+ml)}(k_n+k_l)\left[\left(\omega_{mn}(k_n)+\omega_{ml}(k_l)\right)^2 - \omega^2_{(mn+ml)}(k_n+k_l)\right];$$

$$W_1 = 4\pi\left[(\omega_{mn}+\omega_{ml})X_1^{nl} + G_{(mn+ml)}(k_n+k_l)Y_1^{nl}\right] + \left[(\omega_{mn}+\omega_{ml})^2 + G_{(mn+ml)}(k_n+k_l) \times \left(1-w-(k_n+k_l)^2-(m_n+m_l)^2\right)\right]\chi L_n;$$

$$d_{nl}^{(2)} \equiv W_2/S_2, \quad n \neq l;$$

$$S_2 \equiv K_{(mn+ml)}(|k_n-k_l|)\left[\left(\omega_{mn}(k_n)-\omega_{ml}(k_l)\right)^2 - \omega^2_{(mn+ml)}(|k_n-k_l|)\right];$$

$$W_2 = 4\pi\left[(\omega_{mn}-\omega_{ml})X_4^{nl} + G_{(mn+ml)}(|k_n-k_l|)Y_4^{nl}\right] + \left[(\omega_{mn}-\omega_{ml})^2 + G_{(mn+ml)}(|k_n-k_l|) \times \left(1-w-(k_n-k_l)^2-(m_n+m_l)^2\right)\right]\chi L_n;$$

$$d_{nl}^{(2)} \equiv \frac{4\pi Y_4^{nn} + (1-4m_n^2-w)\chi L_n}{(1-2m_n)(1+2m_n-w)}; \quad d_{nl}^{(3)} \equiv W_3/S_3;$$

$$S_3 \equiv K_{(mn-ml)}(k_n+k_l)\left[\left(\omega_{mn}(k_n)+\omega_{ml}(k_l)\right)^2 - \omega^2_{(mn-ml)}(k_n+k_l)\right];$$

$$W_3 = 4\pi\left[(\omega_{mn}+\omega_{ml})X_2^{nl} + G_{(mn-ml)}(k_n+k_l)Y_2^{nl}\right] + \left[(\omega_{mn}+\omega_{ml})^2 + G_{(mn-ml)}(k_n+k_l) \times \left(1-w-(k_n+k_l)^2-(m_n-m_l)^2\right)\right]\chi L_n;$$

$$d_{nl}^{(2)} \equiv W_4/S_4, \quad n \neq l;$$

$$S_4 \equiv K_{(mn-ml)}(|k_n-k_l|)\left[\left(\omega_{mn}(k_n)-\omega_{ml}(k_l)\right)^2 - \omega^2_{(mn-ml)}(|k_n-k_l|)\right];$$

$$W_4 = 4\pi\left[(\omega_{mn}-\omega_{ml})X_3^{nl} + G_{(mn-ml)}(|k_n-k_l|)Y_3^{nl}\right] + \left[(\omega_{mn}-\omega_{ml})^2 + G_{(mn-ml)}(|k_n-k_l|) \times \left(1-w-(k_n-k_l)^2-(m_n-m_l)^2\right)\right]\chi L_n.$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 03-01-00760 и 05-08-01147-а.

Список литературы

[1] *Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К.* и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение / Под ред. В.А. Григорьева. М. Энергоатомиздат, 1991. 336 с.

[2] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* // Классификация режимов работы электрогидродинамических источников жидко-капельных пучков (обзор). Препринт ИМ РАН № 25. Ярославль. 1993. 118 с.

[3] *Нагорный В.С.* // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2. С. 25–31.

[4] *Нагорный В.С.* // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 3. С. 34–42.

[5] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* // ЭОМ. 2003. № 1. С. 38–43.

[6] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 5–12.

[7] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 22–30.

[8] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.

[9] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В.* // ЭОМ. 2005. № 1. С. 42–49.

[10] *Cloupeau M., Prunet Foch B.* // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.

[11] *Fernandes De La Mora J., Loscertales I.G.* // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 260. P. 155–184.

[12] *Gamero-Castano M., Hruby V.* // J Fluid Mech. 2002. Vol. 459. P. 245–276.

[13] *Nayfeh F.H.* // Phys. Fluids. 1970. N 4. P. 841–847.

[14] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–46.

[15] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 45–52.

[16] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.