

Влияние магнитного поля с винтовыми силовыми линиями на капиллярную неустойчивость конфигурации магнитных жидкостей с цилиндрической поверхностью раздела, окружающей токнесущий проводник

© В.М. Коровин

Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
119192 Москва, Россия
e-mail: korovin@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 23 мая 2005 г.)

В линейной постановке рассмотрена осесимметричная задача о капиллярной неустойчивости конфигурации, образованной несмешивающимися магнитными жидкостями одинаковой плотности, окружающими длинный токнесущий проводник, при наличии внешнего продольного магнитного поля. Получено и проанализировано дисперсионное уравнение. Построены кривые нейтральной устойчивости. Исследовано влияние магнитного поля и скачка магнитных проницаемостей граничащих между собой жидкостей на характерный размер капель, образующихся в результате капиллярного распада сплошного цилиндрического слоя магнитной жидкости.

PACS: 47.65.-d, 75.50.Mm

Введение

Начиная с классических работ по исследованию капиллярной неустойчивости цилиндрической струи идеальной жидкости и тонкой нити сильновязкой жидкости в газовой среде, выполненных во второй половине XIX в. (см., например, библиографию в [1]), задача о капиллярной неустойчивости и распаде конфигураций несмешивающихся жидкостей с цилиндрическими поверхностями раздела ввиду прикладной значимости привлекает большое внимание как в экспериментальном, так и в теоретическом плане.

Форма поверхности раздела граничащих между собой покоящихся жидкостей, подверженных воздействию лишь силы тяжести и капиллярных сил, при любом отношении плотностей, очевидно, отлична от цилиндрической. В экспериментах с обычными (не взаимодействующими с магнитным полем) жидкостями физическая реализация существующих длительное время жидких конфигураций с приближенно цилиндрическими межфазными границами достигается лишь при наличии движения одной из жидкостей относительно другой несмешивающейся жидкости [2]. Для проведения подобных экспериментов требуется достаточно сложная аппаратура [3].

При помещении несмешивающихся магнитных жидкостей в неоднородное магнитное поле ситуация коренным образом изменяется ввиду возникновения объемной магнитной силы, плотность которой зависит от координат точки наблюдения. С целью исключения влияния силы тяжести на форму поверхности раздела в экспериментах [4,5] были использованы магнитная и немагнитная жидкости одинаковой плотности. Таким путем удается создать статическую строго цилиндрическую поверхность раздела между двумя несмешивающимися жидко-

стями одинаковой плотности, симметрично расположенными относительно длинного цилиндрического токнесущего проводника, служащего осью конфигурации. При этом необходимо, чтобы магнитная проницаемость слоя внутренней жидкости, покрывающей проводник, была больше проницаемости внешней жидкости, а сила проходящего по проводнику электрического тока превышала некоторое критическое значение.

Физическим фактором, формирующим устойчивый цилиндрический слой магнитной жидкости, является направленная к оси симметрии объемная магнитная сила, порождаемая собственным магнитным полем проходящего по проводнику электрического тока.

При теоретическом анализе влияния собственного магнитного поля с круговыми силовыми линиями на капиллярную неустойчивость цилиндрического слоя покоящейся магнитной жидкости получила распространение [5–7] упрощенная модель экспериментально исследованной двухжидкостной конфигурации [4,5], в которой внешняя жидкость заменяется невесомой средой (газом) и предполагается отсутствие силы тяжести. Очевидно, что в такой постановке пренебрегается силой инерции, действующей на жидкие частицы внешней среды в процессе развития возмущений в двухжидкостной системе.

При более сложной геометрии магнитного поля, когда наряду с собственным полем проходящего по проводнику электрического тока имеется также внешнее продольное поле (силовые линии оказываются винтовыми), гидродинамическая устойчивость цилиндрического слоя невязкой магнитной жидкости, обтекаемого потоком газа в осевом направлении, была исследована [7,8] в предположении, что сила тяжести отсутствует.

В отличие от имеющихся работ в данной статье исследовано влияние магнитного поля с винтовыми силовыми линиями на капиллярную неустойчивость конфигурации,

образованной двумя магнитными жидкостями, имеющими цилиндрическую поверхность раздела. Проведен анализ воздействия различных факторов на характерный размер капель, формирующихся при капиллярном распадае сплошного цилиндрического слоя, первоначально покрывающего токонесущий проводник.

Равновесное состояние жидкой конфигурации с цилиндрической поверхностью раздела

Пусть в достаточно большом объеме покоящейся магнитной жидкости, имеющей плотность ρ и магнитную проницаемость μ_2 , находится цилиндрический слой несмешивающейся жидкости с той же плотностью и магнитной проницаемостью $\mu_1 > \mu_2$, сплошь покрывающий горизонтально расположенный прямолинейный проводник из немагнитизирующегося материала. Рассматриваемый слой жидкости удерживается на поверхности проводника объемными магнитными силами, создаваемыми магнитным полем, индуцируемым протекающим по проводнику постоянным электрическим током силы I .

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z , ось z которой является осью проводника и имеет одинаковое направление с током, а азимутальный угол θ будем отсчитывать от направления силы тяжести $\rho \mathbf{g}$. Пусть $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_z$ — единичные векторы вдоль соответствующих координатных линий, а c — радиус проводника. Обозначим через d толщину рассматриваемого цилиндрического жидкого слоя. При этом поверхность раздела жидкостей описывается уравнением $r = a$, где $a = c + d$. Физические параметры жидкостей в областях $c < r < a$, $r < a$ с цилиндрическими границами $r = c$ и $r = a$ будем отмечать соответственно индексами 1 и 2; индексом 3 отметим магнитное поле внутри токонесущего проводника (в области $0 \leq r < c$).

Наряду с собственным магнитным полем проходящего по проводнику электрического тока рассматриваемая конфигурация жидкостей подвергается воздействию однородного продольного поля. Таким образом, магнитные поля в жидкостях \mathbf{H}^0 и проводнике \mathbf{H}_3^0 определяются выражениями

$$\mathbf{H}^0 = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\theta + H_z^0 \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{H}_3^0 = \frac{I}{2\pi c^2} \mathbf{a}_\theta + H_z^0 \mathbf{a}_z. \quad (1)$$

Здесь и всюду далее верхний индекс 0 означает, что значение рассматриваемой величины относится к случаю строго цилиндрической поверхности раздела жидкостей.

Предполагается, что в рассматриваемой двухжидкостной системе максимальный перепад температуры между различными точками мал по сравнению с характерной температурой, так что зависимость μ_1, μ_2 от температуры можно пренебречь. В общем случае магнитная проницаемость жидкостей зависит от модуля вектора магнитного поля \mathbf{H} , ввиду чего зависимость вектора

намагниченности \mathbf{M}_j жидкостей от H нелинейна

$$\mathbf{M}_j = \chi_j \mathbf{H}, \quad \chi_j = \mu_{rj}(H) - 1, \quad \mu_{rj} = \frac{\mu_j(H)}{\mu_0}, \quad j = 1, 2.$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м — магнитная постоянная.

Независимо от формы поверхности раздела жидкостей плотность объемных магнитных сил \mathbf{F}_j вычисляется по формуле $\mathbf{F}_j = \mu_0 M_j \text{grad } H$. Если магнитные восприимчивости жидкостей χ_j зависят только от модуля вектора магнитного поля, то $\text{rot } \mathbf{F}_j = 0$, т.е. магнитные силы потенциальны: $\mathbf{F}_j = \text{grad } U_j$.

Нетрудно показать, что в переменных точках наблюдения $A_j(r, \theta, z)$, $j = 1, 2$, принадлежащих областям, занимаемым соответствующими жидкостями, в любой момент времени

$$U_j(A_j, t) = \mu_0 \int_{H(A_j^*, t)}^{H(A_j, t)} M_j(H) dH, \quad j = 1, 2,$$

где A_j^* — произвольно выбранные фиксированные точки в рассматриваемых областях.

При этом в состоянии гидростатического равновесия жидкостей со строго цилиндрической поверхностью раздела имеем

$$U_j^0(r) = \mu_0 \int_{H^0(a)}^{H^0(r)} M_j(H) dH, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Распределение давлений $P_1^0(r, \theta)$, $P_2^0(r, \theta)$ в соответствующих областях описывается уравнениями

$$\frac{\partial P_j^0}{\partial r} = \frac{\partial U_j^0}{\partial r} + \rho g \cos \theta, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial P_j^0}{\partial \theta} = -\rho g \sin \theta, \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Учитывая, что во внешней жидкости давление определено с точностью до константы и что при переходе через цилиндрическую поверхность раздела жидкостей $r = a$ давление испытывает капиллярный скачок

$$P_1^0(a, \theta) - P_2^0(a, \theta) = \frac{\alpha}{a},$$

из уравнений (3) находим

$$P_1^0(r, \theta) = \frac{\alpha}{a} + U_1^0(r) + \rho g r \cos \theta;$$

$$P_2^0(r, \theta) = U_2^0(r) + \rho g r \cos \theta,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

Для используемых на практике магнитных жидкостей при небольших значениях напряженности магнитного поля начальные участки кривых намагниченности $M_j = M_j(H)$ с требуемой в прикладных исследованиях точностью аппроксимируются линейной зависимостью. Ввиду этого широкое применение получила модель линейно намагничивающейся жидкости [6], в рамках которой магнитная восприимчивость χ_j полагается не зависящей от магнитного поля. Для такой модели из (2) находим

$$U_j^0(r) = \frac{\mu_0}{2} [M_{j\theta}^0(r) H_\theta^0(r) - M_{j\theta}^0(a) H_\theta^0(a)], \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

Далее будет исследована устойчивость жидкой конфигурации с цилиндрическими границами $r = c$, $r = a$, в которой распределения магнитного поля, давления и потенциала магнитных сил описываются формулами (1), (4), (5).

Постановка задачи для малых возмущений

Сформулируем в линейной постановке задачу об эволюции малых осесимметричных возмущений гидростатического состояния (1), (4), (5) рассматриваемой системы. Пусть уравнение $r = a + \xi(z, t)$, где $|\xi| \ll a$, описывает форму возмущенной поверхности раздела, а выражения

$$P_j(r, \theta, z, t) = P_j^0(r, \theta) + p_j(r, z, t);$$

$$\mathbf{H}_j(r, z, t) = \mathbf{H}_j^0(r) + \mathbf{h}_j(r, z, t);$$

$$\mathbf{H}_3(r, z, t) = \mathbf{H}_3^0(r) + \mathbf{h}_3(r, z, t);$$

$$U_j(r, z, t) = U_j^0(r) + u_j(r, z, t)$$

представляют возмущенные давления, магнитные поля и потенциалы магнитных сил в момент времени t . Здесь и всюду далее $j = 1, 2$, причем, как и прежде, $j = 1$ соответствует внутренней, а $j = 2$ — внешней жидкости.

В рассматриваемой задаче распределение плотности тока (создающего азимутальное магнитное поле) фиксировано, а возмущения \mathbf{h}_l , $l = 1, 2, 3$ порождаются за счет деформации поверхности раздела жидкостей. Ввиду этого векторы \mathbf{h}_l потенциальны: $\mathbf{h}_l = \text{grad } \varphi_l(r, z, t)$, так что из уравнений магнитостатики следует

$$\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что с точностью до малых первого порядка

$$H_j - H_0 = \frac{H_z^0}{H^0} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, \quad U_j - U_j^0 = \mu_0 M_{jz}^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}. \quad (7)$$

На поверхностях токонесущего проводника и раздела жидкостей условия непрерывности касательной составляющей возмущенного магнитного поля и нормальной составляющей возмущенной индукции в линейном приближении приводят к следующим условиям сопряжения потенциалов возмущений магнитных полей в смежных областях:

$$\text{при } r = c \quad \varphi_1 = \varphi_3, \quad \mu_{r1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r};$$

$$\text{при } r = a \quad \varphi_1 = \varphi_2,$$

$$\mu_{r1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \mu_{r2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = (M_{1z}^0 - M_{2z}^0) \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (8)$$

где $\mu_{rj} = \text{const}$ — относительная магнитная проницаемость соответствующей жидкости.

Поскольку действующие на жидкости внешние силы — гравитационная и магнитная — потенциальны, а движение рассматриваемых невязких жидкостей возникает из состояния покоя, то поля скоростей $\mathbf{v}_j(r, z, t)$ потенциальны, т. е. $\mathbf{v}_j = \text{grad } \psi_j(r, z, t)$ и исходные (нелинейные) уравнения Эйлера допускают первый интеграл — интеграл Коши–Лагранжа [9]:

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \psi_j)^2 + P_j - \rho g r \cos \theta - U_j = f_j(t). \quad (9)$$

Фигурирующие в (9) произвольные функции времени $f_j(t)$ выберем такими, чтобы при предельном переходе в (9) к гидростатическому состоянию выражения для давлений совпадали с формулами (4). Для выполнения этого условия требуется положить $f_1(t) = \alpha/a$, $f_2(t) = 0$. После линеаризации выражений (9) с учетом (7) получим

$$p_j(r, z, t) = -\rho \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + \mu_0 M_z^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, \quad (10)$$

Для рассматриваемых несжимаемых жидкостей из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z^2} = 0. \quad (11)$$

На поверхности проводника выполняется условие непроницаемости для окружающей его жидкости:

$$\text{при } r = c \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0. \quad (12)$$

В линеаризованной постановке динамическое, с учетом (4), (5), и кинематические условия на поверхности раздела жидкостей записываются следующим образом:

$$\text{при } r = a \quad p_2 - p_1 = \frac{\mu_0 \xi}{a} H_\theta^0 (M_{2\theta}^0 - M_{1\theta}^0) + \alpha \left(\frac{\xi}{a^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right); \quad (13)$$

$$\text{при } r = a \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \psi_2}{\partial z}. \quad (14)$$

С использованием линеаризованной формы записи интеграла Коши–Лагранжа (10) динамическое условие (13) принимает вид

$$\text{при } r = a \quad \rho \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(M_{1z}^0 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - M_{2z}^0 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) - \frac{\mu_0 \xi}{a} H_\theta^0 (M_{1\theta}^0 - M_{2\theta}^0) + \alpha \left(\frac{\xi}{a^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right). \quad (15)$$

Первое слагаемое в правой части (15) представляет магнитный скачок давления [7], возникающий при деформации цилиндрической поверхности раздела жидкостей

с неравными продольными компонентами намагниченности, тогда как второе слагаемое представляет скачок возмущений давления, вызываемый возмущением формы поверхности раздела при ее радиальном перемещении в неподвергающемся изменению градиентном магнитном поле, индуцируемом протекающим по проводнику электрическим током. Третье слагаемое в правой части (15) описывает возмущение поверхностного давления [10] за счет осесимметричной деформации цилиндрической поверхности несмещающихся магнитных жидкостей.

Вдали от поверхности раздела как движение жидкости, так и возмущение магнитного поля, естественно, исчезают

$$\text{при } \frac{r}{a} \rightarrow \infty \quad \text{grad } \psi_2 \rightarrow 0, \quad \text{grad } \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (16)$$

Далее рассматривается система, состоящая из уравнений Лапласа (6), (11), и исследуется поведение с ростом времени ее решения, удовлетворяющего краевым условиям (8), (12), (14), (15) и условиям на бесконечности (16).

Дисперсионное соотношение

В рамках задачи (6), (8), (11), (12), (14)–(16) для анализа поведения функции $\xi(z, t)$ с ростом времени воспользуемся методом преобразования Фурье [11]. Реализация этого метода заключается в представлении (с использованием оператора обратного преобразования Фурье) решения задачи в виде суперпозиции частных решений (нормальных мод), в которых пространственные переменные r, z и время t разделены и зависимость от z, t выбрана в виде экспоненциального сомножителя

$$\xi_0 \exp\{i[kz - \omega(k)t]\}, \quad \varphi_l(r) \exp\{i[kz - \omega(k)t]\};$$

$$\psi_j(r) \exp\{i[kz - \omega(k)t]\}, \quad j = 1, 2; \quad l = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Здесь i — мнимая единица, ξ_0 — константа (фурье-образ функции $\xi(z, t)$, рассматриваемой в начальный момент времени $t = 0$), a, k — вещественный параметр (волновое число).

Ключевым моментом при реализации метода является нахождение дисперсионного соотношения $D(\omega, k) = 0$, позволяющего вычислить фигурирующую в частных решениях вида (17) функцию $\omega(k)$. В общем случае эта функция оказывается многозначной. Помимо переменных ω, k в дисперсионное соотношение в качестве параметров входят также безразмерные критерии подобия, характеризующие рассматриваемое физическое явление.

Данный метод неприменим в тех случаях, когда не существует дисперсионного соотношения, например, если для фиксированного k получаемая в результате решения задачи функция $\omega(k)$ не ограничена.

После нахождения $\omega(k)$ поведение нормальных мод при $t \rightarrow \infty$ и любом k определяется знаком $\text{Im } \omega$: если хотя бы одна из ветвей многозначной функции $\omega(k)$

имеет $\text{Im } \omega > 0$, то начальные возмущения с ростом времени усиливаются, тогда как при $\text{Im } \omega < 0$ возмущения затухают; в случае же $\text{Re } \omega \neq 0, \text{Im } \omega = 0$ реализуется волновое движение с постоянной амплитудой, т. е. имеет место нейтральная устойчивость.

Информация о поведении каждой из нормальных мод, получаемая с помощью дисперсионного соотношения, позволяет сделать вывод об устойчивости (или неустойчивости) решения задачи при заданных значениях безразмерных критериев подобия.

С целью нахождения неизвестных функций $\varphi_l(r), \psi_j(r)$ подставим представления (17) в уравнения Лапласа (6), (11). В результате приходим к системе из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 \varphi_l}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_l}{dr} - k^2 \varphi_l = 0, \quad l = 1, 2, 3;$$

$$\frac{d^2 \psi_j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_j}{dr} - k^2 \psi_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (18)$$

Аналогичным путем условия сопряжения искомых функций на границах раздела сред (8), (14), (15) приводятся к виду

$$\text{при } r = c \quad \varphi_1 = \varphi_3, \quad \mu_{r1} \frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{d\varphi_3}{dr}, \quad \frac{d\psi_1}{dr} = 0; \quad (19)$$

$$\text{при } r = a \quad \varphi_1 = \varphi_2,$$

$$\mu_{r1} \frac{d\varphi_1}{dr} - \mu_{r2} \frac{d\varphi_2}{dr} = ik\xi_0(M_{1z}^0 - M_{2z}^0);$$

$$i\omega\xi_0 + \frac{d\psi_1}{dr} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dr} = \frac{d\psi_2}{dr};$$

$$i\rho\omega(\psi_2 - \psi_1) = ik\mu_0(M_{1z}^0\varphi_1 - M_{2z}^0\varphi_2)$$

$$+ \xi_0 \left\{ \frac{\mu_0}{a} H_\theta^0(M_{2\theta}^0 - M_{1\theta}^0) + \frac{\alpha}{a^2} [1 - (ka)^2] \right\}. \quad (20)$$

Решения уравнений (18), имеющие ограниченные при $r = 0, r \rightarrow \infty$ производные, записываются следующим образом:

$$\varphi_1 = A_1 I_0(kr) + A_2 K_0(kr), \quad \varphi_2 = A_3 K_0(kr), \quad \varphi_3 = A_4 I_0(kr);$$

$$\psi_1 = C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr), \quad \psi_2 = C_3 K_0(kr), \quad (21)$$

где $I_0(kr), K_0(kr)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [12], а $A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2, C_3$ — произвольные константы.

По смыслу формулировки рассматриваемой задачи решения (21) должны удовлетворять краевым условиям (19), (20). При подстановке выражений (21) в (19), (20) приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно ξ_0 и перечисленных выше констант

$$I_0(x_1)A_1 + K_0(x_1)A_2 - I_0(x_1)A_4 = 0;$$

$$\mu_{r1} I_1(x_1)A_1 - \mu_{r1} K_1(x_1)A_2 - I_1(x_1)A_4 = 0;$$

$$\begin{aligned}
I_1(x_1)C_1 - K_1(x_1)C_2 &= 0; \\
I_0(x)A_1 + K_0(x)A_2 - K_0(x)A_3 &= 0; \\
\mu_{r1}I_1(x)A_1 - \mu_{r1}K_1(x)A_2 + \mu_{r2}K_1(x)A_3 - i\xi_0(M_{1z}^0 - M_{2z}^0) &= 0; \\
\kappa I_1(x)C_1 - \kappa K_1(x)c_2 + i\omega a \xi_0 &= 0; \\
I_1(x)C_1 - K_1(x)C_2 + K_1(x)C_3 &= 0; \\
i\chi\mu_0 M_{1z}^0 I_0(x)A_1 + i\chi\mu_0 M_{1z}^0 K_0(x)A_2 - i\chi\mu_0 M_{2z}^0 K_0(x)A_3 & \\
+ i\rho\omega a I_0(x_1)C_1 + i\rho\omega a K_0(x_1)C_2 - i\rho\omega a K_0(x_1)C_3 & \\
+ \xi_0 \left\{ \frac{\alpha}{a} (1 - x^2) - \mu_0 H_\theta^0 [M_{1\theta}^0(a) - M_{2\theta}^0(a)] \right\} &= 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

где $x = ka$, $x_1 = x(1 - \sigma)$, а $\sigma = d/a$ — относительная толщина невозмущенного слоя магнитной жидкости, покрывающего цилиндрический токнесущий проводник.

Условие существования нетривиального решения системы уравнений (22) — равенство нулю ее определителя — представляет искомое дисперсионное соотношение.

После проведения выкладок, связанных с вычислением определителя восьмого порядка, имеем

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{\alpha x^2}{\rho a^3} \frac{K_1(x)}{K_1(x_1)} \left[I(x)K_1(x_1) - I_1(x_1)K_1(x) \right] \\
&\times \left[Fi_\theta(\mu_{r1} - \mu_{r2}) - 1 + x^2 \right. \\
&\left. + Fi_z(\mu_{r1} - \mu_{r2})^2 \kappa q(x, \sigma, \mu_{r1}, \mu_{r2}) \right]; \\
q(x, \sigma, \mu_{r1}, \mu_{r2}) &= \frac{K_0(x) [Q_1 I_0(x) + Q_2 K_0(x)]}{Q_1 Q_3 - Q_2 Q_4}, \\
Q_1 &= \mu_{r1} I_0(x_1) K_1(x_1) + I_1(x_1) K_0(x_1), \\
Q_2 &= (\mu_{r1} - 1) I_0(x_1) I_1(x_1); \\
Q_3 &= \mu_{r1} I_1(x) K_0(x) + \mu_{r2} I_0(x) K_1(x), \\
Q_4 &= (\mu_{r1} - \mu_{r2}) K_0(x) K_1(x),
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$Fi_\theta = \frac{\mu_0 a}{\alpha} H_\theta^{02}(a), \quad Fi_z = \frac{\mu_0 a}{\alpha} H_z^{02}$$

соответственно факторы азимутального и продольного магнитного полей.

Из дисперсионного соотношения (23) следует, что в случае магнитного поля с винтовыми силовыми линиями характер временной эволюции моды с волновым числом k зависит от численной величины пяти безразмерных критериев подобия: μ_{r1} , μ_{r2} , σ , Fi_θ , Fi_z . При этом двузначная функция $\omega(k)$ принимает либо действительные, либо чисто мнимые значения. Отсутствие комплексных корней дисперсионного соотношения обусловлено пренебрежением вязкой диссипацией при постановке задачи.

В отсутствие продольной составляющей магнитного поля ($Fi_z = 0$) дисперсионное соотношение существенно упрощается и число безразмерных критериев сокращается до двух: относительной толщины слоя $\sigma = d/a$ и магнитного числа Бонда $Bo_m = Fi_\theta(\mu_{r1} - \mu_{r2})$, хорошо известного в теории капиллярного распада цилиндрического слоя магнитной жидкости в магнитном поле с круговыми силовыми линиями [6,7].

Таким образом, в случае магнитного поля с круговыми силовыми линиями совокупность эффектов, обусловленных намагничиванием жидкостей, характеризуется единой комбинацией Bo_m , составленной из безразмерных критериев Fi_θ , μ_{r1} , μ_{r2} , тогда как в случае поля с винтовыми силовыми линиями при анализе поведения мод необходима информация о численной величине каждого отдельно взятого критерия подобия Fi_θ , Fi_z , μ_{r1} , μ_{r2} .

Анализ капиллярной неустойчивости конфигурации с цилиндрической поверхностью раздела магнитной и немагнитной жидкостей

Учитывая монотонность модифицированных функций Бесселя $I(x)$, $K_1(x)$ и очевидное неравенство $x > x_1$, легко видеть, что знак правой части выражения (23) совпадает со знаком последнего множителя, заключенного в квадратные скобки. Ввиду этого в отсутствие магнитного поля ($Fi_\theta = 0$, $Fi_z = 0$) из (23) следует, что $\omega^2 < 0$ при $k < a^{-1}$, тогда как $\omega^2 > 0$ при $k > a^{-1}$. Как и следовало ожидать, это заключение совпадает с классическим результатом устойчивости цилиндрического столба идеальной жидкости, окруженного покоящимся газом [13], согласно которому неустойчивыми являются моды с длиной волны λ , превышающей периметр столба жидкости $2\pi a$.

В случае строго азимутального поля ($Fi_z = 0$) при выполнении условия $Fi_\theta > (\mu_{r1} - \mu_{r2})^{-1}$ из (23) следует $\omega^2 > 0$ для всех $k \geq 0$, т.е. оба корня дисперсионного соотношения действительны. Это означает, что возникшие в начальный момент возмущения нейтрально устойчивы и в дальнейшем не вызывают разрушения сплошности исходного цилиндрического слоя магнитной жидкости.

Если же $Fi_z = 0$, а $Fi_\theta < (\mu_{r1} - \mu_{r2})^{-1}$, то как видно из (23), корни чисто мнимые и для одного из них в некотором диапазоне изменения безразмерного волнового числа x выполняется условие $\text{Im } \omega > 0$. В результате амплитуды мод, соответствующих этому диапазону, возрастают с течением времени, что приводит к распаду сплошного цилиндрического слоя на отдельные капли, нанизанные, подобно бусинам, на токнесущий проводник [6,7].

В случае азимутального магнитного поля ($Fi_z = 0$) величина $Fi_\theta^* = (\mu_{r1} - \mu_{r2})^{-1}$ представляет критическое значение (при $Fi_\theta > Fi_\theta^*$ конфигурация с цилиндриче-

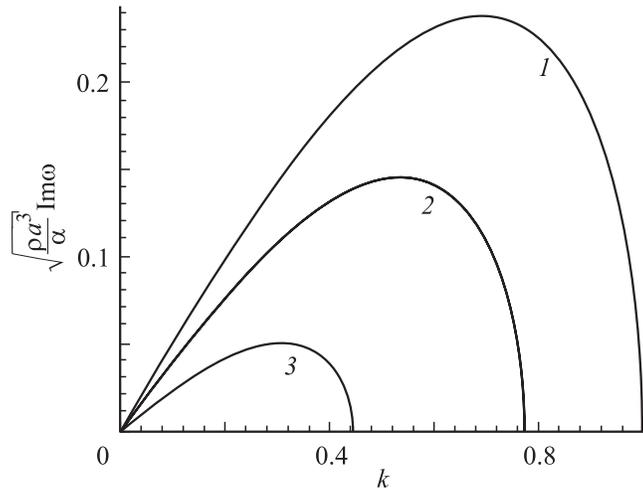


Рис. 1. Дисперсионные зависимости при $\sigma = 0.3$, $\mu_{r1} = 5$, $\mu_{r2} = 1$, $Fi_z = 0$ и различных Fi_θ : 1 — 0, 2 — 0.1, 3 — 0.2.

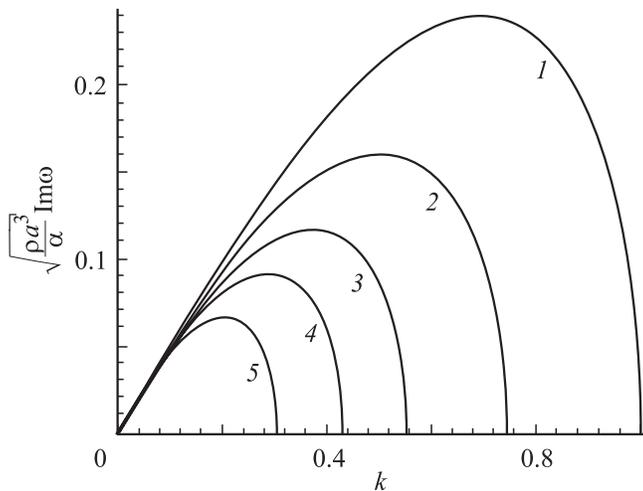


Рис. 2. Дисперсионные зависимости при $\sigma = 0.3$, $\mu_{r1} = 5$, $\mu_{r2} = 1$, $Fi_\theta = 0$ и различных Fi_z : 1 — 0, 2 — 0.1, 3 — 0.2, 4 — 0.3, 5 — 0.5.

ской поверхностью раздела устойчива), что, естественно, согласуется [6,7] с величиной критического магнитного числа Бонда $Bo_m = 1$.

В безразмерных переменных при фиксированных значениях μ_{r1} , μ_{r2} , σ и различных Fi_θ , Fi_z дисперсионные зависимости $\text{Im} \omega(k)$, относящиеся к диапазонам волновых чисел $0 \leq k \leq 1$, представлены на рис. 1, 2. Рис. 1 соответствует случаю азимутального магнитного поля ($Fi_\theta \geq 0$, $Fi_z = 0$), а рис. 2 — случаю продольного поля ($Fi_\theta = 0$, $Fi_z \geq 0$). При обращении к этим графикам следует иметь в виду, что для всех мод с волновыми числами $k > a^{-1}$ при любых $\mu_{r1} > \mu_{r2}$ выполняется условие устойчивости $\text{Im} \omega < 0$. На обоих рисунках кривые 1 представляют одну и ту же функцию, соответствующую случаю, когда магнитное поле отсутствует: $Fi_\theta = 0$, $Fi_z = 0$.

Из графиков, приведенных на рис. 1, 2, видно что для заданных Fi_θ , Fi_z и всех κ , лежащих правее точек пересечения $\kappa_c = \kappa_c(Fi_\theta)$, $\kappa_c = \kappa_c(Fi_z)$ рассматриваемых кривых (идентифицируемых заданием Fi_θ , Fi_z) с осью абсцисс, выполняется условие $\text{Im} \omega < 0$, а для κ , лежащих левее точек κ_c , имеем $\text{Im} \omega > 0$. Таким образом, моды, соответствующие безразмерным волновым числам $\kappa > \kappa_c$, устойчивы, а моды с $\kappa < \kappa_c$ — нет. Точки $\kappa = \kappa_c$ соответствуют пороговым значениям волнового числа.

Из рис. 2 следует, что продольное магнитное поле эффективно стабилизирует неустойчивые в отсутствие поля моды с волновыми числами, близкими к a^{-1} . Сравнение кривых на рис. 1 и 2 показывает, что при одинаковых условиях, определяемых заданием μ_{r1} , μ_{r2} , σ , по мере роста критериев Fi_θ , Fi_z (от нулевых значений) относительная роль азимутального магнитного поля в стабилизации всего спектра неустойчивых без поля мод увеличивается по сравнению с влиянием продольного поля.

Дисперсионное соотношение (23) приводит к следующей записи семейства кривых нейтральной устойчивости:

$$Fi_\theta = \frac{1 - \kappa^2}{\mu_{r1} - \mu_{r2}} - Fi_z (\mu_{r1} - \mu_{r2}) \kappa q(\kappa, \sigma, \mu_{r1}, \mu_{r2}). \quad (24)$$

На плоскости (κ, Fi_θ) вдоль этих кривых выполняется условие $\text{Im} \omega = 0$. По своей сути кривые нейтральной устойчивости являются границами, разделяющими полосу ($0 \leq \kappa \leq 1$, $Fi_\theta \geq 0$) на области устойчивости (в каждой точке которой $\text{Im} \omega < 0$) и неустойчивости (где $\text{Im} \omega > 0$).

При построении областей устойчивости и неустойчивости (рис. 3–5) более естественным является использование плоскости (Fi_θ, κ) , поскольку в условиях эксперимента Fi_θ — контролируемый параметр, тогда как в спектре возмущений имеются любые волновые числа.

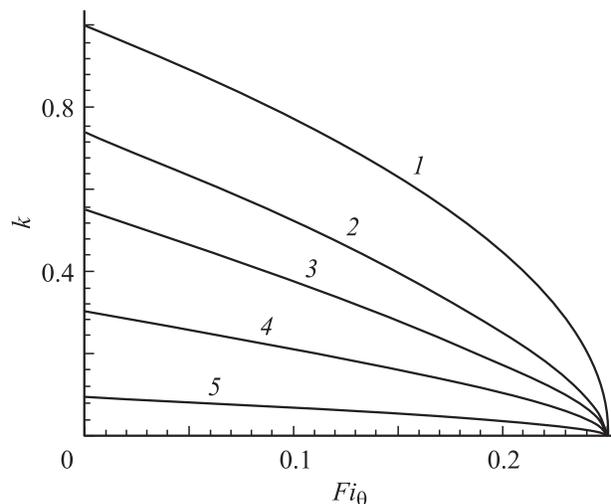


Рис. 3. Кривые нейтральной устойчивости при $\sigma = 0.5$, $\mu_{r1} = 5$, $\mu_{r2} = 1$ и различных Fi_z : 1 — 0, 2 — 0.1, 3 — 0.2, 4 — 0.5, 5 — 3.

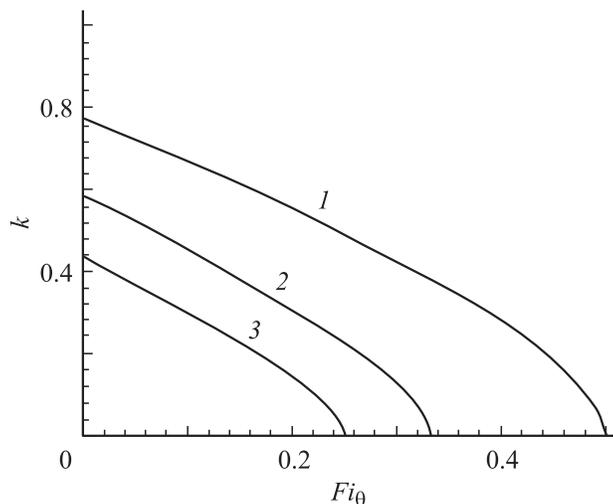


Рис. 4. Кривые нейтральной устойчивости при $\sigma = 0.3$, $Fi_z = 0.3$, $\mu_{r2} = 1$ и различных μ_{r1} : 1 — 3, 2 — 4, 3 — 5.

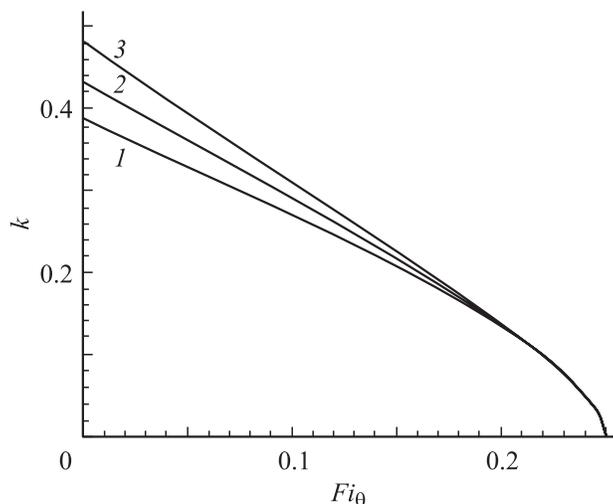


Рис. 5. Кривые нейтральной устойчивости при $\mu_{r1} = 5$, $\mu_{r2} = 1$, $Fi_z = 0.3$ и различных σ : 1 — 0.01, 2 — 0.3, 3 — 0.99.

Переход от плоскости (κ, Fi_θ) к плоскости (Fi_θ, κ) совершается путем обращения функции (24).

На рис. 3 области устойчивости расположены выше кривых нейтральной устойчивости, соответствующих заданным значениям критериев μ_{r1} , μ_{r2} , σ , Fi_z , а области неустойчивости — ниже этих кривых, так что одной из границ областей неустойчивости является интервал $0 \leq Fi_\theta < (\mu_{r1} - \mu_{r2})^{-1}$ оси абсцисс. Как видно из рис. 3, при любом фиксированном $0 < Fi_\theta < (\mu_{r1} - \mu_{r2})^{-1}$ с ростом Fi_z пороговое волновое число и область неустойчивости уменьшаются. Однако в отличие от случая увеличения строго азимутального магнитного поля при $0 < Fi_\theta < (\mu_{r1} - \mu_{r2})^{-1}$ путем увеличения продольной составляющей поля невозможно добиться стабилизации всех неустойчивых мод — длинноволновые моды, соответствующие на рис. 3 части узкой полоски над правой

полуосью абсцисс, в рамках рассматриваемой модели оказываются неустойчивыми при любых Fi_z .

Из рис. 4, на котором построены кривые нейтральной устойчивости при разной величине скачка магнитных проницаемостей $\mu_{r1} - \mu_{r2}$ граничащих между собой жидкостей, видно, что с увеличением скачка величина порогового волнового числа падает и, кроме того, существенно сокращается область неустойчивости.

Рис. 5 показывает влияние относительной толщины цилиндрического слоя σ на семейство кривых нейтральной устойчивости. Представленные на рис. 5 графики свидетельствуют, что для одной и той же пары жидкостей при неизменных $Fi_\theta < (\mu_{r1} - \mu_{r2})^{-1}$, Fi_z переход к более толстому слою вызывает увеличение порогового волнового числа κ_c . Следует также отметить, что с возрастанием Fi_θ кривые нейтральной устойчивости, соответствующие различным σ , сближаются между собой, так что вблизи прямой $Fi_\theta = (\mu_{r1} - \mu_{r2})$ величина κ_c не зависит от σ и при фиксированном Fi_z определяется лишь величиной Fi_θ .

Сравнение кривых нейтральной устойчивости, представленных на рис. 3–5, показывает, что как магнитное поле, так и скачок магнитных проницаемостей жидкостей оказывает гораздо более сильное влияние на пороговое волновое число, чем толщина слоя.

Рис. 6, 7 иллюстрируют влияние магнитного поля и скачка магнитных проницаемостей при переходе через поверхность раздела жидкостей на безразмерную длину волны λ_*/a наиболее быстро растущей моды (соответствующей волновым числам κ_* , при которых дисперсионные кривые на рис. 1, 2 имеют максимумы). При капиллярном распаде сплошного слоя магнитной жидкости фиксированной толщины именно эти моды определяют характерный размер образующихся капель. Представленные на рис. 6, 7 графики свидетельствуют, что увеличение каждой из величин Fi_θ , Fi_z , $\mu_{r1} - \mu_{r2}$ приводит к увеличению размера капель.

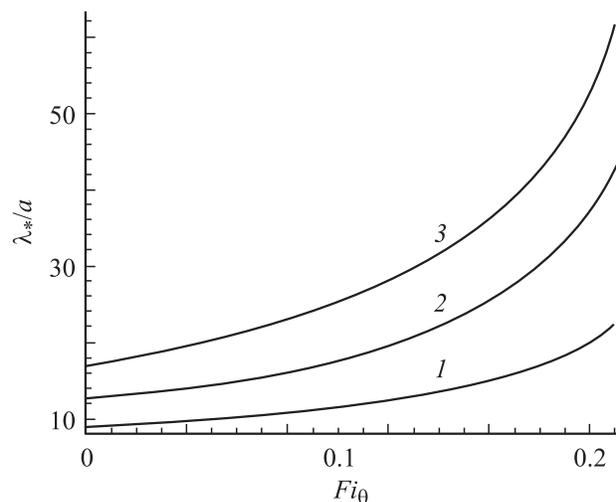


Рис. 6. Зависимость длины волны наиболее быстро растущей моды от Fi_θ при $\sigma = 0.3$, $\mu_{r1} = 5$, $\mu_{r2} = 1$ и различных Fi_z : 1 — 0, 2 — 0.1, 3 — 0.2.

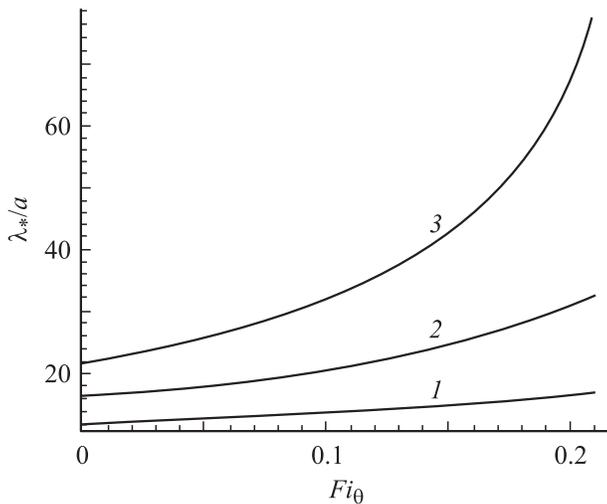


Рис. 7. Зависимость длины волны наиболее быстро растущей моды от Fi_θ при $\sigma = 0.3$, $Fi_z = 0.3$, $\mu_{r2} = 1$ и различных μ_{r1} : 1 — 3, 2 — 4, 3 — 5.

Проведенный анализ показал, что, как и в случае строго азимутального поля [7], при наличии магнитного поля с винтовыми силовыми линиями величина λ_*/a весьма слабо зависит от толщины слоя магнитной жидкости.

Заключение

Изучено влияние магнитного поля с винтовыми силовыми линиями на капиллярную неустойчивость жидкой конфигурации, состоящей из цилиндрического слоя магнитной жидкости и окружающей слой несмешивающейся жидкости, занимающей достаточно большой объем. Плотности обеих жидкостей одинаковы, а магнитная проницаемость слоя больше проницаемости внешней жидкости.

В исходном состоянии рассматриваемый слой полностью покрывает длинный цилиндрический проводник, по которому проходит электрический ток. Явление капиллярного распада данной жидкой конфигурации характеризуется пятью безразмерными критериями подобия: относительными магнитными проницаемостями внутренней μ_{r1} и внешней μ_{r2} жидкостей, факторами азимутального Fi_θ и продольного Fi_z магнитных полей и относительной толщиной слоя σ .

В случае строго азимутального магнитного поля (при $Fi_z = 0$) совокупность эффектов, обусловленных намагничиванием жидкости, характеризуется единой комбинацией перечисленных критериев подобия — магнитным числом Бонда $Bo_m = Fi_\theta(\mu_{r1} - \mu_{r2})$ [6,7]. В плоскости параметров (Fi_θ, κ) , где κ — безразмерное волновое число, построены кривые нейтральной устойчивости.

Показано, что продольная составляющая магнитного поля оказывает стабилизирующее воздействие лишь на часть интервала неустойчивых мод, ввиду чего подавление капиллярного распада сплошного слоя на кап-

ли возможно лишь при наличии азимутальной компоненты поля, обеспечивающей выполнение условия $Fi_\theta > (\mu_{r1} - \mu_{r2})^{-1}$.

Установлено, что при заданных Fi_θ , σ увеличение как продольной компоненты поля, так и скачка $\mu_{r1} - \mu_{r2}$ вызывает:

- 1) уменьшение порогового значения волнового числа;
- 2) увеличение длины волны λ_* наиболее быстро растущей моды, определяющей (при неизменных радиусе токонесущего проводника и толщине цилиндрического слоя магнитной жидкости) характерный размер капели, образующихся в результате капиллярного распада сплошного слоя.

Показано, что при фиксированных Fi_θ , Fi_z , μ_{r1} , μ_{r2} увеличение σ приводит к увеличению порогового значения волнового числа. Полученные данные свидетельствуют о слабой зависимости λ_* от σ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00839).

Список литературы

- [1] Lee W.-K., Flumerfelt R.W. // Int. J. Multiphase Flow. 1981. Vol. 7. N 4. P. 363–383.
- [2] Taylor G.I. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1934. Vol. 146. N 858. P. 501–523.
- [3] Bentley B.J., Leal L.G. // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 167. P. 219–240.
- [4] Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баитовой В.Г. и др. // ДАН БССР. 1979. Т. 23. № 4. С. 341–343.
- [5] Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баитовой В.Г. и др. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 3–8.
- [6] Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
- [7] Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [8] Баитовой В.Г., Краков М.С. // Магнитная гидродинамика. 1980. № 2. С. 35–40.
- [9] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
- [10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [11] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
- [12] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Мир, 1979. 830 с.
- [13] Стрэтт Дж.В. Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 475 с.