

Краткие сообщения

01

Моделирование фликкер-шума с помощью дробного интегро-дифференцирования

© С.Ш. Рехвиашвили

Кабардино-Балкарский государственный университет,
Нальчик, Россия
e-mail: rsergo@mail.ru

(Поступило в Редакцию 7 июня 2005 г.)

В работе найдена связь между спектральной плотностью мощности фликкер-шума и дробной производной Римана-Лиувилля. Показано, что системы со спектром фликкер-типа могут „вычислять“ дробную производную от случайного стационарного процесса. Полученные результаты предложено использовать для моделирования фликкер-шума в электронных схемах. Метод реализован с помощью программы схемотехнического моделирования *PSpice*.

PACS: 05.40.Ca

Из теории и многочисленных экспериментов известно, что на высоких частотах шум большинства электронных приборов имеет равномерный спектр, соответствующий тепловому или дробному шуму. Однако при понижении частоты ниже некоторого значения f_0 (граничной частоты области белого шума) уровень шума значительно увеличивается. При этом частотная зависимость спектральной плотности мощности шума имеет вид $1/f^\gamma$, где γ — некоторая постоянная, близкая к единице. Граничная частота f_0 для различных приборов может изменяться в довольно широких пределах (от 1 до 100 МГц). В настоящее время принято считать, что причиной низкочастотного фликкер-шума являются различные „внутренние“ физические факторы, которые определяют работу данного прибора и носят необратимый характер. Так, например, в биполярных полупроводниковых структурах низкочастотный шум обусловлен процессами генерации и рекомбинации носителей заряда. В МОП-структурах фликкер-шум существенно зависит от поведения носителей заряда вблизи границы раздела полупроводник-диэлектрик.

Имеются различные численные и аналитические математические модели для описания фликкер-шума. При этом есть все основания считать, что сам фликкер-шум является результатом различных диссипативных кинетических процессов, происходящих в системе [1]. Феноменологически наиболее адекватно эти процессы могут быть представлены в виде так называемого динамического (временного) фрактала [1,2]. В различных задачах для описания процессов, имеющих фрактальную структуру, используется специальный математический аппарат — формализм дробного интегро-дифференцирования [3]. Это связано с тем, что фрактальные функции не дифференцируемы в обычном смысле. Таким образом, возникает вопрос о возможной связи между фликкер-шумом

и дробной производной Римана-Лиувилля, которая является ключевым понятием дробного исчисления [3,4]. Еще одним основанием для детального исследования данного вопроса являются результаты, полученные в работе [5]. В данной работе с помощью численного моделирования обнаружена корреляция между решением системы уравнений Ланжевена, описывающих флуктуации вблизи фазового перехода, и дробным интегралом порядка 1/2.

В настоящей работе показано, что дробная производная тесно связана со спектром фликкер-шума. На практике этот факт предлагается использовать для моделирования низкочастотных шумов с помощью специальной схемы замещения, которая вычисляет дробную производную. Данный подход, кроме того, может позволить по-новому формулировать различные задачи, связанные с исследованием и моделированием низкочастотных шумов в электронных схемах.

Рассмотрим электрическую схему на рис. 1. К входу схемы подключен источник белого шума (1), состоящий из идеального источника тока I_0 и резистора R_{in} . Спектральная плотность мощности шума (в данном случае теплового) определяется формулой Найквиста

$$S_{in} = 4k_B T R_{in}, \quad (1)$$

где k_B — постоянная Больцмана, T — шумовая температура. В схеме имеется электронный блок с импульсной характеристикой вида

$$g(t, \alpha) = \frac{A}{t_0^{1-\alpha}} \frac{1}{t^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2)$$

где A , t_0 и α — параметры настройки блока (эти параметры связаны между собой соотношением $g(t_0, \alpha) = A/t_0$), t — время. Отметим, что блок с импульсной характеристикой (2) обладает тем свойством,

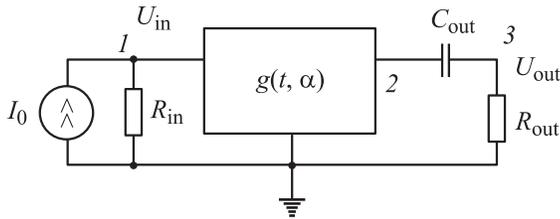


Рис. 1. Схема дробного интегро-дифференциального преобразователя.

что при действии на его входе короткого δ -образного импульса на выходе появляется сигнал, уменьшающийся со временем по степенному закону ($\sim t^{-\alpha}$). Иными словами, блок обладает последствием и представляет собой систему с памятью. Напряжение в узле (2) определяется с помощью интеграла Дюамеля

$$U_g(t) = \int_0^t U_{in}(t')g(t-t', \alpha)dt = \frac{A}{t_0^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{U_{in}(t')dt'}{(t-t')^\alpha}. \quad (3)$$

Сигнал $U_g(t)$ подается на дифференциатор (3), который состоит из конденсатора C_{out} и резистора R_{out} . Учитывая закон Кирхгофа для выходного тока и выражение (3), для выходного напряжения можно записать

$$\begin{aligned} U_{out}(t) &= \tau \frac{dU_g(t)}{dt} = \frac{A\tau}{t_0^{1-\alpha}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{U_{in}(t')}{(t-t')^\alpha} dt' \\ &= \frac{A\tau\Gamma(1-\alpha)}{t_0^{1-\alpha}} D_{0t}^\alpha U_{in}(t), \quad \tau = R_{out}C_{out}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Gamma(1-\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, D_{0t}^α — оператор дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля [3,4]. Из формулы (4) видно, что выходное напряжение определяется дробной производной порядка α от входного сигнала. В связи с этим, схему на рис. 1, можно назвать дробным интегро-дифференциальным преобразователем.

Проанализируем спектральные свойства схемы. Комплексная частотная характеристика (КЧХ) блока с учетом импульсной характеристики (2) находится с помощью интеграла Фурье

$$k_g(\omega, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \alpha) \exp(-i\omega t) dt = \frac{A}{t_0^{1-\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{t^\alpha} dt, \quad (5)$$

где ω — частота. Производя интегрирование в (5), получаем

$$k_g(\Omega, \alpha) = -|k_g(\Omega, \alpha)| \exp(i\varphi_g(\alpha)),$$

$$|k_g(\Omega, \alpha)| = \frac{2\pi A}{\Gamma(\alpha)\Omega^{1-\alpha}}, \quad \varphi_g(\alpha) = \pi \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \quad (6)$$

где $\Omega = t_0\omega$ — безразмерная частота. Из выражения (6) можно видеть, что фаза не зависит от частоты. Однако она может уменьшаться от π до $\pi/2$ при увеличении показателя α от 0 до 1. Дифференциатор представляет собой фильтр верхних частот. Выражение для его КЧХ $k_d(\omega)$ хорошо известно [6]. С учетом данного выражения и выражения (6) записывается КЧХ для всей схемы

$$k(\Omega, \alpha) = k_g(\Omega, \alpha)k_d(\Omega) = -|k(\Omega, \alpha)| \exp(i\varphi(\Omega)).$$

$$|k(\Omega, \alpha)| = \frac{2\pi A\Omega^\alpha}{\Gamma(\alpha)\sqrt{\Omega^2 + \left(\frac{t_0}{\tau}\right)^2}},$$

$$\varphi(\alpha, \Omega) = \pi \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \text{arctg} \left(\frac{t_0}{\Omega\tau}\right). \quad (7)$$

На рис. 2 сплошными линиями показана рассчитанная амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) интегро-дифференциального преобразователя при различных значениях α . Для простоты в расчетах предполагалось, что $A = 1$ и $t_0 = \tau$. Из графика видно, что АЧХ преобразователя в области низких частот имеет характерный максимум, зависящий от α . Его положение, найденное из условия экстремума АЧХ, дается следующей формулой:

$$\Omega_0 = \frac{t_0}{\tau} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (8)$$

При увеличении частоты входного сигнала происходит уменьшение реактивного сопротивления дифференциатора. Поэтому по отношению к высокочастотным составляющим коэффициент передачи всей схемы будет определяться коэффициентом передачи блока с импульсной характеристикой (2). На рис. 2 этот факт иллюстрируют штриховые линии, которые определяют асимптотику на высоких частотах ($\Omega \gg \Omega_0$).

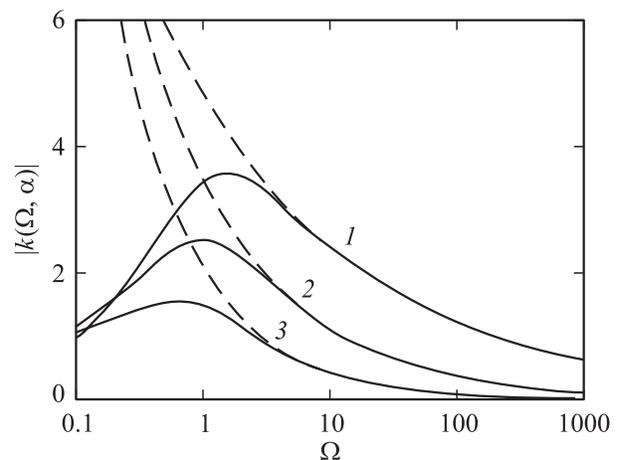


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики дробного интегро-дифференциального преобразователя (сплошные кривые) и блока с импульсной характеристикой $g(t, \alpha)$ (штриховые кривые). Для кривых с номерами 1, 2 и 3 параметр α равен 0.7, 0.5 и 0.3 соответственно.

Спектральная плотность на выходе схемы получается умножением входной спектральной плотности, определяемой формулой (1), на квадрат модуля функции передачи [7]. При $\Omega \gg \Omega_0$ имеем

$$S_{out} = |k(\Omega, \alpha)^2| S_{in} = \left(\frac{8\pi A}{\gamma \Gamma(-\frac{\gamma}{2})} \right)^2 \frac{k_B T R_{in}}{\Omega^\gamma}, \quad (9)$$

где $\gamma = 2(1 - \alpha)$ — постоянная, лежащая в интервале от 0 до 2. Из формулы (9) следует, что дробный интегро-дифференциальный преобразователь с подключенным к нему источником белого шума на высоких частотах имеет спектральную характеристику фликкер-типа. Другими словами, рассматриваемая схема на частотах $\Omega \gg \Omega_0$ преобразует истинный стационарный шум в шум $1/f$ -типа. Примечательным является также то, что наиболее характерная для фликкер-шума зависимость вида $S_{out} \sim \Omega^{-1}$ имеет место, если порядок дробной производной α равен $1/2$. Эти свойства преобразователя указывают на возможность его применения для моделирования низкочастотных шумов в различных электронных системах.

Для практической реализации схемы дробного интегро-дифференциального преобразователя в работе проводилось схемотехническое моделирование с использованием интерпретатора SPICE [7]. Как и должно быть, аналитическое выражение (7) в точности воспроизводит результаты численного моделирования. Программа моделирования приведена в приложении.

SPICE-программа моделирования дробного интегро-дифференциального преобразователя

```
*Fractional Derivative Transform
.param a = 1e-3 alfa = 0.5
i0 1 0 ac 10u
egta 2 0 laplace {v(1)} = {a/pwr(s,1-alfa)}
rin 1 0 50k
rout 3 0 50k
cout 2 3 2500u
.step param alfa list 0.3 0.5 0.7
.ac dec 100 0.1 1meg
.noise v(3,0)i0
.print noise inoise
.print ac v(3,0) vp(3,0)
.probe
.end
```

Данное описание является универсальным в том смысле, что его можно транслировать во внутренний формат различных интерактивных программ схемотехнического моделирования (например, Electronics Workbench или MicroCap). Кроме того, его можно оформить в виде отдельного библиотечного компонента или макромодели. В программе блок с импульсной характеристикой (2) задается в виде источника напряжения, управляемого напряжением. Его передаточная функция задается с

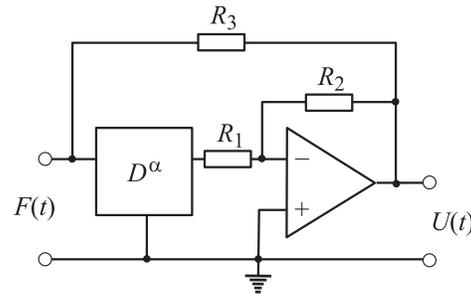


Рис. 3. Аналоговая схема решения дифференциального уравнения дробного порядка. Блок с символом „ D^α “ означает дробный интегро-дифференциальный преобразователь.

помощью преобразования Лапласа в s -области. Для получения требуемого вида АЧХ можно изменять ее наклон и положение максимума на оси частот путем варьирования параметров t_0 , τ и α , что позволяет использовать преобразователь при моделировании различных электронных устройств в качестве независимого источника шума [7].

В заключение отметим, что анализ схем, содержащих дробный интегродифференциальный преобразователь, может сводиться к решению дифференциальных уравнений дробного порядка. Подобные уравнения, как известно, возникают в теории кинетических процессов во фрактальных средах [3]. Рассмотрим это на конкретном примере. Пусть имеется стохастическое дифференциальное уравнение дробного порядка (дробный аналог уравнения Ланжевена)

$$D_{0t}^\alpha U(t) + bU(t) = F(t), \quad (10)$$

где $U(t)$ — неизвестная функция, $F(t)$ — случайная сила (шумовое напряжение), b — некоторая постоянная. Это уравнение можно переписать в виде

$$U(t) = D_{0t}^{-\alpha} (F(t) - bU(t)). \quad (11)$$

Уравнение (11) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, которое может быть решено итерационным методом. Если $b > 0$, то схематически вычислительные итерации будут соответствовать наличию отрицательной обратной связи. Таким образом, электрическая схема решения уравнения (10) приобретает вид, показанный на рис. 3.

Список литературы

- [1] Тимашев С.Ф. // Шумовые и деградационные процессы в полупроводниковых приборах (метрология, диагностика, технология): Матер. докл. науч.-тех. семинара. М.: МНТОРЭС им. А.С. Попова, МЭИ, 1999. С. 239–260.
- [2] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
- [3] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.

- [4] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- [5] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 10. С. 1–7.
- [6] Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника. М.: Мир, 1982.
- [7] Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
- [8] Разевиг В.Д. Применение программ P-CAD и PSpice для схемотехнического моделирования на ПЭВМ: Вып. 2, 3. М.: Радио и связь, 1992.