01;03

Нелинейные осцилляции заряженной капли, ускоренно движущейся в электростатическом поле

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 1 июля 2005 г.)

Найдено аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных осцилляциях заряженной капли, ускоренно движущейся в вакууме в однородном электростатическом поле, в квадратичном приближении по двум малым параметрам: величине эксцентриситета равновесной сфероидальной формы и амплитуде начальной деформации равновесной формы. Расчеты проведены в неинерциальной системе отсчета, связанной с центром масс капли, путем разложения по дробным степеням малого параметра. Найденные поправки к частотам осцилляций всегда отрицательны, они появляются уже во втором порядке малости, определяются стационарной деформацией капли в электрическом поле и приводят к нелинейному снижению критического для реализации неустойчивости капли поверхностного заряда. Обнаружен обусловленный инерциальными силами эффект слабого различия во временной эволюции формы нелинейно осциллирующих капель с зарядами разных знаков.

PACS: 11.30.Na, 47.55.dd

Многочисленные исследования нелинейных осцилляций заряженной капли, проведенные за последние два десятка лет, в большинстве случаев выполнены для неподвижной капли [1–9] или для капли, равномерно движущейся относительно среды в системе координат, связанной с центром масс, т.е. опять-таки в инерциальной системе отсчета [10]. Попытка расчета нелинейных осцилляций хаотически движущегося с переменной скоростью пузыря в жидкости, предпринятая в [11] основана на ошибочной записи силы инерции, и поэтому неудачна.

На сегодняшний день ввиду значительной громоздкости аналитических асимптотических исследований нелинейных осцилляций и устойчивости незаряженной капли в однородном внешнем электростатическом поле из-за наличия нескольких малых параметров выполнено лишь два нелинейных [12,13] исследования данного объекта. Эксцентриситет e равновесной в однородном внешнем электростатическом поле сфероидальной формы электропроводной капли, характеризующий отклонение от равновеликой по объему сферы, определяет первый малый безразмерный параметр. Отношение амплитуды начальной деформации равновесной сфероидальной формы к радиусу равновеликой сферы образует второй малый параметр ε.

В настоящей работе проводится аналитическое асимптотическое рассмотрение нелинейных осцилляций заряженной капли, движущейся с постоянным ускорением во внешнем однородном электростатическом поле, с сохранением слагаемых $\sim \varepsilon e^2$ и $\sim \varepsilon^2$ в предположении, что малые параметры e^2 и ε имеют один порядок малости.

Пусть в вакууме капля идеально электропроводной несжимаемой жидкости, имеющей заряд Q, в вакууме равноускоренно движется в однородном внешнем электростатическом поле напряженностью $\mathbf{E}_0$ под действием постоянной силы $Q\mathbf{E}_0$. Все рассмотрение проведем в системе отсчета, связанной с центром масс. Такая система для равноускоренно движущейся капли будет неинерциальной. Примем, что жидкость имеет плотность ρ, коэффициент поверхностного натяжения на границе с вакуумом σ. В отсутствие электростатического поля капля имеет сферическую форму с радиусом R. Для проведения следующих расчетов необходимо определить равновесную форму капли во внешнем электростатическом поле и поле сил инерции. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, где $\rho = \sigma = R = 1$. Ускорение движения центра масс заряженной капли в электростатическом поле, равное отношению силы, действующей на каплю со стороны электростатического поля, к ее массе, при принятом обезразмеривании запишется в виде $a = 3QE_0/4\pi$. Сила инерции, действующая на каплю, которую необходимо ввести в неинерциальной системе отсчета, будет равна взятому с обратным знаком произведению ускорения a на массу капли: $\mathbf{F}_{in} \equiv -Q\mathbf{E}_0$.

Ограничим проводимое рассмотрение осесимметричными начальными деформациями капли и будем искать равновесную форму поверхности капли в сферических координатах в виде разложения по полиномам Лежандра

$$r(\theta) = 1 + f(\theta) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu); \quad \mu \equiv \cos\theta. \qquad (1)$$

Малые ($|a_n| \ll 1$) амплитуды мод a_n должны быть определены из условия баланса давлений на искомой равновесной поверхности

$$p_0^{(eq)} - p_{atm} + p_{EQ}^{(eq)} + p_{in}^{(eq)} = p_\sigma^{(eq)}. \qquad (2)$$

Здесь $p_0^{(eq)}$ — давление жидкости внутри равновесной капли, p_{atm} — атмосферное давление, $p_{EQ}^{(eq)}$, $p_{in}^{(eq)}$ и $p_\sigma^{(eq)}$ — электрическое, инерционное и давление на поверхность (1) сил поверхностного натяжения соответственно.

Помимо условия (2) необходимо потребовать выполнения условий неизменности объема капли в неподвижности ее центра масс в выбранной системе отсчета

$$\iiint_V dV = 2\pi \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta = \frac{4}{3}\pi;$$

$$\iiint_V \mathbf{r} dV = 2\pi \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)} \mathbf{e}_r r^3 \sin\theta \, dr \, d\theta = 0.$$

Используя разложение (1) и условия неизменности объема капли и неподвижности ее центра масс, несложно получить, что амплитуды нулевой и первой мод в нем определяются соотношениями

$$a_0 \approx -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2}{2k+1} + \mathrm{O}(a_k^3);$$

$$a_1 \approx -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{9(k+1)a_{k+1}a_k}{(2k+1)(2k+3)} + \mathrm{O}(a_k^3), \qquad (3)$$

т.е. амплитуды нулевой и первой мод имеют более высокий порядок малости, чем амплитуды колебательных мод $(n \geq 2)$.

Поскольку давление электрического поля p_E приводит к искажению равновесной сферической формы капли, то, следовательно, оно должно иметь тот же порядок малости, что и вызванное им искажение. Введем формально параметр α, характеризующий величину отклонения равновесной формы капли от сферы, т.е. $|f(\theta)| \sim |a_m| \sim \alpha$ $(\forall n \geq 2)$. В силу сказанного выше получим $p_E \sim E_0^2 \sim \alpha$ и, следовательно, $E_0 \sim \alpha^{1/2}$ (а значит, такой же порядок малости будет иметь и потенциал электрического поля поляризационного заряда). Поскольку заряд не нарушает сферичности равновесной формы капли в отсутствие внешнего электрического поля, то $Q \sim \alpha^0$, и следовательно, ускорение движения центра масс имеет величину $a \sim QE_0 \sim \alpha^{1/2}$. Кроме того, из соотношений (3) следует, что a_0, $a_1 \sim \mathrm{O}(\alpha^2)$.

Выпишем выражения для входящих в (2) инерционного двления и давления сил поверхностного натяжения

$$p_g^{(eq)} = (3QE_0/4\pi)[r(0) - r(\theta)\mu]$$

$$\approx (3QE_0/4\pi)(1-\mu) + \mathrm{O}(\alpha^{3/2}); \qquad (4)$$

$$p_\sigma^{(eq)} \approx \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\big(2 - n(n+1)\big)a_n P_n(\mu) + \mathrm{O}(\alpha^2). \qquad (5)$$

Для того чтобы выписать аналогичное разложение для давления электрических сил на равновесную поверхность капли $p_{EQ}^{(eq)} = (\boldsymbol{\nabla}\Phi^{(eq)})^2/8\pi$, следует решить электростатическую задачу

$$\Delta\Phi^{(eq)} = 0; \qquad r \to \infty: \quad \Phi^{(eq)} \to -E_0 r\mu;$$

$$r = r(\theta): \quad \Phi^{(eq)} = \mathrm{const};$$

$$2\pi \int_0^\pi \left(\mathbf{n}\boldsymbol{\nabla}\Phi^{(eq)}\right)\Big|_{r=r(\theta)} \sin\theta \, d\theta = -4\pi Q.$$

Подставляя искомый потенциал электростатического поля в окрестности равновесной поверхности в виде ряда по полу целым степеням параметра α:

$$\Phi^{(eq)} \approx \Phi_0^{(eq)} + \alpha^{1/2}\Phi_{1/2}^{(eq)} + \alpha\Phi_1^{(eq)} + \alpha^{3/2}\Phi_{3/2}^{(eq)} + \mathrm{O}(\alpha^2),$$

и решая последовательно соответствующие краевые задачи различных порядков малости, найдем

$$\Phi^{(eq)} \approx \frac{Q}{r} - E_0\mu r\left(1 - \frac{1}{r^3}\right)$$

$$+ Q\sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) + 3E_0\left[\frac{2a_2}{5r^2}\mu\right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}a_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3}a_{n+1}\right) r^{-(n+1)} P_n(\mu)\right] + O(\alpha^2). \qquad (6)$$

В результате давление электрического поля $p_{EQ}^{(eq)}$ на равновесную поверхность капли с точностью до слагаемых $\sim \alpha$ запишется в виде

$$p_{EQ}^{(eq)} \approx \frac{1}{8\pi}\left[Q^2 + 6QE_0\mu + 9E_0^2\mu^2\right.$$

$$\left. + 2Q^2\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n-1)P_n(\mu)\right] + \mathrm{O}(\alpha^{3/2}). \qquad (7)$$

Подставим данное выражение, а также выражения (4) и (5) в условие баланса давлений (2) и приравняем слагаемые одинакового порядка малости по α. В нулевом порядке получим равенство, описывающее баланс давлений на поверхности заряженной сферической капли в отсутствие внешних полей.

Рассмотрение слагаемых первого порядка малости по α позволяет определить амплитуду второй моды в разложении (1), в то время как амплитуды всех остальных мод имеют более высокий порядок малости. В результате с точностью до слагаемых $\sim \alpha$ искомая равновесная форма поверхности капли запишется в виде

$$r(\theta) \approx 1 + a_2 P_2(\mu) + \mathrm{O}(\alpha^{3/2})$$

$$\approx 1 + (3E_0^2/16\pi - Q^2)P_2(\mu) + \mathrm{O}(\alpha^{3/2}). \qquad (8)$$

Иными словами, в используемом порядке малости равновесная форма капли не зависит от наличия сил инерции, влияние которых проявится лишь в следующем порядке. Сравним (8) с разложением в ряд по эксцентриситету e в сферических координатах уравнения вытянутой сфероидальной поверхности

$$r_{sph}(\theta) \approx 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + \mathrm{O}(e^4);$$

и получим, что равновесную форму поверхности заряженной капли, ускоренно движущейся в слабом электростатическом поле (при $e^2 \ll 1$) можно считать вытянутым сфероидом с точностью до слагаемых $\sim e^2$. Квадрат эксцентриситета равновесной сфероидальной формы связан с зарядом капли и напряженностью электростатического поля соотношением

$$e^2 \equiv \frac{9E_0^2}{16\pi - Q^2} \equiv \frac{36w}{4 - W}; \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi}; \quad w \equiv \frac{E_0^2}{16\pi}. \quad (9)$$

Для следующих расчетов нелинейных осцилляций капли в порядке малости $\sim \varepsilon e^2$ знания равновесной формы капли с точностью до слагаемых $\sim e^2$ достаточно. Согласно (9), величина эксцентриситета равновесной сфероидальной формы капли определяется W — параметром Рэлея, характеризующим устойчивость поверхности капли по отношению к собственному заряду, и w — параметром Тейлора, характеризующим устойчивость поверхности электропроводной капли по отношению к внешнему электростатическому полю, т.е. по отношению к индуцированному заряду.

Для того чтобы исследовать нелинейные осцилляции поверхности капли, примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная слабо сфероидальная форма капли с эксцентриситетом e претерпевает осесимметричное возмущение $\xi(\theta, t)$ фиксированной конечной амплитуды ε, много меньшей, однако, радиуса капли ($\varepsilon \ll 1$). Зададимся целью найти форму капли при $t > 0$ и спектр возникающих ее капиллярных осцилляций, полагая, что форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Уравнение свободной поверхности капли запишем в виде

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t) = 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + \xi(\theta, t)$$
$$\equiv 1 + e^2 h(\theta) + \xi(\theta, t). \qquad (10)$$

Движение жидкости в капле, вызванное начальной виртуальной деформацией равновесной слабо сфероидальной поверхности, будем полагать потенциальным с потенциалом поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$. Естественно принять, что потенциал ψ и поле скоростей течения жидкости в капле $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{grad} \psi(\mathbf{r}, t)$ являются величинами того же порядка малости, что и возмущение $\xi(\theta, t)$, т.е. $\psi, V \sim \varepsilon$. Поскольку скорости гидродинамических движений жидкости в капле много меньше скорости распространения электромагнитных взаимодействий, будем считать электрическое поле в окрестности капли электростатическим, описываемым потенциалом $\Phi(\mathbf{r}, t)$ так, что для напряженности поля будем иметь $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}(\Phi)$.

Математическая формулировка решаемой задачи в неинерциальной системе отсчета, связанной с центром масс капли, имеет вид:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \qquad (11)$$

$$r \to 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \to 0 \qquad (12)$$

$$t \to \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \to -E_0 r\mu \qquad (13)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}; \qquad (14)$$

$$\Delta p - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2 + p_{EQ} + p_{in} = p_\sigma; \qquad (15)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t); \qquad (16)$$

$$\int_V r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{3},$$

$$V = \left[0 \le r \le r(\theta) + \xi(\theta, t), \ 0 \le \theta \le \pi, \ 0 \le \varphi \le 2\pi\right]; \qquad (17)$$

$$\int_V \mathbf{e}_r r^3 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0; \qquad (18)$$

$$\oint_S (\mathbf{n}\boldsymbol{\nabla}\Phi) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = -4\pi Q; \qquad (19)$$

$$S = \left[r = r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\right];$$

$$t = 0: \quad \xi(\theta, t) = \tilde{\xi}_0 P_0(\mu) + \tilde{\xi}_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\mu);$$

$$\frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} = 0. \qquad (20)$$

В выражениях (15)–(20) введены обозначения: Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; $p_{EQ} = (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2/8\pi$ — давление электрического поля на поверхности капли; $p_{in}(3QE_0/4\pi)[(r(\theta) + \xi(\theta, t))|_{\theta=0} - (r(\theta) + \xi(\theta, t))\mu]$ — давление сил инерции; $p_\sigma = \operatorname{div}_S \mathbf{n}$ — давление сил поверхностного натяжения (div_S — оператор поверхностной дивергенции); $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности (10); $\Phi_S(t)$ — постоянное значение электрического потенциала вдоль поверхности капли; ε — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли, являющаяся малым параметром задачи; h_i — коэффициенты, определяющие парциальный вклад i-й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; Ξ — множество значений номеров мод, определяющих начальную деформацию $\sum_{i \in \Xi} h_i = 1$; $\tilde{\xi}_0$ и $\tilde{\xi}_1$ — константы, определяемые из условий (17) и (18) в начальный момент времени, зависящие от вида начальной деформации и с точностью до слагаемых порядка малости $\sim \varepsilon e^2$ и $\sim \varepsilon^2$, равные

$$\tilde{\xi}_0 \equiv \varepsilon^2 \xi_0 \approx -\sum_{i\in\Xi}\left[\varepsilon^2 \frac{h_i^2}{2i+1} + \varepsilon e^2 \frac{2}{15} h_i \delta_{i,2}\right] + \mathrm{O}(\varepsilon^3);$$

$$\tilde{\xi}_1 \equiv \varepsilon^2 \xi_1 \approx -\sum_{i\in\Xi}\left[\varepsilon^2 \frac{9 i h_{i-1} h_i}{(2i-1)(2i+1)} + \varepsilon e^2 \frac{9}{35} h_i \delta_{i,3}\right] + \mathrm{O}(\varepsilon^3).$$

Задача (10)–(20) содержит два малых параметра: e — эксцентриситет равновесной слабо сфероидальной формы капли и ε — амплитуду начальной деформации ξ равновесной формы. Анализ нелинейного взаимодействия возбужденных колебательных мод, как между собой, так и со стационарным отклонением равновесной формы капли от сферы, как минимум требует учета в разложениях слагаемых, имеющих порядок малости $\sim \xi^2$ и $\sim e^2\xi$. В соответствии со сказанным, $e^2 \sim \varepsilon$. Кроме того, будем полагать, что $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$ и $a \equiv (3QE_0/4\pi) \sim \varepsilon^{1/2}$.

Введем формальные параметры β_e, β_E, $\beta_{in} \sim \mathrm{O}(1)$ в соответствии со следующими равенствами: $E_0 = \beta_E \varepsilon^{1/2}$, $a = \beta_{in}\varepsilon^{1/2}$, $e^2 = \beta_e \varepsilon$. Эти параметры нужны только для того, чтобы выделить в явном виде порядки малости в задаче и в конечном решении легко вернуться к величинам E_0, $a \equiv (3QE_0/4\pi)$ и e^2.

Будем решать сформулированную задачу методом многих масштабов. Искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представим в виде разложений по степеням малого параметра ε. Однако, в отличие от ранее рассматривавшихся задач о нелинейных осцилляциях заряженных капель в отсутствие внешних силовых полей, теперь разложение необходимо проводить не только по целым, но и по полуцелым степеням параметра ε. Это позволяет учесть влияние на осцилляции капли давления сил инерции (т.к. $a \sim \varepsilon^{1/2}$) и перекрестных слагаемых электрического давления ($\sim QE_0 \sim \varepsilon^{1/2}$). В рамках расчетов указанного порядка малости будем в соответствии с основной идеей метода многих временных масштабов считать все искомые величины зависящими не просто от времени t, а от трех его масштабов, определенных через малый параметр ε: $T_m \equiv \varepsilon^m t$ $(m = 0; 1/2; 1)$. В итоге получим

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon\xi^{(1)}(\theta, T_0, T_{1/2}, T_1) + \varepsilon^{3/2}\xi^{(3/2)}(\theta, T_0, T_{1/2}) + \varepsilon^2\xi^{(2)}(\theta, T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^{5/2});$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varepsilon\psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}, T_1) + \varepsilon^{3/2}\psi^{(3/2)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}) + \varepsilon^2\psi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^{5/2});$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^{(eq)}(\mathbf{r}) + \varepsilon\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}, T_1) + \varepsilon^{3/2}\Phi^{(3/2)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}) + \varepsilon^2\Phi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^{5/2}), \quad (21)$$

где $\Phi^{(eq)}$ — потенциал электростатического поля в окрестности равновесной формы капли, в линейном по квадрату эксцентриситета приближении, представляющий собой суперпозицию потенциала заряженного сфероида в отсутствие внешнего электростатического поля и потенциала незаряженного электропроводного сфероида в электростатическом поле. Для входящих в динамическое граничное условие (15) давлений электрического поля p_{EQ} поля сил инерции p_{in}, а также сил поверхностного натяжения p_σ примем следующие разложения:

$$p_{EQ} = p_{EQ}^{(eq)} + \varepsilon p_{EQ}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^{3/2} p_{EQ}^{(3/2)}(\xi) + \varepsilon^2 p_{EQ}^{(2)}(\xi) + \mathrm{O}(\varepsilon^{5/2});$$

$$p_{in} = p_{in}^{(eq)} + \varepsilon p_{in}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^{3/2} p_{in}^{(3/2)}(\xi) + \varepsilon^2 p_{in}^{(2)}(\xi) + \mathrm{O}(\varepsilon^{5/2});$$

$$p_\sigma = p_\sigma^{(eq)} + \varepsilon p_\sigma^{(1)}(\xi) + \varepsilon^{3/2} p_\sigma^{(3/2)}(\xi) + \varepsilon^2 p_\sigma^{(2)}(\xi) + \mathrm{O}(\varepsilon^3), \quad (22)$$

где компоненты $p_{EQ}^{(eq)}$, $p_{in}^{(eq)}$, $p_\sigma^{(eq)}$ являются давлениями на равновесной слабо сфероидальной поверхности капли и определяют ее равновесную форму.

Используя разложения (21), (22), из системы (11)–(20) можно получить набор краевых задач разных порядков малости для определения функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$ и $\Phi(m)$, где $(m = 1; 3/2; 2)$.

Очевидно, что каждая из функций $\psi^{(m)}$ и $\Phi^{(m)}$ является решением соответствующего уравнения Лапласа (11) в силу линейности последних. Отметим, что поправки $\Phi^{(m)}$ к равновесному потенциалу $\Phi^{(eq)}$, связанные с осцилляциями поверхности капли, должны стремиться к нулю по мере удаления от поверхности. Поэтому необходимые решения, удовлетворяющие нулевым условиям либо в центре капли, либо на бесконечности, для функций различных порядков малости $(m = 1; 3/2; 2)$ запишем в виде

$$\psi^{(m)}(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(m)}(t) r^n P_n(\mu),$$

$$\Phi^{(m)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (23)$$

В виде аналогичных разложений по полиномам Лежандра представим и последовательные поправки к форме образующей поверхности капли:

$$\xi^{(m)}(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(t) P_n(\mu). \quad (24)$$

Коэффициенты $D_n^{(1)}(t)$, $F_n^{(1)}(t)$, $M_n^{(1)}(t)$, определяющие временную эволюцию решений первого порядка малости для искажения формы поверхности капли $\xi^{(1)}(\theta, t)$, гидродинамического $\psi^{(1)}(r, \theta, t)$ и электростатического

$\Phi^{(1)}(r,\theta,t)$ потенциалов, находятся из системы уравнений, получающейся из (14)–(19) группировкой слагаемых, содержащих первую степень параметра ε и связанных с искажением равновесной формы капли

$$r=1: \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0}-\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}=0;$$

$$-\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0}+p_{EQ}^{(1)}(\xi)+p_{in}^{(1)}(\xi)=p_{\sigma}^{(1)}(\xi);$$

$$\Phi^{(1)}-Q\xi^{(1)}=\Phi_S^{(1)};$$

$$\int\limits_0^{\pi}\xi^{(1)}d\Omega=0; \quad \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\xi^{(1)}Y_1^{(l)}(\theta,\varphi)d\Omega=0,$$

$$(l=0,\pm1); \quad \int\limits_0^{\pi}\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r}d\Omega=0; \tag{25}$$

$$p_{EQ}^{(1)}(\xi)=-\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r}+2Q\xi^{(1)}\right);$$

$$p_{in}^{(1)}(\xi)=0; \quad p_{\sigma}^{(1)}(\xi)=-(2+\Delta_\theta)\xi^{(1)};$$

$Y_1^{(1)}(\theta,\varphi)$ — сферические функции; Δ_θ — угловая часть оператора Лапласа; $d\Omega$ — телесный угол.

Подставляя в (25) решения (23)–(24) для $m=1$, выразим $D_n^{(1)}(t)$ и $F_n^{(1)}(t)$ через эволюционные коэффициенты $M_n^{(1)}(t)$:

$$(\forall n\geq 1) \quad D_n^{(1)}(t)=\frac{1}{n}\frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0}; \quad F_n^{(n)}(t)=QM_n^{(1)}(t);$$

$$D_0^{(1)}(t)=0; \quad F_0^{(1)}(t)=0; \quad M_0^{(1)}(t)=0; \quad M_1^{(1)}(t)=0, \tag{26}$$

а для определения $M_n^{(1)}(t)$ при $n\geq 2$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0^2}+\omega_n^2 M_n^{(1)}(t)=0; \quad \omega_n^2=n(n-1)(n+2-W); \tag{27}$$

ω_n — частоты собственных осцилляций поверхности заряженной капли. Решениями уравнения (27) являются функции, гармонически зависящие от времени T_0, при этом амплитуда и фаза этих колебаний могут зависеть от других временных масштабов $T_{1/2}$ и T_1:

$$M_n^{(1)}(t)=A_n^{(1)}(T_{1/2},T_1)\exp i\omega_n T_0+\text{к.с.};$$

$$A_n^{(1)}(T_{1/2},T_1)=a_n^{(1)}(T_{1/2},T_1)\exp ib_n^{(1)}(T_{1/2},T_1). \tag{28}$$

Аббревиатура „к.с.“ обозначает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Зависимость вещественных функций $a_n^{(1)}(T_{1/2},T_1)$ и $b_n^{(1)}(T_{1/2},T_1)$ от времен $T_{1/2}$ и T_1 может быть определена только при рассмотрении задач следующего порядка малости.

Система уравнений порядка малости $3/2$ для определения функций $D_n^{(3/2)}(t)$, $F_n^{(3/2)}(t)$, $M_n^{(3/2)}(t)$, получающаяся из (14)–(19) группировкой слагаемых при $\varepsilon^{3/2}$, будет содержать слагаемые, учитывающие взаимодействие возмущения $\xi(\theta,t)$ с силой инерции и внешним электростатическим полем:

$$r=1: \quad \frac{\partial \xi^{(3/2)}}{\partial T_0}-\frac{\partial \psi^{(3/2)}}{\partial r}+\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_{1/2}}=0;$$

$$\Phi^{(3/2)}-Q\xi^{(3/2)}-\beta_E\,3\mu\xi^{(1)}=\Phi_S^{(3/2)};$$

$$-\left(\frac{\partial \psi^{(3/2)}}{\partial T_0}+\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_{1/2}}\right)+p_{EQ}^{(3/2)}(\xi)+p_{in}^{(3/2)}(\xi)=p_{\sigma}^{(3/2)}(\xi);$$

$$\int\limits_0^{\pi}\xi^{(3/2)}d\Omega=0; \quad \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\xi^{(3/2)}Y_1^{(l)}d\Omega=0,$$

$$(l=0,\pm1); \quad \int\limits_0^{\pi}\frac{\partial \Phi^{(3/2)}}{\partial r}d\Omega=0; \tag{29}$$

$$p_{EQ}^{(3/2)}(\xi)=-\frac{1}{4\pi}\Bigg(Q\frac{\partial \Phi^{(3/2)}}{\partial r}+2Q^2\xi^{(3/2)}+\beta_E\cdot 3\mu\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r}+4Q\xi^{(1)}\right)\Bigg);$$

$$p_{in}^{(3/2)}(\xi)=\beta_{in}\left(\xi^{(1)}(\theta=0)-\mu\xi^{(1)}(\theta)\right);$$

$$p_{\sigma}^{(3/2)}(\xi)=-(2+\Delta_\theta)\xi^{(3/2)}.$$

Подставим в (29) решения (23), (24) с индексом $m=3/2$ и решения первого порядка (26), (28). Выражения для $D_n^{(3/2)}(t)$ и $F_n^{(3/2)}(t)$ получим в виде

$$(\forall n\geq 1) \quad D_n^{(3/2)}(t)=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial M_n^{(3/2)}(t)}{\partial T_0}+\frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_{1/2}}\right);$$

$$F_n^{(3/2)}(t)=QM_n^{(3/2)}(t)+3\beta_E\left(\frac{n}{2n-1}M_{n-1}^{(1)}(t)+\frac{n+1}{2n+3}M_{n+1}^{(1)}(t)\right);$$

$$D_0^{(3/2)}(t)=0; \quad F_0^{(3/2)}(t)=0;$$

$$M_0^{(3/2)}(t)=0; \quad M_1^{(3/2)}(t)=0, \tag{30}$$

а зависимость эволюционных коэффициентов $M_n^{3/2}(t)$ при $n\geq 2$ от времени T_0 определяется из решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 M_n^{(3/2)}(t)}{\partial T_0^2}+\omega_n^2 M_n^{(3/2)}(t)=-2i\omega_n\frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial T_{1/2}}\exp i\omega_n T_0$$
$$+\left(\beta_E\frac{3Q}{4\pi}(2n-3)-\beta_{in}\right)\frac{n^2}{2n-1}A_{n-1}^{(1)}(t)\exp i\omega_{n-1}T_0$$
$$+\left(\beta_E\frac{3Q}{4\pi}(2n-1)-\beta_{in}\right)\frac{n(n+1)}{2n+3}A_{n+1}^{(1)}(t)\exp i\omega_{n+1}T_0+\text{к.с.}. \tag{31}$$

Чтобы решение этого уравнения не содержало секулярных членов, необходимо потребовать обращения в ноль слагаемых в функции неоднородности, пропорциональных $\exp i\omega_n T_0$, описывающих внешнее воздействие с частотой ω_n, равной частоте собственных колебаний n-й моды. Записывая необходимое условие $(dA_n^{(1)}/dT_{1/2}) = 0$, получаем, что решения первого порядка малости (26), (28) не зависят от временного масштаба $T_{1/2}$, а общее решение уравнения (31) может быть представлено в виде

$$M_n^{(3/2)}(t) = A_n^{(3/2)}(T_{1/2}) \exp i\omega_n T_0 + \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_{n-1}^2}\left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi}(2n-3) - \beta_{in}\right) \times \frac{n^2}{2n-1} A_{n-1}^{(1)} \exp i\omega_{n-1} T_0 + \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_{n+1}^2}\left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi}(2n-1) - \beta_{in}\right) \times \frac{n(n+1)}{2n+3} A_{n+1}^{(1)} \exp i\omega_{n+1} T_0 + \text{к.с.}, \tag{32}$$

где $A_n^{(3/2)}(T_{1/2}) = a_n^{(3/2)}(T_{1/2}) \exp\big(ib_n^{(3/2)}(T_{1/2})\big)$; $a_n^{(3/2)}(T_{1/2})$, $b_n^{(3/2)}(T_{1/2})$ — действительные функции, зависимость которых от $T_{1/2}$ может быть определена лишь при решении задачи второго порядка малости.

Группируя в (14)–(19) слагаемые при ε^2, запишем систему уравнений второго порядка малости для функций $D_n^{(2)}(t)$, $F_n^{(2)}(t)$, $M_n^{(2)}(t)$:

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial \xi^{(3/2)}}{\partial T_{1/2}} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial r^2}\left(\xi^{(1)} + \beta_e h(\theta)\right) + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} = 0,$$

$$-\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0}\left(\xi^{(1)} + \beta_e h(\theta)\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta}\right)^2\right) + p_{EQ}^{(2)}(\xi) + p_{in}^{(2)}(\xi) = p_\sigma^{(2)}(\xi);$$

$$\Phi^{(2)} - Q\xi^{(2)} - \beta_E \cdot 3\mu\xi^{(3/2)} + \xi^{(1)}\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + Q\xi^{(1)}\right) + \beta_e h(\theta)\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} - Q\xi^{(1)}\right) = \Phi_S^{(2)};$$

$$\int_0^\pi \left(\xi^{(2)} + \left(\xi^{(1)}\right)^2 + \beta_e 2h(\theta)\xi^{(1)}\right) d\Omega = 0;$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \left(2\xi^{(2)} + 3\left(\xi^{(1)}\right)^2 + \beta_e 6h(\theta)\xi^{(1)}\right) Y_1^{(l)} d\Omega = 0,$$

$$(l = 0, \pm 1);$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \left(\xi^{(1)} + \beta_e h(\theta)\right)\left(2\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2}\right) - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta}\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} + \beta_e \frac{1}{2}\left(12h(\theta)Q\xi^{(1)} + \sin 2\theta\left(Q\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta}\right)\right)\right) d\Omega = 0;$$

$$p_{EQ}^{(2)}(\xi) = -\frac{1}{4\pi}\left\{Q\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + 2Q^2\xi^{(2)} + \beta_E \cdot 3\mu\left(\frac{\partial \Phi^{(3/2)}}{\partial r} + 4Q\xi^{(3/2)}\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta}\right)^2\right) - \xi^{(1)}\left(5Q^2\xi^{(1)} - 18\beta_E^2\mu^2 + 2Q\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} - Q\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2}\right) + \beta_e Q\left(h(\theta)\left(8Q\xi^{(1)} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{2}\sin 2\theta\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta}\right)\right\};$$

$$p_{in}^{(2)}(\xi) = \beta_{in}\left(\xi^{(3/2)}(\theta = 0) - \mu\xi^{(3/2)}(\theta)\right);$$

$$p_\sigma^{(2)}(\xi) = -(2 + \Delta_\theta)\xi^{(2)} + 2\xi^{(1)}(1 + \Delta_\theta)\xi^{(1)} - \beta_e \cdot 2h(\theta)(4 - \Delta_\theta)\xi^{(1)}.$$

Используя выписанные ранее решения (23), (24) с индексом $m = 2$ и решения более низких порядков (26), (28), (30), (32), выразим коэффициенты $D_n^{(2)}(t)$ и $F_n^{(2)}(t)$ через $M_n^{(m)}(t)$, $(m = 1; 3/2; 2)$:

$$(\forall n \geq 1) \quad D_n^{(2)}(t) = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(3/2)}(t)}{\partial T_{1/2}} + \frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_1} - \beta_e\left(\frac{(n+1)^2(n+2)}{2(2n+3)(2n+5)}\frac{\partial M_{n+2}^{(1)}(t)}{\partial T_0} + \frac{(n-1)n(n+1)}{3(2n-1)(2n+3)}\frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0}\right) - \beta_e\left(\frac{(n-3)(n-1)n}{2(2n-1)(2n-3)}\frac{\partial M_{n-2}^{(1)}(t)}{\partial T_0}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m}\big((m-1)mK_{k,m,n} - \alpha_{k,m,n}\big)M_k^{(1)}(t)\frac{\partial M_m^{(1)}(t)}{\partial T_0}\right];$$

$$F_n^{(2)}(t)=\Bigg\{QM_n^{(3/2)}(t)+3\beta_E\left(\frac{n}{2n-1}M_{n-1}^{(3/2)}(t)\right.$$

$$\left.+\frac{n+1}{2n+3}M_{n+1}^{(3/2)}(t)\right)+Q\beta_e\left(\frac{n^2(n-1)}{2(2n-3)(2n-1)}M_{n-2}^{(1)}(t)\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)(n+2)}{3(2n-1)(2n+3)}M_n^{(1)}(t)\right)$$

$$+Q\beta_e\frac{(n+1)(n+2)(n+4)}{2(2n+3)(2n+5)}M_{n+2}^{(1)}(t)$$

$$+Q\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}mK_{k,m,n}M_k^{(1)}(t)M_m^{(1)}(t)\Bigg\};$$

$$D_0^{(2)}(t)=0;\quad F_0^{(2)}(t)=0;$$

$$M_0^{(2)}(t)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(M_k^{(1)}(t)\right)^2-\beta_e\frac{2}{15}M_2^{(1)}(t);$$

$$M_1^{(2)}(t)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{9k}{(2k-1)(2k+1)}M_{k-1}^{(1)}(t)M_k^{(1)}(t)$$

$$-\beta_e\frac{9}{35}M_3^{(1)}(t),$$

а для искомых функций второго порядка малости $M_n^{(2)}(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial T_0^2}+\omega_n^2M_n^{(2)}(T_0)=\Bigg[-2i\omega_n\frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1}$$

$$+G_1(n)A_n^{(1)}(T_1)-2i\omega_n\frac{dA_n^{(3/2)}(T_{1/2})}{dT_{1/2}}\Bigg]\exp i\omega_nT_0$$

$$+G_2(n)A_{n+2}^{(1)}\exp i\omega_{n+2}T_0+G_3(n)A_{n-2}^{(1)}\exp i\omega_{n-2}T_0$$

$$+G_4(n)A_{n+1}^{(3/2)}\exp i\omega_{n+1}T_0+G_5(n)A_{n-1}^{(3/2)}\exp i\omega_{n-1}T_0$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\big\{[(\gamma_{kmn}+\gamma_{mkn})$$

$$+\omega_k\omega_m(\eta_{kmn}+\eta_{mkn})]A_k^{(1)}A_m^{(1)}\exp(i[\omega_k+\omega_m]T_0)$$

$$+[(\gamma_{kmn}+\gamma_{mkn})-\omega_k\omega_m(\eta_{kmn}+\eta_{mkn})]$$

$$\times A_k^{(1)}\overline{A}_m^{(1)}\exp(i[\omega_k-\omega_m]T_0)\big\}+\text{к.с.}\,; \tag{33}$$

$$\varepsilon G_1(n)\equiv n^2\left(\frac{e^2\kappa_{n+1}(n^2+n+2-W)}{2n-1}\right.$$

$$\left.+\frac{36w\kappa_n\big(2(n-1)(2n+3)-1\big)}{(2n-1)(2n+3)}\right)$$

$$+\kappa_n\left(\frac{n^2(n-2)^2\kappa_{n-1}}{\omega_{n-1}^2-\omega_n^2}+\frac{(n-1)^2(n+1)^2\kappa_{n+1}}{\omega_{n+1}^2-\omega_n^2}\right)\Pi^2;$$

$$\Pi\equiv\frac{3QE_0}{2\pi};$$

$$\varepsilon G_2(n)\equiv\kappa_{n+1}\kappa_{n+2}\Bigg[36wn^2-e^2\bigg(\frac{n(8-7n-3n^2)}{2}$$

$$+(n-1)^2(n+4-W)\bigg)-\frac{(n^2-1)n^2}{\omega_{n+1}^2-\omega_{n+2}^2}\Pi^2\Bigg];$$

$$\varepsilon^{1/2}G_4(n)\equiv n(n-1)\kappa_{n+1}\Pi;$$

$$\varepsilon^{1/2}G_5(n)\equiv\frac{n^2(n-2)}{2n-1}\Pi;$$

$$\varepsilon G_3(n)\equiv n\kappa_{n-1}\Bigg[36wn\kappa_{n-2}-e^2\bigg(\frac{n(-12+11n-3n^2)}{2(2n-3)}$$

$$-\frac{(9-5n+n^2)(n-W)}{2n-3}\bigg)$$

$$+\frac{(n-3)(n-1)n\kappa_{n-2}}{\omega_{n-1}^2-\omega_{n-2}^2}\Pi^2\Bigg];$$

$$\kappa_m\equiv\frac{m}{2m+1};$$

$$\gamma_{kmn}=K_{kmn}\Big[\omega_k^2(n-k+1)+2n(k^2+k-1)$$

$$+W\frac{n}{2}\big(3+m(k+1)-k(2k-2n+7)\big)\Big]$$

$$+\alpha_{kmn}\left(\frac{1}{k}\omega_k^2+W\frac{n}{2}\right);$$

$$\eta_{kmn}=K_{kmn}\left(\frac{n}{2}-k+1\right)+\alpha_{kmn}\frac{1}{k}\left(1+\frac{n}{2m}\right);$$

$$K_{kmn}=\left[C_{k0m0}^{n0}\right]^2;$$

$$\alpha_{kmn}=-\sqrt{k(k+1)m(m+1)}\,C_{k0m0}^{n0}C_{k(-1)m1}^{n0},$$

где C_{k0m0}^{n0}, $C_{k(-1)m1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана.

Необходимость исключения из решений уравнения (33) секулярных слагаемых приводит к требованию, чтобы первая квадратная скобка в функции неоднородности (правой части (33)) обращалась в нуль. Этого можно добиться, если положить

$$-2i\omega_n\frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1}+G_1(n)A_n^{(1)}(T_1)=0;$$

$$\frac{dA_n^{(3/2)}(T_{1/2})}{dT_{1/2}}=0. \tag{34}$$

Согласно второму из этих уравнений, амплитуды порядка малости $3/2$ от временного масштаба $T_{1/2}$ не зависят, и следовательно, в (32) $a_n^{(3/2)}$ и $b_n^{(3/2)}$ являются константами, для определения которых необходимо учесть начальные условия. Первое из уравнений (34) позволяет определить зависимость амплитуд первого порядка малости от медленного временного масштаба T_1. Выражая в нем $A_n^{(1)}(T_1)$ через действительные функции $a_n^{(1)}(T_1)$,

$b_n^{(1)}(T_1)$ и требуя обращения в ноль действительной и мнимой частей уравнения, несложно получить

$$a_n^{(1)}(T_1)=a_n^{(0)};\quad b_n^{(1)}(T_1)=-\frac{G_1(n)}{2\omega_n}T_1+b_n^{(0)}, \tag{35}$$

$a_n^{(0)}$ и $b_n^{(0)}$ — константы, определяемые из начальных условий.

Величины $b_n^{(1)}(T_1)$ определяют поправки к частотам собственных колебаний поверхности капли, связанные с отклонением ее равновесной формы от сферической и наличием в окружающем пространстве электростатического поля. С учетом (35) амплитуды колебательных мод первого порядка малости $M_n^{(1)}(t)$ вместо (28) запишутся в виде

$$M_n^{(1)}(t)=2a_n^{(0)}\cos[(\omega_n-\varepsilon\delta_n)t+b_n^{(0)}];\quad \delta_n\equiv G_1(n)/2\omega_n. \tag{36}$$

Выражения для амплитуд второго порядка малости $M_n^{(2)}(T_0)$ $(n\geq 2)$ получим, решая уравнение (33) с учетом соотношений (34),

$$\begin{aligned}M_n^{(2)}(t)&=A_n^{(2)}\exp i\omega_nT_0+\chi_{n+2}A_{n+2}^{(1)}\exp i\omega_{n+2}T_0\\&+\chi_{n-2}A_{n-2}^{(1)}\exp i\omega_{n-2}T_0+\chi_{n+1}A_{n+1}^{(3/2)}\exp i\omega_{n+1}T_0\\&+\chi_{n-1}A_{n-1}^{(3/2)}\exp i\omega_{n-1}T_0\\&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\lambda_{kmn}^{(+)}A_k^{(1)}A_m^{(1)}\exp(i[\omega_k+\omega_n]T_0)\\&+\lambda_{kmn}^{(-)}A_k^{(1)}\overline{A_m^{(1)}}\exp(i[\omega_k-\omega_n])\Big\}+\text{к.с.};\end{aligned} \tag{37}$$

$$\chi_{n+2}=\frac{G_2(n)}{\omega_n^2-\omega_{n+2}^2};\quad \chi_{n-2}=\frac{G_3(n)}{\omega_n^2-\omega_{n-2}^2};$$

$$\chi_{n+1}=\frac{G_4(n)}{\omega_n^2-\omega_{n+1}^2};\quad \chi_{n-1}=\frac{G_5(n)}{\omega_n^2-\omega_{n-1}^2};$$

$$\lambda_{kmn}^{(\pm)}=\frac{1}{2}\,\frac{(\gamma_{kmn}+\gamma_{mkn})\pm\omega_k\omega_m(\eta_{kmn}+\eta_{mkn})}{\omega_n^2-(\omega_k\pm\omega_m)^2}.$$

Отметим, что принятое ограничение точности данного рассмотрения вторым порядком малости, позволяет определить зависимость коэффициентов $M_n^{(2)}$ лишь от временного масштаба T_0. В связи с этим в (37) следует принять $A_n^{(2)}=a_n^{(2)}\exp ib_n^{(2)}$, $A_n^{(1)}=a_n^{(0)}\exp ib_n^{(0)}$, а действительные константы $a_n^{(2)}$ и $b_n^{(2)}$, так же как и $a_n^{(0)}$, $b_n^{(0)}$, $a_n^{(3/2)}$, $b_n^{(3/2)}$ определяются из начальных условий.

Начальные условия (20) подстановкой в них разложения (21) для возмущения $\xi(\theta,t)$ превращаются в систему начальных условий для функций разных порядков малости

$$t=0:\quad \xi^{(1)}=\sum_{i\in\Xi}h_iP_i(\mu);\quad \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_0}=0;$$

$$\chi^{(3/2)}=0;\quad \frac{\partial\xi^{(3/2)}}{\partial T_0}+\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_{1/2}}=0;$$

$$\xi^{(2)}=\xi_0P_0(\mu)+\xi_1P_1(\mu);\quad \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_0}+\frac{\partial\xi^{(3/2)}}{\partial T_{1/2}}+\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_1}=0.$$

Учет (24) и полученных в ходе решения соотношений $dM_n^{(1)}/dT_{1/2}=0$ и $dM_n^{(3/2)}/dT_{1/2}=0$ позволяет привести данную систему к виду

$$t=0:\quad M_n^{(1)}(t)=h_i\delta_{i,n};\quad \frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0}=0;$$

$$M_n^{(3/2)}(t)=0;\quad \frac{\partial M_n^{(3/2)}(t)}{\partial T_0}=0;$$

$$M_n^{(2)}(t)=\xi_0\delta_{n,0}+\xi_1\delta_{n,1};\quad \frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial T_0}+\frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_1}=0,$$

где $i\in\Xi$, $\delta_{i,j}$ — дельта-символ Кронекера.

Подставим в систему начальных условий решения (32), (36), (37) и после определения действительных констант $a_n^{(0)}$, $b_n^{(0)}$, $a_n^{(3/2)}$, $b_n^{(3/2)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$ получим в окончательном виде:

$$(n\geq 2):\quad M_n^{(1)}(t)=h_i\delta_{i,n}\cos[(\omega_n-\varepsilon\delta_n)t];$$

$$\varepsilon^{1/2}M_n^{(3/2)}=\Pi n\Bigg(\frac{h_{n-1}n(n-2)(\cos\omega_{n-1}t-\cos\omega_nt)}{(2n-1)(\omega_n^2-\omega_{n-1}^2)}+\frac{h_{n+1}\kappa_{n+1}(n-1)(\cos\omega_{n+1}t-\cos\omega_nt)}{\omega_n^2-\omega_{n-1}^2}\Bigg);$$

$$\begin{aligned}\varepsilon M_n^{(2)}(t)=\Bigg[&-h_n\Bigg(\frac{\kappa_n\kappa_{n+1}(n^2-1)^2}{(\omega_n^2-\omega_{n+1}^2)^2}+\frac{\kappa_n\kappa_{n-1}n_2(n-2)^2}{(\omega_n^2-\omega_{n-1}^2)^2}\Bigg)\\&+\Bigg(\frac{h_{n+2}(n^2-1)\kappa_{n+1}\kappa_{n+2}}{(\omega_n^2-\omega_{n+1}^2)(\omega_{n+1}^2-\omega_{n+2}^2)}\\&+\frac{h_{n-2}(n-1)(n-3)\kappa_{n-1}\kappa_{n-2}}{(\omega_n^2-\omega_{n-1}^2)(\omega_{n-1}^2-\omega_{n-2}^2)}\Bigg)\Bigg]n^2\Pi^2\cos\omega_nt\\&+h_{n+2}\varepsilon\chi_{n+2}(\cos\omega_{n+2}t+\cos\omega_nt)\\&+h_{n-2}\varepsilon\chi_{n-2}(\cos\omega_{n-2}t+\cos\omega_nt)\\&+\frac{(n^2-1)\kappa_{n+1}}{\omega_n^2-\omega_{n+1}^2}\Bigg(\frac{(n^2-1)h_n\kappa_n}{\omega_n^2-\omega_{n+1}^2}-\frac{n^2h_{n+2}\kappa_{n+2}}{\omega_{n+1}^2-\omega_{n+2}^2}\Bigg)\\&\times\Pi^2\cos\omega_{n+1}t+\frac{n^2\kappa_{n-1}}{\omega_n^2-\omega_{n-1}^2}\Bigg(\frac{(n-2)^2h_n\kappa_n}{\omega_n^2-\omega_{n-1}^2}\\&-\frac{(n-1)(n-3)h_{n-2}\kappa_{n-2}}{\omega_{n-1}^2-\omega_{n-2}^2}\Bigg)\Pi^2\cos\omega_{n-1}t\\&+\varepsilon\sum_{m\in\Xi}\sum_{j\in\Xi}\frac{h_mh_j}{2}\Big\{\lambda_{mjn}^{(+)}\big[\cos\big((\omega_m+\omega_j)t\big)-\cos\omega_nt\big]\\&+\lambda_{mjn}^{(-)}\big[\cos\big((\omega_m-\omega_j)t\big)-\cos\omega_nt\big]\Big\};\end{aligned}$$

$$M_0^{(1)}(t) = M_1^{(1)}(t) = M_0^{(3/2)}(t) = M_1^{(3/2)}(t) = 0;$$

$$\varepsilon^2 M_0^{(2)}(t) = -\sum_{m\in\Xi} \frac{\varepsilon^2 h_m^2}{2m+1} (\cos\omega_m t)^2$$

$$- \varepsilon e^2 \frac{2h_2}{15} \cos\omega_2 t; \qquad (38)$$

$$\varepsilon^2 M_1^{(2)}(t) = -\sum_{m\in\Xi} \frac{9mh_{m-1}h_m\varepsilon^2}{4m^2-1} \cos\omega_{m-1}t \cos\omega_m t$$

$$- \varepsilon e^2 \frac{9h_3}{35} \cos\omega_3 t.$$

Таким образом, используя (10), (21), (24) (38) для формы поверхности осциллирующей заряженной капли, ускоренно движущейся во внешнем однородном электрическом поле, запишем следующее выражение:

$$r(\theta, t) = 1 + \frac{e^2}{3} P_2(\mu) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \big(M_n^{(1)}(t) + \varepsilon^{1/2} M_n^{(3/2)}(t)$$

$$+ \varepsilon M_n^{(2)}(t)\big) P_n(\mu) + \mathrm{O}(\varepsilon^{5/2}). \qquad (39)$$

Расчеты по (38), (39) форм равноускоренно движущихся во внешнем однородном электростатическом поле нелинейно осциллирующих заряженных капель проиллюстрированы рис. 1–3, из которых видно, что закономерности временной эволюции положительно и отрицательно заряженных капель при неизменном электростатическом поле (или при смене направления напряженности электростатического поля на противоположное при неизменном заряде капли) несколько отличаются. Это различие связано с появлением в выражении (39) для образующей слагаемого $\varepsilon^{3/2} M_n^{(3/2)}(t) \sim \Pi \equiv (3QE_0/2\pi)$, изменяющего свой знак при изменении знака заряда или при изменении ориентации напряженности поля, тогда как все остальные слагаемые выражения (39) либо не зависят от заряда, либо пропорциональны его квадрату: $\sim W$, $\sim \Pi^2$. В задачах расчета нелинейных осцилляций заряженных капель в отсутствие внешних полей [1–9] в выражении для образующей формы капли заряд всегда входит в квадрате, и следовательно, форма осциллирующей капли не изменяется при смене знака заряда. При расчете нелинейных осцилляций капель во внешних электростатических полях [12,13] напряженность поля в выражении для образующей формы капли также всегда входит в квадрате и смена направления напряженности поля на обратное также не изменяет формы нелинейно осциллирующей капли.

Поправки к частотам $\varepsilon\delta_n$ появляются уже в расчетах второго порядка малости по амплитуде начальной деформации (а не третьего, как в [1–9]) и появляются не из-за нелинейного взаимодействия мод, как при исследовании нелинейных осцилляций заряженной капли [1–9], а благодаря отличию равновесной формы капли от сферической и взаимодействию заряда капли с электростатическим полем и полем сил инерции.

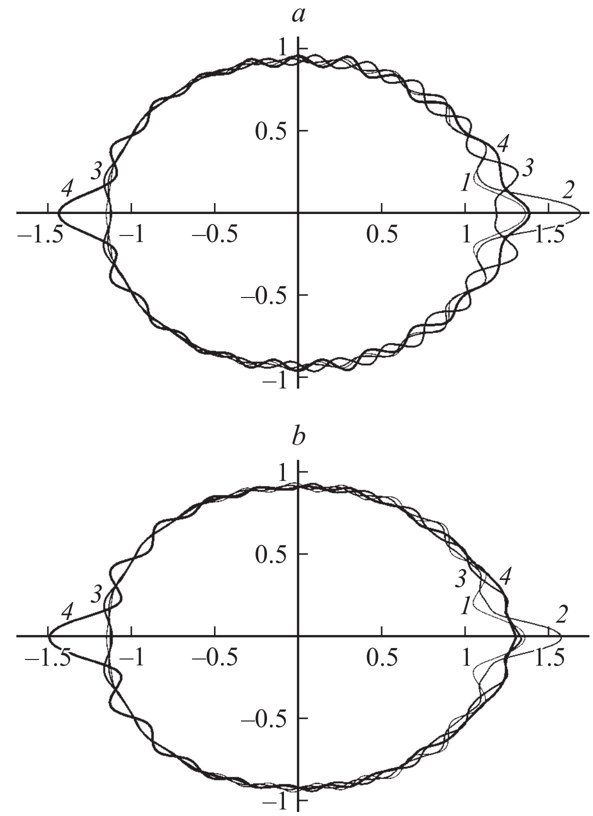

Рис. 1. Образующие форм нелинейно осциллирующей капли, когда начальная деформация определена суперпозицией 19-й и 20-й мод, в различные моменты времени, измеренные в долях периода 19-й моды T_{19}, рассчитанные при $\varepsilon = 0.2$, $W = 3.7$. *a* — для положительно заряженной, *b* — для отрицательно заряженной капли. Номера кривых соответствуют различным моментам времени: *1* — $t = 0$; *2* — $\frac{19}{16}T_{19}$; *3* — $\frac{42}{16}T_{19}$; *4* — $\frac{64}{16}T_{19}$.

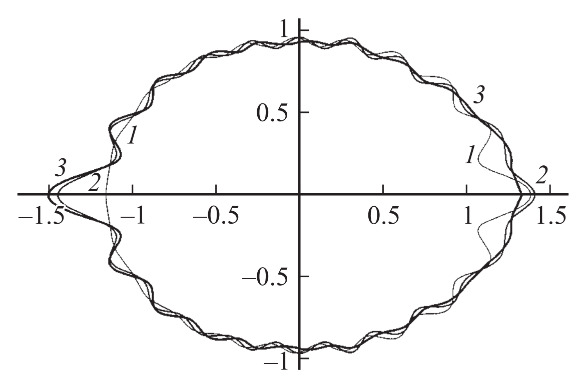

Рис. 2. Образующие форм нелинейно осциллирующей капли, когда начальная деформация определена суперпозицией 19-й и 20-й мод, в один момент времени $t = 64T_{19}/16$, выраженный в долях периода 19-й моды T_{19}. Формы рассчитаны при $\varepsilon = 0.2$, $W = 3.7$, когда заряд капли: кривая *2* — положителен; *3* — отрицателен. Кривой *1* соответствует форма капли в начальный момент времени.

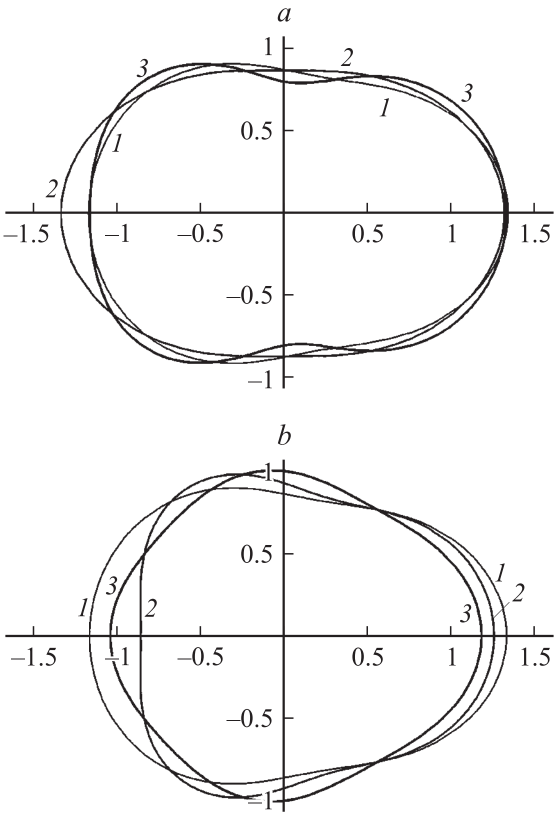

Рис. 3. Образующие форм нелинейно осциллирующих положительно и отрицательно заряженных капель, когда начальная деформация определена суперпозицией 2-й и 3-й мод, рассчитанные при $\varepsilon = 0.2$, $W = 3.7$ в один момент времени, выраженные в долях периода второй моды T_2: *a* — $t = 27T_2/16$; *b* — $t = 47T_2/16$. Кривая *1* — образующая формы капли в начальный момент времени; *2* — образующая положительно заряженной капли; *3* — отрицательно заряженной.

В этой связи найденные поправки к частотам осцилляций целесообразно называть не „нелинейными", а „деформационными", чтобы можно было отличать их от истинно нелинейных, появляющихся в более высоких порядках малости (начиная с третьего) именно из-за нелинейного взаимодействия мод осцилляций.

Зависимости относительной величины деформационных поправок к частотам от величин параметров W и w, а также от номера моды n приведены на рис. 4–5. Видно, что деформационные поправки становятся существенными лишь при приближении параметра Рэлея W к своему критическому значению, равному четырем. Диапазон значений параметра Тейлоа w, использованных при расчете рис. 4, далек от критических его величин ввиду того, что в использованной математической модели, когда величина стационарной деформации принималась равной амплитуде нелинейных осцилляций, величина напряженности поля ограничена требованием малости параметра разложений $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$. Для исследования изменения деформационных поправок к частотам при больших значениях напряженности поля, близких к критическим по Тейлору (при $w \to 0.05$), необходимо изменить принятое соотношение между малыми параметрами задачи, что существенно изменит асимптотическую процедуру и потребует отдельного аналитического расчета. Из рис. 5 видно, что относительные величины деформационных поправок монотонно уменьшаются с ростом номера моды.

Вид начальной деформации равновесной формы капли сказывается на виде нелинейных поправок к амплитудам нулевой $M_0^{(2)}(t)$ и первой (трансляционной) $M_1^{(2)}(t)$ мод, которые содержат слагаемые, пропорциональные начальным амплитудам основной (второй) и третьей мод, соответственно обращающиеся в ноль при отсутствии номеров этих мод в спектре, определяющем начальную деформацию. В ситуации нелинейно осциллирующей заряженной капли такие слагаемые отсутствовали, их появление связано с наличием стационарной деформации капли в электрическом поле.

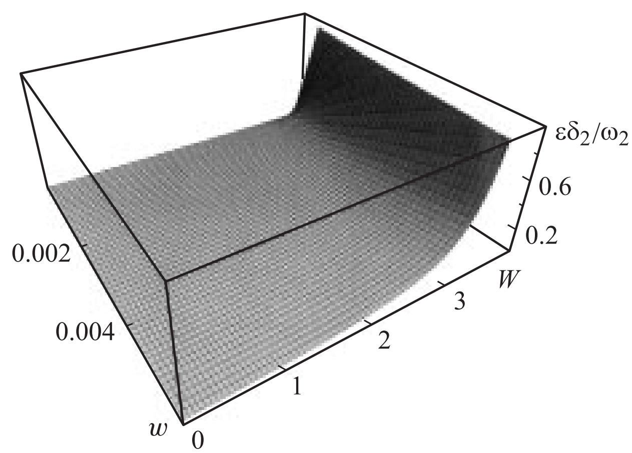

Рис. 4. Зависимость отношения нелинейной поправки к частоте основной моды к самой частоте от параметров Рэлея (W) и Тейлора (w).

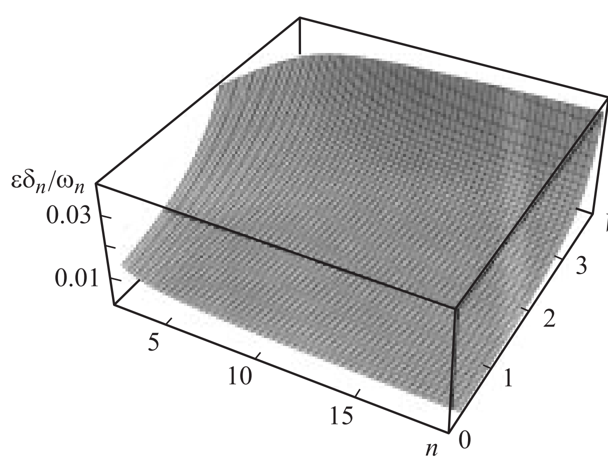

Рис. 5. Зависимость отношения нелинейной поправки к частоте n-й моды к самой частоте от параметра Рэлея (W) и номера моды (n).

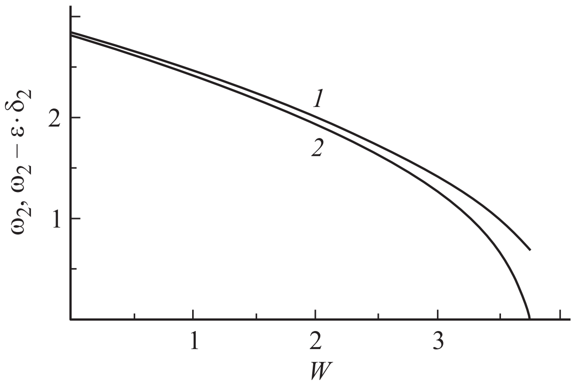

Рис. 6. Зависимости от параметра Рэлея (W): *1* — частоты основной моды без учета деформационной поправки; *2* — частоты основной моды с учетом деформационной поправки, рассчитанные при $\varepsilon = 0.1$.

На рис. 6 приведены результаты численных расчетов частоты основной моды без учета деформационной поправки и с ее учетом. Несложно видеть, что деформационная поправка к частоте приводит к снижению критических условий реализации неустойчивости основной моды (так же, как и более высоких мод) капли по отношению к поверхностному заряду, которые определятся из условия $(\omega_2 - \varepsilon\delta_2)^2 \approx \omega_2^2 - 2\varepsilon\delta_2\omega_2 + \mathrm{O}(\varepsilon^2) = 0$ или

$$W_{cr} = (n+2) - \frac{2\varepsilon\delta_2}{n(n-1)}.$$

Для нелинейных осцилляций равноускоренно движущейся заряженной капли в однородном электростатическом поле (вакууме) характерно появление уже во втором порядке малости деформационных поправок к частотам осцилляций; снижение критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду; наличие различий во временной эволюции формы положительно и отрицательно заряженных капель.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-00760.

Список литературы

[1] *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
[2] *Trinch E., Wang T.G.* // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 122. P. 315–338.
[3] *Natarayan R., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 183. P. 95–121.
[4] *Pelekasis N.A., Tsamopolous J.A., Manolis G.D.* // Phys. Fluids. 1990. Vol. A2. N 8. P. 1328–1340.
[5] *Becker E., Hiller W.J., Kowalewski T.A.* // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 258. P. 191–216.
[6] *Feng Z.* // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
[7] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
[8] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
[9] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 19–28.
[10] *Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 23–31.
[11] *Feng Z.C., Leal L.G.* // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. N 6. P. 1325–1336.
[12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 36–44.
[13] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.