

Гладкий аналог стандартного отображения

© В.В. Вечеславов

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

(Поступило в Редакцию 13 сентября 2005 г.)

Двадцать лет назад появилась работа Булита [1], в которой он находил инвариантные кривые стандартного отображения, заменив в нем синусоидальную силу ее гладким аналогом — кусочно-линейной пилою. Эти исследования обнаружили неожиданный эффект: при определенных значениях параметра возмущения среди глобальных инвариантных кривых образуются нерасщепленные сепаратрисы целых и дробных резонансов, а обычно связанные с ними хаотические слои не возникают. Интересно, что система при этом не становится интегрируемой, и сепаратрисы сохраняются и запирают глобальную диффузию по импульсу в условиях сильного локального хаоса.

По непонятным причинам этот важный результат и выводы из него не нашли в свое время широкого обсуждения, и позже для той же самой модели симметричного кусочно-линейного $2D$ -отображения аналогичная теорема в отношении целых резонансов была независимо доказана Овсянниковым [2], что послужило поводом к интенсивному исследованию кусочно-линейных отображений и родственных им непрерывных систем.

Обе эти работы ограничены изучением только самих инвариантных кривых нового типа, поскольку две ветви расщепленных сепаратрис образуют не поддающиеся аналитическим исследованиям хаотические траектории. Насколько известно, кроме публикаций [1,2], других примеров сохраняющихся сепаратрис не найдено.

В настоящей работе описаны полученные в последнее время численные и аналитические результаты, прямо или косвенно связанные с эффектом сохранения сепаратрис и отсутствием обычно возникающего вместе с ними динамического хаоса. Отмечаются нерешенные вопросы.

PACS: 02.90.+p

Введение

Обсудим условия образования глобального хаоса в двумерных канонических отображениях

$$\bar{p} = p + Kf(x), \quad \bar{x} = x + \bar{p} \pmod{1}, \quad (1)$$

где K параметр возмущения [3–8].

Это отображение изучалось для случаев как аналитических, так и гладких функций. Аналитической функции $f(x) = \sin 2\pi x$, например, отвечает известное стандартное отображение Чирикова, результаты обширных исследований которого (и его непрерывного варианта — гамильтониана возмущенного маятника) внесли заметный вклад в современную нелинейную динамику.

В настоящей работе, как и в [1], рассматривается стандартное отображение, в котором синусоидальная сила заменена ее кусочно-линейным аналогом — антисимметричной $f(-x) = -f(x)$ пилою с периодом 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x/(1-d), & \text{если } 0 \leq x < (1-d)/2, \\ (1-2x)/d, & \text{если } (1-d)/2 \leq x \leq (1+d)/2, \\ 2(x-1)/(1-d), & \text{если } (1+d) < x < 1, \end{cases} \quad (2)$$

и потенциалом $V(x) = 1/4 - \int f(x) dx$.

Выражение (2) содержит параметр перекоса d , что позволяет исследовать сразу целое семейство пилообразных зависимостей. К настоящему времени наиболее

полно изучен случай симметричного отображения с $d = 1/2$.

Забегая вперед, отметим, что обнаруженные в [1,2,9–21] новые динамические эффекты и глобальные инвариантные кривые имеют место во всем открытом интервале $0 < d < 1$ значений параметра перекоса d при следующем найденном в [1] условии для параметра возмущения K :

$$K \leq K_B(d) = \frac{2d^2}{1+d}. \quad (3)$$

При $K > K_B$ глобальные инвариантные кривые в системе (1), (2) полностью отсутствуют.

Отображение (1), (2) можно записать в эквивалентной ему формуле непрерывной системы с гамильтонианом, явно зависящим от времени, и возмущением в виде толчков [3–5]:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + KV(x)\delta_1(t) = H_0(x, p) + H_1(x, t), \quad (4)$$

где $\delta_1(t) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \cos 2\pi nt$ обозначает δ -функцию периода 1.

Невозмущенная часть

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + KV(x),$$

представляет в (4) основной (целый) резонанс, а

$$H_1(x, t) = KV(x)(\delta_1(t) - 1)$$

рассматривается как возмущение с периодом $T = 1$ и частотой $\Omega = 2\pi/T = 2\pi$ от всех остальных резонансов.

Основной резонанс является интегрируемой системой без признаков хаоса, и его сепаратрисы устроены следующим образом [3]. Прежде всего, имеется седло — неподвижная точка, которую следует рассматривать как самостоятельную траекторию (невозмущенный маятник может находиться в ней бесконечно долго). От седла в противоположных направлениях отходят и затем асимптотически к нему же приближаются еще две траектории (сепаратрисы), каждая из которых является пограничной между вращением фазы (вне резонанса) и ее колебанием (внутри резонанса). На самом деле обе невозмущенные сепаратрисы состоят из двух пространственно совпадающих траекторий для направлений времени вперед и назад соответственно. Возмущение, как известно, расщепляет каждую сепаратрису на две ветви, которые пересекаются в так называемых гомоклиных точках.

Возмущенная система (4) является, как правило, неинтегрируемой, и ее фазовое пространство в общем случае оказывается разделенным на хаотическую и регулярную компоненты. Необходимо выяснить условия образования единой хаотической компоненты и возникновения глобального хаоса.

Создатели теории КАМ с самого начала отмечали, что возникновение глобального хаоса и возможность диффузии по всей единой хаотической компоненте в фазовом пространстве зависят не только от величины возмущения, но и от гладкости системы. Гладкость удобно характеризовать скоростью убывания фурье-амплитуд. Для аналитических функций убывание является экспоненциальным. В этом случае всегда существует пороговая величина K_{lr} , и глобальный хаос возникает лишь при $k \gtrsim K_{lr}$. Если же $K \lesssim K_{lr}$, хаос локализован в относительно узких хаотических слоях вблизи разрушенных сепаратрис нелинейных резонансов (которые в общем случае образуются при любом $K > 0$) и глобальная диффузия при числе степеней свободы консервативной системы $N \leq 2$ невозможна.

Характер движения существенно изменяется для гладкого потенциала $V(x)$, у которого фурье-амплитуды убывают как некоторая степень $\beta + 1$ их номера n (см. [6] и ссылки там). В простейшем случае $2D$ -отображения порог $K_{lr} > 0$ возникновения глобального хаоса существует всегда при $\beta > \beta_{cr} = 3$. Это значение критической гладкости получено из простой оценки в [6] и требует численной проверки. Строгое доказательство удалось получить только для $\beta_{cr} = 5$ (см. [7], где было также высказано предположение, что $\beta_{cr} = 4$).

Уже в ранних численных экспериментах с системами, гладкость которых была ниже критической $\beta < \beta_{cr} = 3$ наряду с глобальной диффузией наблюдались случаи, когда траектории в течение весьма длительного времени счета не выходили за пределы некоторой ограниченной части фазового пространства [8]. Однако это было не более чем подозрение на подавление или ослабление диффузии. Первый строгий результат здесь был получен Булитом [1]. Для симметричного кусочно-линейного

$2D$ -отображения с $\beta = 2$ Булит доказал существование глобальных инвариантных кривых как с иррациональными, так и с рациональными числами вращения. Такие глобальные инвариантные кривые имеют полную протяженность по фазе, что исключает неограниченную диффузию по действию.

Как уже отмечалось, именно в работе [1] впервые было показано, что среди инвариантных кривых с рациональными числами вращения при определенных значениях параметра возмущения присутствуют также нерасщепленные сепаратрисы целых и дробных нелинейных резонансов. Особенно важным и неожиданным оказался тот факт, что система при этом отнюдь не становится интегрируемой, и сепаратрисы сохраняются и запирают глобальную диффузию в условиях сильного локального хаоса.

Значительно позже для этой же модели симметричного кусочно-линейного отображения аналогичная теорема была независимо доказана Овсянниковым [2]. Он не только указал счетное множество значений параметра K , при которых в условиях сильного локального хаоса сохраняются сепаратрисы целых резонансов, но и нашел для них явное (и довольно простое) выражение. Именно сообщение Овсянникова послужило для нас толчком к интенсивному исследованию этого отображения и его модификаций, результаты которых представлены в работах [9–21]. Теорема Овсянникова нигде не была опубликована, и с разрешения автора мы поместили ее полный текст в приложениях к работам [10,11]. Замечу попутно, что в первых публикациях [9,10] на эту тему статья Булита не упоминается по той простой причине, что на тот момент она еще не была мне известна.

Ранее отмечалось также, что математические работы Булита и Овсянникова ограничены исследованием только самих инвариантных кривых нового типа. Причина в том, что две ветви расщепленных сепаратрис образуют не поддающиеся аналитическим исследованиям случайные траектории (это может быть сделано только в эксперименте — численном [9–21] или физическом).

Как впервые показал Булит [1], каждой инвариантной кривой в отображении (2) отвечает определенное значение параметра возмущения K . В [9] предложено называть такие значения критическими и обозначать их символами $K_{Q,n}$ где Q означает номер резонанса ($Q = 1$ — целый, $Q \geq 2$ — дробный), а n — порядковый номер этого критического числа. В общем случае к двум параметрам критического числа Q, n надо добавлять третий — параметр перекоса пилы d . Мы будем указывать параметр перекоса только в случае несимметричной пилы $d \neq 1/2$.

Для критических чисел целого резонанса при $d = 1/2$ по теореме Овсянникова имеем

$$K_{1,n} = \sin^2 \alpha_n / 2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где α_n есть наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{2} \sin n\alpha / 2 = \cos \alpha / 2. \quad (6)$$

Первые десять критических чисел

n	$Q = 1$	$Q = 2$	$Q = 3$	$Q = 4$	$Q = 5$
1	1/3	$3.3333333 \cdot 10^{-1}$	$3.3333333 \cdot 10^{-1}$	$3.3333333 \cdot 10^{-1}$	$3.3333333 \cdot 10^{-1}$
2	1/8	$2.2949699 \cdot 10^{-1}$	$2.9787198 \cdot 10^{-1}$	$3.2189964 \cdot 10^{-1}$	$3.2960547 \cdot 10^{-1}$
3	$6.1916956 \cdot 10^{-2}$	$1.7387100 \cdot 10^{-1}$	$2.8038338 \cdot 10^{-1}$	$3.1678073 \cdot 10^{-1}$	$3.2801245 \cdot 10^{-1}$
4	$3.6340580 \cdot 10^{-2}$	$1.3985656 \cdot 10^{-1}$	$2.7079692 \cdot 10^{-1}$	$3.1415833 \cdot 10^{-1}$	$3.2721290 \cdot 10^{-1}$
5	$2.3743290 \cdot 10^{-2}$	$1.1700662 \cdot 10^{-1}$	$2.6505200 \cdot 10^{-1}$	$3.1265736 \cdot 10^{-1}$	$3.2676630 \cdot 10^{-1}$
6	$1.6679196 \cdot 10^{-2}$	$1.0061849 \cdot 10^{-1}$	$2.6136469 \cdot 10^{-1}$	$3.1172417 \cdot 10^{-1}$	$3.2648587 \cdot 10^{-1}$
7	$1.2340650 \cdot 10^{-2}$	$8.8293529 \cdot 10^{-2}$	$2.5886807 \cdot 10^{-1}$	$3.1110653 \cdot 10^{-1}$	$3.2630354 \cdot 10^{-1}$
8	$9.4919663 \cdot 10^{-3}$	$7.8686519 \cdot 10^{-2}$	$2.5710423 \cdot 10^{-1}$	$3.1067741 \cdot 10^{-1}$	$3.2617739 \cdot 10^{-1}$
9	$7.5237127 \cdot 10^{-3}$	$7.0986237 \cdot 10^{-2}$	$2.5581434 \cdot 10^{-1}$	$3.1036754 \cdot 10^{-1}$	$3.2608659 \cdot 10^{-1}$
10	$6.1081453 \cdot 10^{-3}$	$6.4674926 \cdot 10^{-2}$	$2.5350778 \cdot 10^{-1}$	$3.1013667 \cdot 10^{-1}$	$3.2601910 \cdot 10^{-1}$

В работах [9–14] при численном поиске критических чисел $K_{Q,n}$ использовался тот факт, что в случае кусочно-линейной силы именно для этих чисел угол пересечения ветвей сепаратрис в центральной гомоклининой точке проходит через нуль (для нечетных номеров n плавно, для четных – скачком меняет знак) [22]. В таблице приведены полученные таким путем значения первых десяти критических чисел для пяти младших резонансов $K_{Q,n}$, $Q = 1 \dots 5$, $n = 1 \dots 10$.

В литературе уже отмечалось то обстоятельство, что из всех атрибутов хаоса только этот угол может быть измерен сколь угодно точно. Заметим, что в общем случае обращение угла пересечения сепаратрис в нуль не является признаком их обязательного сохранения. В [15] приведен пример, когда ветви расщепившихся сепаратрис лишь касаются друг друга в гомоклининой точке, которая оказывается точкой перегиба.

В первой строке таблицы обнаруживается поразительный факт: критическое число любого резонанса равно первому критическому значению целого резонанса $K_{1,1} = 1/3!$ Ни одна хаотическая траектория не может пересечь (и, следовательно, покинуть) границы того резонанса, внутри которого она стартовала. Булит доказал, что именно этими непрозрачными для других сепаратрисами (и только ими) вымощен единичный квадрат фазовой плоскости, причем полная площадь этой мозаики точно равна площади квадрата [1].

Множество всех критических чисел является канторовым, имеются интервалы значений параметра K , где глобальная диффузия определенно имеет место (один такой интервал $0.2295 < K < 0.2500$ для $d = 1/2$ явно указан в [1]).

Дальнейшее изучение показало, что каждая из обнаруженных Булитом глобальных инвариантных кривых (включая нерасщепленные сепаратрисы целых и дробных резонансов), возникающих при определенном значении параметра $K_{Q,n}$ на самом деле существенно искажает структуру фазовой плоскости и в некоторой конечной окрестности $K_{Q,n}$, что позволило предположить в [13] новый термин — виртуальная инвариантная кривая. Наличие таких кривых приводит к совершенно новому и очень сложному типу транспортного процесса в гладкой системе — так называемой фрактальной диффузии (подробности в работах [13,14]). Исследование

этой диффузии сразу обнаружило много открытых и требующих специального рассмотрения вопросов.

Гамильтонова формулировка задачи

Наряду с отображением (1), (2) рассмотрим также непрерывную систему с гамильтонианом вида

$$H(x, p, t) = H_0(x, p) + U(x, t),$$

$$H_0(x, p) = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 V(x), \quad (7)$$

и двухчастотным, в общем случае несимметричным, возмущением

$$U(x, t) = \varepsilon_1 \cos(2\pi m_1 x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(2\pi m_2 x - \Omega_2 t), \quad (8)$$

где m_1, m_2 — целые числа и $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$.

Оба члена в (8) также являются резонансными. Будем полагать первую частоту положительной $\Omega_1 > 0$ и назовем ее верхней гармоникой возмущения (на фазовой плоскости она находится выше основного резонанса). Второй член в (8) при $\Omega_2 < 0$ будем считать нижней гармоникой.

Потенциал системы (2) может быть представлен своим рядом Фурье [13]

$$V(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{2\pi n^{\beta+1}} \cos 2\pi n x, \quad (9)$$

$$f_n = -\frac{2}{\pi^2} \frac{\cos n\pi \sin n\pi d}{d(1-d)},$$

где $\beta = 2$ есть показатель гладкости.

Из формул (9) для особого случая разрывной пилы $d = 0$ предельным переходом получаем

$$f_n = -\frac{2}{\pi} \cos n\pi, \quad \beta = 1. \quad (10)$$

Видно, что показатель гладкости системы β в пределе $d = 0$ на единицу меньше его значения внутри интервала, и оба они меньше критической величины $\beta_{cr} = 3$.

В этом случае движение оказывается эргодическим, инвариантные кривые полностью отсутствуют, и глобальная диффузия происходит при любом $K > 0$. Заметим попутно, что обратный предел $d = 1$ неинтересен, поскольку движение при этом становится регулярным [12].

Характерной особенностью силы (2) является наличие на ее периоде двух участков: с отрицательной („эллиптический“) и положительной („гиперболический“) значениями производной df/dx . На границах этих участков имеет место сингулярность — разрыв первой производной.

Движение по верхней невозмущенной сепаратрисе ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) описывается функцией безразмерного времени $\psi = 2\omega_0 t$ вида

$$x_s(\psi_s) = \begin{cases} A_d \exp(\psi_s / \sqrt{2(1-d)}), & \text{если } -\infty < \psi_s < -\psi_{s,1}, \\ (1 + \sqrt{d} \sin(\psi_s / \sqrt{d})) / 2, & \text{если } -\psi_{s,1} \leq \psi_s \leq \psi_{s,1}, \\ 1 - A_d \exp(-\psi_s / \sqrt{2(1-d)}), & \text{если } \psi_{s,1} < \psi_s < \infty. \end{cases} \quad (11)$$

Импульс находится дифференцированием $p_s = \dot{x} = 2\omega_0 dx_s / d\psi_s$, использованы обозначения

$$\psi_{s,1} = \sqrt{2d} \arcsin \sqrt{d}, \quad A_d = \frac{1-d}{2} \exp \frac{\psi_{s,1}}{\sqrt{2(1-d)}}. \quad (12)$$

Относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии обозначено $\omega = H_0 / H_{0,s} - 1$ при значении гамильтониана на сепаратрисе $H_{0,s} = \omega_0^2 / 4$. Период движения T_0 вблизи сепаратрисы вычисляется по формуле

$$T_0(\omega) = 2T_{s,1} + \frac{1}{\omega^2} \ln \frac{4\sqrt{1-d} \cos \omega_1 T_{s,1}}{|w|}, \quad (13)$$

где

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{d}}, \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{1-d}}, \quad T_{s,1} = \frac{\arcsin \sqrt{d}}{\omega_1}. \quad (14)$$

При численном определении размеров хаотического слоя используется связь относительной энергии w с периодом движения T_0 , которая описывается обратной к (13) зависимостью

$$w(T_0) = 4\sqrt{1-d} \cos \omega_1 T_{s,1} \exp(-\omega_2(T_0 - 2T_{s,1})), \quad (15)$$

вывод формул (11)–(15) можно найти в работе [15].

Далее мы сравним обстоятельства возникновения хаоса в исследуемых гладких системах со случаем хорошо изученного возмущенного маятника, гамильтониан которого запишем в виде

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos x + U(x, t), \quad (16)$$

где частота малых колебаний принята за единицу, и возмущение в общем случае определяется выражением (8).

Интеграл Мельникова—Арнольда для системы (7)

Возмущение, как известно, в общем случае разрушает сепаратрисы основного резонанса и образует на их месте хаотический слой, в котором следует различать три части: верхнюю — вращение фазы при $p > 0$; среднюю — колебания фазы и нижнюю — вращение фазы при $p < 0$. При несимметричном возмущении размеры этих частей могут сильно различаться. Заметим, что верхняя часть слоя формируется под влиянием, в основном, верхних резонансов, нижняя под влиянием нижних, а средняя — и тех и других [15].

Рассмотрим пока одну верхнюю гармонику в непрерывной системе (7), (8) и, следуя описанной в [3] методике, найдем вызванное этой гармоникой изменение невозмущенной энергии H_0 за полупериод колебаний или период вращения

$$\begin{aligned} \Delta H_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \{H, H_0\} dt = -\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \frac{\partial U}{\partial x} dt \\ &= 2\pi m_1 \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(2\pi m_1 x - \tau - \tau_0) dt \\ &= 2\pi m_1 \varepsilon_1 \sin \tau_0 W_{MA}, \end{aligned}$$

где $\{, \}$ — скобка Пуассона, $\tau = \Omega_1 t$ и W_{MA} — интеграл Мельникова—Арнольда

$$W_{MA} = - \int_{-\infty}^{\infty} p_s(t) \cos[2\pi m_1 x_s(t) - \Omega_1 t] dt. \quad (17)$$

Здесь учтена только четная функция в разложении $\sin(2\pi m_1 x - \tau - \tau_0)$ и предположено, что система движется вблизи невозмущенной сепаратрисы (11).

Заметим попутно, что входящий в подынтегральное выражение (17) множитель p_s снимает известную проблему специальной нормировки этого интеграла для подавления его осциллирующей части, поскольку при движении по невозмущенной сепаратрисе асимптотически стремится к нулю на обоих бесконечных пределах интегрирования (см. разд. 4.4 обзора [3]).

Амплитуда гармоники сепаратрисного отображения частоты Ω полностью определяется свойствами и поведением интеграла Мельникова—Арнольда, поскольку пропорциональна ему

$$W = \pm \max |\bar{w} - w| = \pm \frac{\Delta H_0}{H_{0,s}} = \frac{8\pi m \varepsilon}{\omega_0^2} W_{MA}. \quad (18)$$

Перейдя к безразмерному времени $\psi = 2\omega_0 t$ и вычислив соотношение (17) вдоль невозмущенной сепаратрисы (11), найдем, что вклад верхней гармоники возмущения в верхнюю часть хаотического слоя определяется

выражением

$$\begin{aligned}
 W_{MA}(\lambda_1 > 0) = & -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\psi_{s,1}} \cos \frac{\psi}{\sqrt{2d}} \\
 & \times \cos \left[\pi m_1 \left(1 + \sqrt{d} \sin \frac{\psi}{\sqrt{2d}} \right) - \lambda_1 \psi \right] d\psi \\
 & - A_d \sqrt{\frac{2}{1-d}} \int_{\psi_{s,1}}^{\infty} \exp \frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}} \\
 & \times \cos \left(2\pi m_1 A_d \exp \frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}} + \lambda_1 \psi \right) d\psi, \quad (19)
 \end{aligned}$$

где $\lambda_1 = \Omega_1/2\omega_0$ есть параметр адиабатичности [3].

Можно показать, что для вычисления вклада нижней гармоники возмущения в верхнюю часть хаотического слоя вместо (19) следует использовать формулу

$$\begin{aligned}
 W_{MA}(\lambda_2 < 0) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\psi_{s,1}} \cos \frac{\psi}{\sqrt{2d}} \\
 & \times \cos \left[\pi m_2 \left(1 + \sqrt{d} \sin \frac{\psi}{\sqrt{2d}} \right) + |\lambda_2| \psi \right] d\psi \\
 & + A_d \sqrt{\frac{2}{1-d}} \int_{\psi_{s,1}}^{\infty} \exp \frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}} \\
 & \times \cos \left(2\pi m_2 A_d \exp \frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}} - |\lambda_2| \psi \right) d\psi, \quad (20)
 \end{aligned}$$

где $\lambda_2 = \Omega_2/2\omega_0$.

Полная амплитуда сепаратрисного отображения для верхней части слоя определяется с помощью (18) как сумма вкладов в эту часть слоя от всех входящих в возмущение гармоник.

Симметричное возмущение

Выберем параметры возмущения (8) так, чтобы сделать его симметричным

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad m_1 = m_2 = m, \quad \Omega_1 = -\Omega_2 = \Omega. \quad (21)$$

Напомним особенности образования хаоса в зависимости от частоты симметричного возмущения в случае маятника (16): весь диапазон частот условно разбивается на участки низких, средних и умеренных частот и высокочастотный. Исследования Чирикова [3] показали, что в высокочастотном пределе $\Omega \rightarrow \infty$ амплитуда W_s сепаратрисного отображения и энергетический размер хаотического слоя с ростом частоты убывают экспоненциально, и все три части слоя имеют при этом одинаковую ширину

$$|w_{tp} = |w_{md}| = w_{bt} = \lambda W_s, \quad (22)$$

где для маятника (16) $\lambda \equiv \Omega$ и $w = p^2/2 + \cos x - 1$ — относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии.

В недавней работе [16] также для симметричного возмущения маятника рассматривалась низкочастотная асимптотика $\Omega \rightarrow 0$ и было найдено, что в этом случае амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а ширина слоя вообще от нее не зависит.

Обе эти зависимости $\Omega \gg 1$ и $\Omega \ll 1$ устроены относительно просто и наиболее трудной для анализа является область средних частот, где отсутствует какой-либо малый (или большой) параметр адиабатичности. Основная трудность здесь состоит в том, что размер хаотического слоя в этой области оказывается разрывной функцией амплитуды сепаратрисного отображения W_s [18]. Такая структура в рамках современной динамики объясняется тем, что с ростом W_s происходит последовательное разрушение инвариантных кривых с иррациональными числами вращения. Если такая кривая является границей между основным хаотическим слоем и ближайшим к нему резонансом сепаратрисного отображения, то при ее разрушении происходит слияние этих объектов и размер слоя прирастает на конечную величину — фазовый объем присоединившегося резонанса.

Весьма полезными здесь оказались так называемые резонансные инварианты, которые неплохо передают топологию отдельных резонансов. Техника построения и примеры использования таких инвариантов первых трех порядков, соответствующих резонансам 1:1, 1:2 и 1:3, предложены для стандартного отображения в работе [17] и для одночастотного сепаратрисного отображения в [18].

Вернемся вновь к гладкой системе и выясним особенности образования хаоса при низких и высоких частотах. Суммируя вклады от обеих гармоник, получаем выражение результирующего интеграла Мельникова–Арнольда для верхней части слоя

$$\begin{aligned}
 W_{MA}(\lambda) = & \sqrt{2} \int_0^{\psi_{s,1}} \cos \frac{\psi}{\sqrt{2d}} \\
 & \times \sin \left[\pi m \left(1 + \sqrt{d} \sin \frac{\psi}{\sqrt{2d}} \right) \right] \sin(\lambda \psi) d\psi \\
 & + 2A_d \sqrt{\frac{1}{1-d}} \int_{\psi_{s,1}}^{\infty} \exp \frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}} \\
 & \times \sin \left(2\pi m A_d \exp \frac{-\psi}{\sqrt{2(1-d)}} \right) \sin(\lambda \psi) d\psi \quad (23)
 \end{aligned}$$

где $\Lambda = \Omega/2\omega_0$. Первое слагаемое в этой формуле описывает вклад от „эллиптического“ участка силы, второе — от остальной части.

Начнем со случая $\lambda \rightarrow 0$. Заменим в обеих частях (23) $\sin \lambda \psi \rightarrow \lambda \psi$, вынесем λ за знак интеграла и найдем, что в низкочастотном пределе интеграл Мельникова–Арнольда (а значит, и амплитуда сепаратрисного отображения W_s) растет линейно с частотой

$$W_s \sim W_{MA} \sim \lambda. \quad (24)$$

Подчеркнем, что учет бесконечных пределов интегрирования в (23) ничего не меняет, поскольку, как отмечено выше, вклад „хвостов“ этого интервала подавлен асимптотически стремящейся к нулю величиной импульса на невозмущенной сепаратрисе.

В работе [16] показано, что если амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, то ширина хаотического слоя от нее не зависит. Это подтверждается численно, и мы убеждаемся, что в низкочастотном пределе система с кусочно-линейной силой и маятник ведут себя качественно одинаково.

Перейдем к анализу случая высокой частоты $\Omega \rightarrow \infty$, где картина резко изменяется. В этом пределе оба слагаемых в (23) оказываются колебательными и знакопеременными, их колебания находятся почти в противофазе. Результирующая функция $W_{MA}(\lambda)$ также является знакопеременной и колебательной (рис. 1).

В работе [15] выполнены некоторые асимптотические ($\lambda \rightarrow \infty$) оценки интегралов Мельникова–Арнольда (19), (20), которые позволяют сделать следующие выводы.

Эти интегралы при $\lambda \gg 1$ оказываются периодически по λ функциями

$$W_{MA}(\lambda) \approx (-1)^m \frac{|\lambda|^{-3}}{4d} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \left[1 \pm \pi |\lambda|^{-1} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \right] \times \sin(\pi m d \mp |\lambda| \psi_{s,1}), \quad (25)$$

(верхние знаки отвечают верхней гармонике) с периодом

$$T_\lambda = \frac{2\pi}{\psi_{s,1}} = \frac{\pi}{\arcsin \sqrt{d}} \sqrt{\frac{2}{d}}. \quad (26)$$

На рис. 1 построены зависимости приведенного интеграла Мельникова–Арнольда $W_{MA}^* = W_{MA} \lambda^3$ для симметричной пилы $d = 1/2$. При значениях $d \neq 1/2$

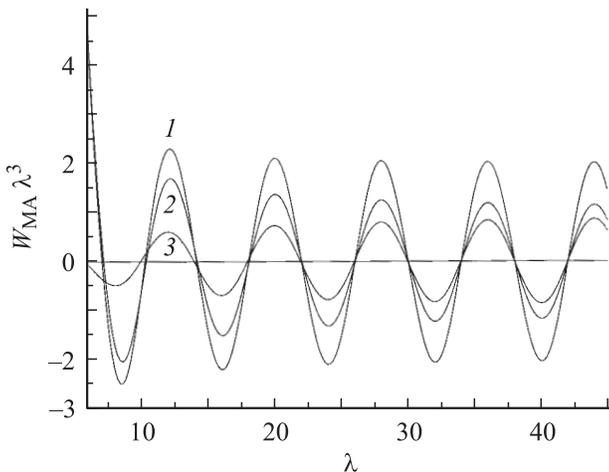


Рис. 1. Высоочастотная асимптотика $\Omega \rightarrow \infty$ интеграла Мельникова–Арнольда при симметричном возмущении. Кривая 1 описывает совместное действие верхней и нижней гармоник возмущения, 2 — одной верхней и 3 — одной нижней гармоники.

характер этих зависимостей остается таким же, но гармоники изменяются по величине и сдвигаются по фазе. Формулы (25) качественно правильно передают характер этих зависимостей, хотя и нуждаются в числовых поправках.

Выполненное в [11] итерирование сепаратрисного отображения для полученных через интеграл Мельникова–Арнольда амплитуд показало, что найденная Чириковым связь (22) между шириной хаотического слоя и амплитудой сепаратрисного отображения W_s неплохо выполняется и для гладкой системы

$$w_{tp} \approx \lambda |W_s|, \quad (27)$$

причем даже в окрестности нулевых значений W_s . При $\lambda = \Omega/2\omega_0 > 10$, например, имеет место неравенство $0.94 \leq w_{tp}/\lambda |W_s| \leq 1.3$.

Найденные при $\Omega \gg 1$ для гладкой системы периодические зависимости с убывающей по степенному закону $\sim \lambda^{-3}$ амплитудой резко и качественно отличаются от случая аналитического потенциала, где $W_{MA}(\lambda)$ — всегда монотонная и экспоненциально убывающая функция λ . Более того, при одинаковых по модулю частотах вклад нижней гармоники в верхнюю часть хаотического слоя меньше вклада верхней гармоники в $\exp(-\pi|\lambda|)$ раз [3]. В системе с кусочно-линейной силой все иначе — с ростом частоты вклады в сепаратрисное отображение верхней и нижней гармоник сближаются. Столь глубокие различия двух обсуждаемых типов систем связаны, по-видимому, с существенно различным расположением сингулярностей интеграла Мельникова–Арнольда: для гладкого потенциала они находятся на действительной оси времени, а для маятника — в комплексной плоскости.

Полученные выше для непрерывной гладкой системы (7) результаты можно прямо связать с отображением (1), (2). Будем называть критическими те значения $\lambda_{1,n}$ $n = 1, 2, \dots$, при которых интеграл Мельникова–Арнольда проходит через нуль $W_{MA}(\lambda_{1,n}) = 0$ (напомним, что первый индекс относится к основному резонансу). Чтобы перевести непрерывную систему (7) с параметром λ в отображение (1), (2) с параметром K или наоборот, надо воспользоваться соотношением

$$K = \omega_0^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Последнее равенство позволяет пересчитать критические значения $\lambda_{1,n}$ непрерывной системы в критические значения параметра отображения. Обозначив найденные путем такого пересчета величины через K^* , получим

$$K_{1,n}^* = \left(\frac{\pi}{\lambda_{1,n}}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти числа следует сравнить с величинами $K_{1,n}$, вычисленными по формулам Овсянникова (5), (6). Результат такого сравнения хорошо описывается приближенной формулой

$$\frac{K_{1,n}}{K_{1,n}^*} \approx 1 + 0.676n^{-0.875}, \quad n = 1, 2, \dots$$

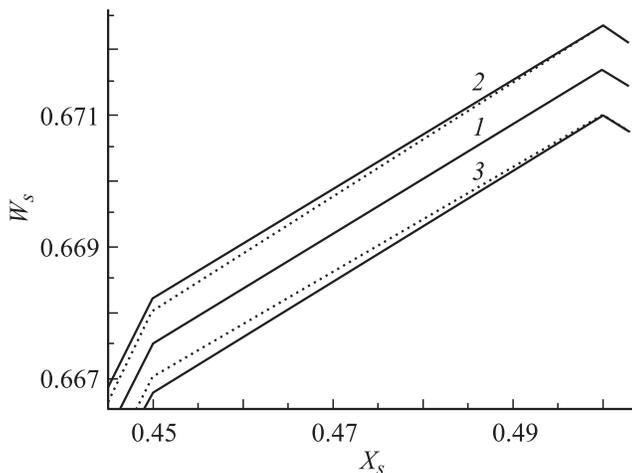


Рис. 2. Окрестность центральной гомоклининой точки $x = 0.5$ для непрерывной системы (7). Демонстрация эффекта сохранения и расщепления сепаратрис. Кривая 1 построена для нуля интеграла Мельникова–Арнольда $\lambda_0 = 14.35$, 2 — для $\lambda = 14.5$ и 3 — для 14.2. Сплошные зависимости относятся к ходу времени вперед, пунктир — назад.

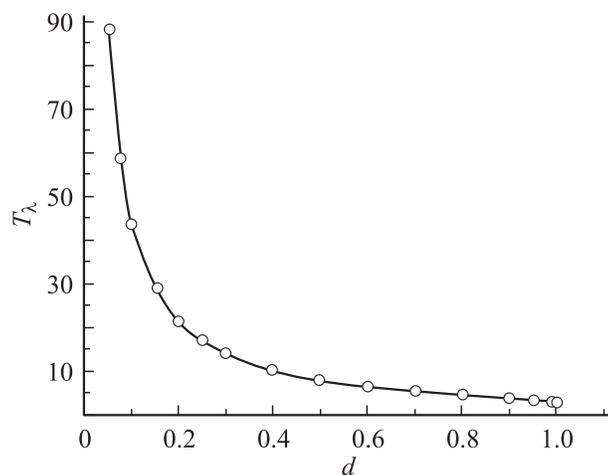


Рис. 3. Зависимость периода интеграла Мельникова–Арнольда T_λ от параметра перекоса в интервале $0 < d \leq 1$. Сплошная линия — расчет по формуле (26), кружки — расстояния между соседними нулями численно построенной зависимости интеграла (23).

В асимптотическом пределе ($n \gg 1$) множества $K_{1,n}$ и $K_{1,n}^*$ совпадают, что и оправдывает применение полученных здесь результатов непрерывной системы (7) в отношении отображения (1), (2).

Вместе с тем сами величины критических параметров $\lambda_{1,n}$ и $K_{1,n}$ заметно отличаются друг от друга (особенно при небольших значениях n , см. последнюю формулу). Убедимся, что фундаментальной важности факт сохранения сепаратрис имеет место также и для непрерывной системы (7). На рис. 2 отражены три случая поведения ветвей сепаратрис („усов“, по об-

разному выражению Арнольда) на интервале слева от центральной гомоклининой точки $x = 0.5$.

Выше отмечалось, что при изменении параметра перекоса d во всем возможном интервале значений $0 < d < 1$ поведение системы качественно не изменяется, хотя численные данные могут изменяться заметно. Это обстоятельство можно увидеть из рис. 3, где приведены зависимости периода интеграла Мельникова–Арнольда T_λ , полученные по формуле (26) и численно по расстоянию между соседними нулями (23).

Динамика критических режимов

В данном разделе мы вновь возвращаемся к отображению (1), (2) и хотим проследить динамику режима при изменении параметра возмущения K в некотором интервале значений вокруг второго критического числа $K_{1,2} = 1/8$. Мы обнаружим резкую неасимметрию при отклонении возмущения от этого критического значения как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения.

На малом окне рис. 4 показана область, которую заняла одна хаотическая траектория при фиксированной величине параметра системы, равной второму критическому числу $K = K_{1,2} = 1/8$. Нижняя и верхняя границы этой области весьма близки (это определение будет далее уточнено) к вычисленным по точным формулам Овсянникова сепаратрисам целых резонансов.

Здесь все противоречит представлениям „обычной“ динамики. Известно, что имеется бесконечно много „нетипичных“ гамильтоновых систем, у которых сепаратрисы всех резонансов нерасщеплены. Это так называемые полностью интегрируемые системы, в дина-

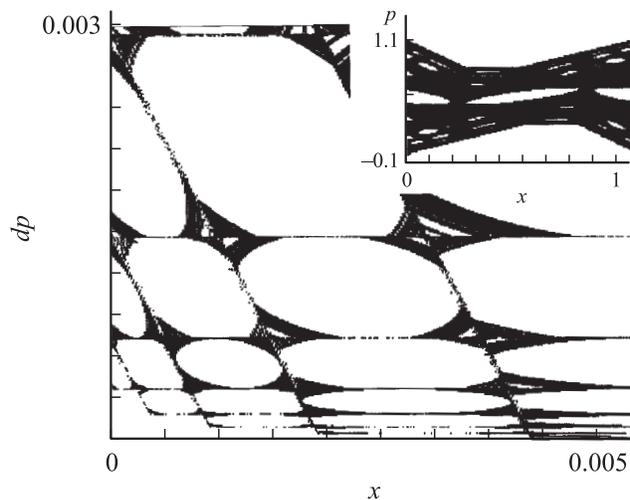


Рис. 4. Параметр системы равен второму критическому числу целого резонанса $K = K_{1,2} = 1/8$. Малое окно: область, занятая единственной траекторией с начальными координатами $x = 0$, $p = 0.37$. Число итераций отображения равно 10^9 . Большое окно: сильно увеличенная малая область „щели“ (по импульсу) между этой траекторией и нижней сепаратрисой целого резонанса; здесь $dp = p - p_s$, $p(x)$ — минимальный импульс на траектории, $p_s(x)$ — импульс на сепаратрисе.

мическом поведении которых нет никакого хаоса [3–5]. Поразительной особенностью ситуации на рис. 4 является сосуществование сохранившихся сепаратрис двух соседних целых резонансов с областью мощного хаоса, где все инвариантные кривые с самыми устойчивыми иррациональными числами вращения разрушены и хаотические слои всех дробных резонансов перекрыты.

В этом и заключается, по-видимому, главный динамический эффект критических чисел: сепаратрисы резонансов не только не разрушаются и не формируют хаотический слой, но и образуют устойчивое инвариантное многообразие, не позволяющее другим траекториям себя пересекать. Имея полную протяженность по фазе, они, как плотины, разгораживают фазовое пространство на изолированные друг от друга части. Для приложений это обстоятельство представляется особенно существенным, поскольку оно запрещает глобальную диффузию по импульсу и исключает, например, неограниченный рост энергии частиц.

Уместно заметить, что вдали от критических чисел никаких непроходимых барьеров, по-видимому, нет, и система ведет себя „как обычно“. Например, при $K = 0.3$, $d = 1/2$ стартовавшая при начальных условиях $x = 0$, $p = 0.123$ хаотическая траектория за 10^6 итераций „побывала“ в областях семи соседних целых резонансов.

Выше отмечалось, что хаотическая траектория на рис. 4 весьма близко подходит к сепаратрисам. Для получения количественной оценки этой близости фиксировалось минимальное (по импульсу) расстояние между этой траекторией и вычисленными по точным формулам (5), (6) сепаратрисами целых резонансов. Оказалось, что между траекторией и нижней сепаратрисой имеется „щель“, минимальная ширина которой $dp_{\min} \approx 3 \cdot 10^{-6}$ (что можно объяснить недостаточным временем счета). В большом окошке рис. 4 показана увеличенная ее часть, из которой видно, что эта щель заполнена дробными резонансами относительно высоких порядков $1:Q$ (самый нижний еще различимый на рисунке резонанс есть $1:23$).

Получим оценку времени достижения сепаратрисы при $K = K_{1,2} = 1/8$. Из рис. 4 видно, что чем выше порядок резонанса, тем ближе к сепаратрисе он находится и тем большее время требуется для проникновения в него. Но прямое измерение времени попадания траектории из „хаотического моря“ внутрь дробного резонанса высокого порядка технически невозможно. По этой причине мы находили другую величину — время T_e выхода из области резонанса траектории, стартовавшей внутри него. Для каждого из доступных для измерений значений резонансов Q при $K = K_{1,2} = 1/8$ было вычислено по 500 хаотических траекторий, и обработка результатов методом наименьших квадратов привела к зависимости

$$\langle T_e \rangle = 80 \exp(0.705Q)(1 \pm 0.07), \quad (28)$$

которая подтверждает ожидаемый результат: $\langle T_e \rangle \rightarrow \infty$ при $Q \rightarrow \infty$.

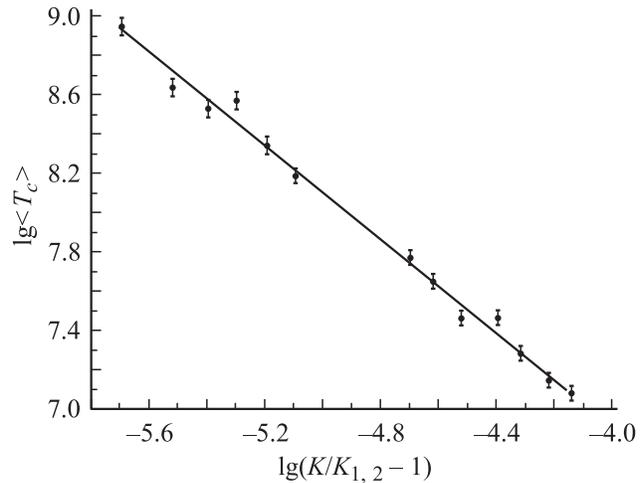


Рис. 5. Среднее время (в итерациях) выхода системы из области целого резонанса при отклонении параметра возмущения от критического числа $K_{1,2} = 1/8$ в сторону увеличения.

Теперь посмотрим, что происходит при изменении величины возмущения K . Начнем с интервала $0 < K - K_{1,2} < 1.25 \cdot 10^{-5}$, где $K > K_{1,2}$ и нет других критических чисел. В этом интервале сепаратриса пропускает траектории, но среднее время (число итераций) $\langle T_c \rangle$ прохождения целого резонанса зависит от величины расстройки по возмущению $\Delta K = K - K_{1,2} > 0$. Для выяснения этой зависимости были выполнены следующие измерения.

Для ряда фиксированных значений параметра $K = K_{1,2} + \Delta K$ в области между двумя соседними целыми резонансами запускалось по сто случайных хаотических траекторий и определялось среднее время T_c первого их появления либо ниже нижнего, либо выше верхнего целых резонансов. Принципиально важно выбирать начальные условия так, чтобы траектории гарантированно были хаотическими, ибо только они могут покидать „свой“ резонанс и переходить к другим. Это обстоятельство во всех случаях специально проверялось по величине и поведению ляпуновского показателя [3].

Результаты описанных измерений приведены на рис. 5, и их обработка по методу наименьших квадратов позволяет написать эмпирическую формулу для среднего времени прохождения целого резонанса

$$\langle T_c \rangle = 135 \left(\frac{K_{1,2}}{K - K_{1,2}} \right)^{1.193} (1 \pm 0.09), \quad K > K_{1,2}. \quad (29)$$

Видно, что по мере приближения сверху к критическому режиму время прохождения неограниченно растет.

Посмотрим теперь, что происходит при отклонении параметра системы K от критической величины $K_{1,2}$ в сторону уменьшения. Выяснилось, что возникающая при этом динамическая ситуация оказывается качественно иной. Начнем с обсуждения обстановки в „щели“ между хаотической траекторией и сепаратрисой нижнего целого резонанса (для краткости назовем ее главной сепаратрисой).

Q	13	15	17	19	21	23
$K_{1,2} - K_Q$	$6.71 \cdot 10^{-8}$	$4.19 \cdot 10^{-9}$	$2.62 \cdot 10^{-10}$	$1.63 \cdot 10^{-11}$	$1.02 \cdot 10^{-12}$	$6.39 \cdot 10^{-14}$

Центральные гомоклинные точки при нечетных значениях $Q = 13, 15, 17, 19, \dots$ находятся на первой линии симметрии $x = 0$, что позволяет применять к ним нашу технику измерения угла пересечения сепаратрис. Основным интерес здесь представляют критические числа, ближайšie к величине $K_{1,2} = 1/8$, для которой построен рис. 4, результаты приведены выше. Здесь указана разность между $K_{1,2} = 1/8$ и критическим числом K_Q резонанса $1:Q$. Видно, что все измеренные критические числа располагаются ниже значения $K_{1,2} = 1/8$.

Из этих данных можно сделать два важных вывода. При $K \lesssim K_{1,2}$ имеется густая сетка критических чисел. Все они располагаются при $K < K_{1,2}$ и их величины тем ближе к $K_{1,2}$, чем выше порядок резонанса Q . С ростом числа Q его число вращения $1/Q$ и критическое число K_Q стремятся снизу к числу вращения (нулю) и критическому числу $K_{1,2} = 1/8$ главной сепаратрисы.

Подведем итоги рассмотрения. В критическом режиме при $K = K_{1,2} = 1/8$ резонансы высоких порядков располагаются плотными слоями тем ближе к сепаратрисе, чем выше порядок резонанса Q . Чтобы попасть в очередной слой, необходимо пересечь предыдущий. Как показывает формула (28), при этом время подхода к сепаратрисе неограниченно растёт.

В надкритическом режиме $K \gtrsim K_{1,2}$ траектории удаётся пересечь целый резонанс, затрачивая на это тем больше времени, чем ближе K к $K_{1,2}$. При $K = K_{1,2}$ в процессе очень длительной эволюции траектория может подойти к главной сепаратрисе сколь угодно близко, но никогда ее не достигнет.

В подкритическом режиме возникает счетное множество критических чисел, где $K = K_{1,2}$ является, по-видимому, точкой сгущения снизу. Траектория при этом не может пересечь находящийся в своем критическом режиме очередной дробный резонанс и подойти к главной сепаратрисе на расстояние, меньше некоторого.

Является ли описанный сценарий типичным и справедлив ли он в отношении сепаратрис не только целых, но и дробных резонансов — один из открытых вопросов.

Заключение

В настоящей статье (как и в [21]) представлено начатое математическими работами [1,2] исследование семейства гладких гамильтоновых систем с кусочно-линейной силой, обнаружившее ряд новых и неожиданных эффектов.

Сохранение сепаратрис нелинейных резонансов при наличии локального хаоса и полное подавление диффузии по импульсу в критических режимах, фрактальный характер этой диффузии в окрестности (по параметру возмущения) таких режимов, периодическая и степенная зависимость интегралов Мельникова–Арнольда от частоты и другие эффекты не имеют аналогов в случае аналитических гамильтонианов. Обнаружение этих эффектов заставляет пересмотреть некоторые, казалось бы надежно установленные, представления. К числу последних относятся утверждения о том, что возмущение всегда в первую очередь разрушает сепаратрисы нелинейных резонансов с рациональными числами вращения, а в последнюю очередь разрушаются инвариантные кривые с иррациональными числами вращения. Как отмечалось выше, широкий спектр вопросов породило начатое недавно исследование фрактальной диффузии.

Поиск ответов на эти вопросы, так же как и поиск других систем с таким же или близким динамическим поведением, следует, по нашему мнению, продолжить.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке комплексной научной программы РАН „Математические методы в нелинейной динамике“.

Список литературы

- [1] *Bullett S.* // Commun. Math. Phys. 1986. Vol. 107. P. 241.
- [2] *Овсянников Л.В.* // Частное сообщение. 1999.
- [3] *Chirikov B.V.* // Phys. Reports. 1979. Vol. 52. P. 263.
- [4] *Lichtenberg A., Lieberman M.* Regular and Chaotic Dynamics. Berlin. Springer, 1992.
- [5] *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
- [6] *Chirikov B.V.* // Chaos, Solitons and Fractals. 1991. Vol. 1. P. 79.
- [7] *Moser J.* Stable and Random Motion in Dynamical Systems: Princeton University Press, 1973.
- [8] *Chirikov B.V., Keil E., Sessler A.* // J. Stat. Phys. 1971. Vol. 3. P. 307.
- [9] *Вечеславов В.В.* Необычная динамика пилообразного отображения. Препринт ИЯФ 99-69, Новосибирск, 1999.
- [10] *Вечеславов В.В.* Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты. Препринт ИЯФ 2000-27. Новосибирск, 2000; E-print archive nlin. CD/0005048.
- [11] *Вечеславов В.В.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. Вып. 4. С. 853.
- [12] *Вечеславов В.В., Чириков Б.В.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. Вып. 3. С. 740.
- [13] *Вечеславов В.В., Чириков Б.В.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. Вып. 1. С. 175.
- [14] *Chirikov B.V., Vecheslavov V.V.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. Вып. 3. С. 647.

- [15] Вечеславов В.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 1.
- [16] Вечеславов В.В. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 5. С. 1.
- [17] Вечеславов В.В. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 1. С. 20.
- [18] Вечеславов В.В. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 2. С. 20.
- [19] Вечеславов В.В. // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. Вып. 2. С. 399.
- [20] Вечеславов В.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 6.
- [21] Вечеславов В.В. // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. Вып. 4. С. 915.
- [22] Вечеславов В.В., Чириков Б.В. // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. Вып. 4. С. 1516.