

01;05

Распределение магнитного поля, созданного током, протекающим по пластине, находящейся в сверхпроводящем и нормальном состоянии

© Д.Д. Прокофьев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: d.prok@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 8 сентября 2005 г.)

Рассчитано магнитное поле, созданное током, протекающим в длинной пластине. Для однородного распределения тока приведены простые формулы, позволяющие вычислить компоненты внутри и вне пластины. Расчет магнитного поля при неоднородном распределении тока выполнен для случая тонкой (с толщиной порядка глубины проникновения магнитного поля) широкой сверхпроводящей пленки численно. Показано, как на распределение поля тока влияет вид функциональной зависимости плотности тока. Проведено сравнение с результатами расчета по теории, в которой пленка конечной толщины рассматривается как двумерная (бесконечно тонкая). Проведено сравнение рассчитанных магнитных полей с экспериментальными данными. Для ряда точек в плоскости, параллельной поверхности пластины и проходящей через ее середину, проведено сравнение с результатом простого суммирования частичных вкладов в полное поле.

PACS: 11.10.-z, 41.20.-q

Введение

Знание распределения магнитного поля в сверхпроводнике, являющегося суперпозицией внешнего поля и поля экранирующих и транспортных токов, необходимо для определения начала проникновения магнитного потока в сверхпроводник с ненулевым размагничивающим фактором, определения магнитного момента сверхпроводника, вычисления потерь на переменном токе. Расчеты токов и полей в пластине, находящейся в поперечном магнитном поле, основаны на решении уравнений Максвелла совместно или с уравнениями теории Ф. и Х. Лондонов [1–3], или с задаваемыми феноменологически зависимостями $j = j(E)$ и $B = B(H)$ [4–6]. Так, в работе [1] найдено распределение токов и полей в очень тонких (с толщиной d , меньшей глубины проникновения λ и длины когерентности Гинзбурга–Ландау ξ) пленках произвольной ширины. В высокотемпературных сверхпроводниках трудно удовлетворить условию $d < \xi$, поскольку $\xi(T) \sim \xi(0)/(1 - T/T_c)^{1/2}$, а $\xi(0) \sim 2$ nm, так, например, при $d = 200$ nm оно будет выполняться в узком интервале температур $T_c - T \sim 0.01$ K. В работах [4,5] рассмотрена задача о распределении тока в сверхпроводящей пластине (с размерами $d \ll w \ll L$, где w — ширина, L — длина) в поперечном магнитном поле, при наличии транспортного тока, или в поле с транспортным током. Распределение тока получается в виде $J(x) \sim [1 - (2x/w)^2]^{-1/2}$ в отсутствие поля и $J(x) \sim x[1 - (2x/w)^2]^{-1/2}$ — для экранирующих токов во внешнем поле, приложенном перпендикулярно пластине. В этих работах расчет ведется с использованием слоевой, т. е. проинтегрированной по толщине, плотности тока $J(x) = \int_{-d/2}^{d/2} j(x, y) dy$, которая рассматривается

как линейная плотность тока на двумерной (бесконечно тонкой) плоской полосе ширины w . Таким образом, рассматривается двумерная модель реальной пластины с линейной плотностью тока, изменяющейся вдоль ширины. Характерной особенностью вышеупомянутого распределения экранирующих токов является точная компенсация внешнего (перпендикулярного) поля на поверхности двумерной пленки — аналог мейсснеровского состояния, существующего в трехмерном сверхпроводнике в не слишком больших полях. В двумерной модели можно получить распределение поля вне пластины и оценить поле на поверхности, но не внутри. Недостатком модели является также расходимость поля на краях пленки при $x = \pm w/2$. Представляется интересным провести прямой расчет поля, пользуясь уже известным распределением тока, и сравнить с результатами, полученными другими способами. В данной работе проведен расчет поля тока внутри и вне пластины конечной, порядка λ , толщины. При этом использовались приведенные в литературе результаты для зависимости плотности тока в пластине от координат и проведено сравнение с результатами, полученными для двумерной модели.

Другая задача по определению поля тока возникает при измерении токов распаривания в узких тонких пленках сверхпроводников. В этом случае распределение тока близко к однородному, существующему в нормальном состоянии, если выполняется неравенство $dw < [\lambda(T)]^2$, см. [7]. Для однородного распределения получены формулы, позволяющие рассчитать поле тока в любой точке плоскости, перпендикулярной к бесконечно длинной пластине с током, при произвольном соотношении между λ , d и w . Тогда, если поле тока во всех точках образца меньше H_{int} (где поле проникновения H_{int} может превышать H_{c1} из-за поверхностного Бина–Ливингстона

или геометрического барьера), можно быть уверенным в том, что критический ток определяется распадом куперовских пар, а не образованием и движением вихрей. Полученные результаты приведены в разд. 2. Показано, что максимальное поле, возникающее на средней линии боковой плоскости образца, может быть (в зависимости от отношения d/w) как больше, так и меньше величины, получаемой при оценке поля тока, например в работе [8], как поля бесконечной в двух направлениях пластины с током [9].

1. Расчет поля для пластины с однородным током

Чтобы определить поле в данной точке, нужно вычислить векторную сумму вкладов от всех элементов тока в соответствии с законом Био–Савара–Лапласа

$$d\mathbf{H} = (1/cR^3) [\mathbf{j}\mathbf{R}] dx dy dz, \quad (1)$$

где \mathbf{j} — плотность тока в точке (x, y, z) , \mathbf{R} — вектор, проведенный из точки (x, y, z) в точку наблюдения (t, u, v) . В рассматриваемом случае бесконечной прямой полосы из однородного материала с осью z , направленной вдоль длины, плотность тока не зависит от z , т.е. $j = j(x, y)$, а компонента поля $H_z = 0$. Ось y направлена перпендикулярно поверхности таким образом, что пластина ограничена плоскостями $y = \pm d/2$, а ось x — так, что ограничивающими поверхностями являются $x = \pm w/2$. Поскольку в данной задаче нет зависимости от z -координаты, достаточно вычислить компоненты поля в плоскости $x-y$ $H_x(x, y)$ и $H_y(x, y)$. Выражение для H_y записывается следующим образом:

$$H_y(t, u) = \frac{1}{c} \int j(x, y) \frac{\sqrt{(t-x)^2 + (u-y)^2}}{[(t-x)^2 + (u-y)^2 + (v-z)^2]^{3/2}} \times \frac{t-x}{\sqrt{(t-x)^2 + (u-y)^2}} dx dy dz. \quad (2)$$

Произведение двух первых множителей в подынтегральном выражении есть модуль векторного произведения (1), третий — косинус угла между вектором $d\mathbf{H}$ и осью y (рис. 1, а). В выражении для H_x при выбранном направлении осей числитель третьего сомножителя в (3) надо заменить на $(y-u)$. Поскольку в настоящей работе рассматриваются случаи $j = \text{const}$ и $j = j(x)$, в выражении (2) можно взять интегралы по z (от $-\infty$ до ∞) и по y (от $-d/2$ до $d/2$) В результате получаем

$$H_x(t, u) = \frac{1}{c} \int_{-w/2}^{w/2} j(x) \{ \ln [4(t-x)^2 + (2u-d)^2] - \ln [4(t-x)^2 + (2u+d)^2] \} dx, \quad (3)$$

$$H_y(t, u) = \frac{2}{c} \int_{-w/2}^{w/2} j(x) \left[\arctg \frac{2u+d}{2(t-x)} - \arctg \frac{2u-d}{2(t-x)} \right] dx. \quad (4)$$

Для однородного распределения тока j выносятся из-под знака интеграла, и в результате интегрирования получается выражение для H_x и H_y в произвольной точке плоскости $x-y(t, u)$:

$$H_x(t, u) = \frac{j}{c} \left\{ (d+2u) \left(\arctg \frac{2t-w}{2u+d} - \arctg \frac{2t+w}{2u+d} \right) + (d-2u) \left(\arctg \frac{2t-w}{2u-d} - \arctg \frac{2t+w}{2u-d} \right) + t \ln \frac{[(2t-w)^2 + (2u+d)^2][(2t+w)^2 + (2u-d)^2]}{[(2t-w)^2 + (2u-d)^2][(2t+w)^2 + (2u+d)^2]} + \frac{w}{2} \ln \frac{[(2t+w)^2 + (2u-d)^2][(2t-w)^2 + (2u-d)^2]}{[(2t+w)^2 + (2u+d)^2][(2t-w)^2 + (2u+d)^2]} \right\}, \quad (5)$$

$$H_y(t, u) = \frac{j}{c} \left\{ (2t-w) \left(\arctg \frac{2u-d}{2t-w} - \arctg \frac{2u+d}{2t-w} \right) + (2t+w) \left(\arctg \frac{2u+d}{2t+w} - \arctg \frac{2u-d}{2t+w} \right) + u \ln \frac{[(2t-w)^2 + (d-2u)^2][(2t+w)^2 + (d+2u)^2]}{[(2t-w)^2 + (d+2u)^2][(2t+w)^2 + (d-2u)^2]} + \frac{d}{2} \ln \frac{[(2t+w)^2 + (d+2u)^2][(2t-w)^2 + (d-2u)^2]}{[(2t-w)^2 + (d-2u)^2][(2t+w)^2 + (d+2u)^2]} \right\}. \quad (6)$$

На оси x $H_x = 0$, а выражение (6) сводится к

$$H_y(t) = \frac{j}{c} \left[(2(2t+w) \arctg \frac{d}{2t+w} - 2(2t-w) \arctg \frac{d}{2t-w} + d \ln \frac{(2t+w)^2 + d^2}{(2t-w)^2 + d^2} \right]. \quad (7)$$

Поле H_y на оси x может быть получено более простым и наглядным способом. В дискретном наборе точек, находящихся на расстоянии nd друг от друга (n — целое), оно может быть оценено (при однородном распределении тока) путем алгебраического сложения вкладов $N \approx w/d$ вписанных в пластину цилиндров диаметром d (рис. 1, б), каждый из которых несет ток $I_1 = I/N$, где I — полный ток, текущий по пластине. Поле тока, текущего по цилиндру, вне цилиндра определяется по формуле $H_1 = 2I_1/(cr)$, где r — расстояние от центра, внутри поле линейно падает по радиусу и равно 0 в центре. Поля на оси x от всех вписанных цилиндров коллинеарны, и их сумма в точке $x = nd$, если $N = 2m$, и в $x = (n+1/2)d$, если $N = 2m+1$, равна

$$H_y(n) = \frac{4I}{cw} \left(\sum_{i=0}^{k(n)} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=0}^{|m-n|-1} \frac{1}{2i+1} \right) = \frac{2I}{cw} [\psi(k(n)+3/2) - \psi(|m-n|+1/2)], \quad (8)$$

где $k(n) = m+n-1$ для четного N и $m+n$ — для нечетного, $\psi(x)$ — дигамма-функция. Первое равенство в формуле (8) получено суммированием вкладов

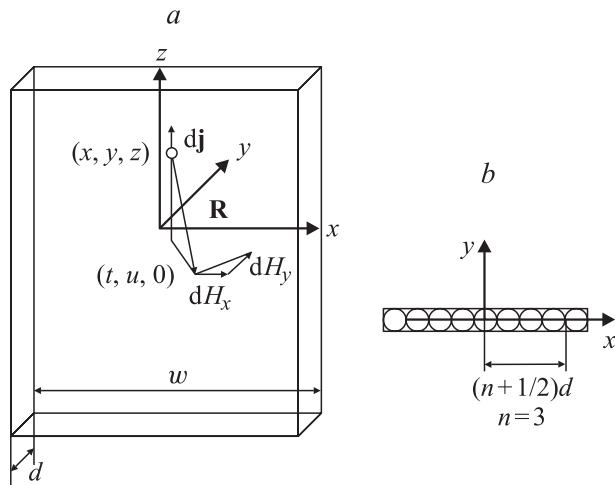


Рис. 1. *a* — вычисление проекций dH_x и dH_y элемента поля $d\mathbf{H}$, созданного элементом тока $dj(x, y, z)$ в точке наблюдения $(t, u, 0)$. \mathbf{R} — вектор, проведенный из точки (x, y, z) в точку $(t, u, 0)$. *b* — аппроксимация поля, созданного однородным током, протекающим по прямоугольной пластине, совокупностью полей вписанных цилиндров.

от цилиндров слева и справа от точки наблюдения, находящейся внутри пластины. Можно показать, что формула (8) правильно описывает поле и за краем пластины. Второе равенство в (8) является следствием соотношения

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} = 0.5[\psi(N+3/2) + C] + \ln 2,$$

где $C \approx 0.577$ — число Эйлера. Зависимость $H_y(x, 0)$, полученная по формуле (7), приведена на рис. 2, кривая 1. Квадратиками обозначены точки, рассчитанные по формуле (8). За исключением точки на краю пластины наблюдается хорошее количественное согласие между результатами, полученными по формулам (7) и (8).

Поле тока пластины максимально в точке $(w/2, 0)$, и в случае однородного тока оно может быть вычислено по формуле

$$H_{\max} = H_y(w/2, 0) = \frac{j}{c} \left(4w \operatorname{arctg} \frac{d}{2w} + d \ln \frac{4w^2 + d^2}{d^2} \right). \quad (9)$$

Приведем также выражения для компонент поля в угловой точке $(w/2, d/2)$ при однородном распределении тока в пластине

$$H_y(w/2, d/2) = \frac{j}{c} \left(2w \operatorname{arctg} \frac{d}{w} - d \ln \frac{d^2}{d^2 + w^2} \right), \quad (10)$$

$$H_x(w/2, d/2) = \frac{j}{c} \left(w \ln \frac{w^2}{w^2 + d^2} - 2d \operatorname{arctg} \frac{w}{d} \right). \quad (11)$$

Величина полного поля в угловой точке $H(w/2, d/2) = [H_x^2(w/2, d/2) + H_y^2(w/2, d/2)]^{1/2}$ меньше, чем величина поля $H_y(w/2, 0)$.

Представляет определенный интерес вопрос то, как меняются поля $H_y(w/2, 0)$ и $H_x(0, d/2)$ при изменении размеров пластины. Поскольку для оценки поля тока в плоской геометрии нередко используется формула поля бесконечной (в двух направлениях) пластины с током $H(\text{inf}) = 2\pi J/c$ [8] в данной работе проведено вычисление отношений полей в точках $(w/2, 0)$ и $(0, d/2)$ к $H(\text{inf})$ в зависимости от отношения w/d . На рис. 3 представлены зависимости $H_y(w/2, 0)/H(\text{inf})$, кривая 1, и $[-H_x(0, d/2)]/H(\text{inf})$, кривая 3 (знак минус выбран по той причине, что при выбранных направлениях осей и тока поле $H_x(0, d/2)$ отрицательно). Как видно из рис. 3, отношение $H_y(w/2, 0)/H(\text{inf})$ — медленно (лога-

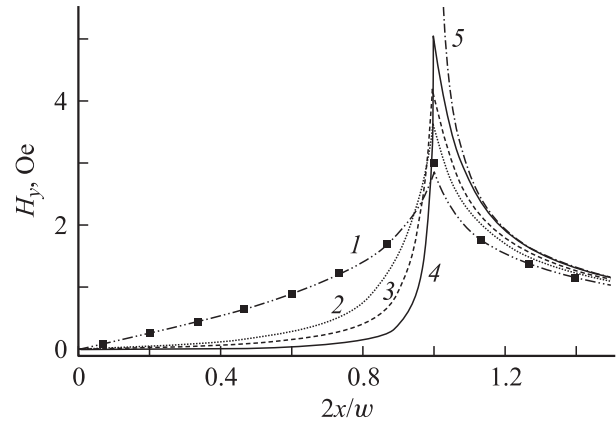


Рис. 2. Магнитное поле различных распределений транспортного тока на оси x микромостика с размерами $w = 3$, $d = 0.2 \mu\text{m}$ при $I = 1 \text{ mA}$. Кривая 1 — поле при однородной плотности тока, точки на этой кривой получены при вычислении поля в наборе дискретных точек с помощью совокупности вписанных цилиндров; 2 — поле распределения, переходящего вблизи края пленки к экспоненциальному, при $\lambda = 0.4 \mu\text{m}$; 3 — то же при $\lambda = 0.2 \mu\text{m}$; 4 — поле тока, распределенного согласно выражению (12) до $x = w/2$; 5 — поле двумерной (бесконечно тонкой) пленки.

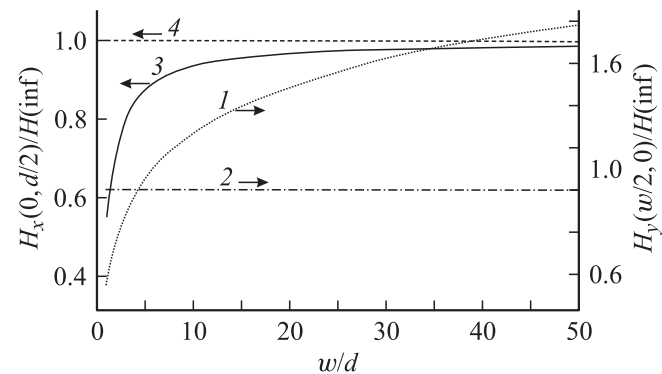


Рис. 3. Сравнение полей в серединах поверхностей прямоугольной пластины с полем бесконечной в двух направлениях пластины (при одинаковой плотности тока). Кривая 1 — отношение полей $H_y(w/2, 0)/H(\text{inf})$ в зависимости от отношения w/d ; 2 — линия $H_y(w/2, 0)/H(\text{inf}) = 1$; 3 — отношение полей $H_x(0, d/2)/H(\text{inf})$ от w/d ; 4 — линия $H_x(0, d/2)/H(\text{inf}) = 1$ (асимптота).

рифмически), но неограниченно растущая функция w/d . В то же время отношение $[-H_x(0, d/2)]/H(\text{inf})$ при $w/d \rightarrow \infty$ (и $J = \text{const}$) асимптотически стремится к пределу, равному единице.

2. Расчет поля тока в случае тонкой широкой сверхпроводящей пленки

В случае широких пленок, т.е. при $dw > \lambda^2$, распределение тока не является однородным. Мы будем рассматривать пленки с толщиной $d \sim \lambda$, тогда плотность тока зависит только от x , и $J(x) = j(x)d$. Расчет магнитного поля проводился с распределением тока вида

$$J(x) = J(0)/[1 - (2x/w)^2]^{1/2} \quad (12)$$

и с распределением (12), несколько измененным вблизи края пленки. Распределение (12) приведено в работах [4-6, 10-12]. Такое же распределение тока получено и при расчете скин-эффекта в проводящей пластине [13]. В работах [10, 11] приведен результат приближенного решения уравнений Лондонов для пленки с размерами $d \sim \lambda$, $w \gg \lambda$, в соответствии с которым в некоторой точке x_0

$$x_0 = w/2 - a\lambda^2/2d \quad (13)$$

ток непрерывно и с непрерывной производной переходит от зависимости (12) к

$$J(x) = J(w/2) \exp\{-[d(w/2 - x)/a\lambda^2]\}, \quad (14)$$

где $a = \text{const} \approx 1$. Плотность тока на краю пленки $J(w/2)$ выражается через плотность тока в центре $J(0)$ следующим образом:

$$J(w/2) = J(0) \frac{\sqrt{ewd}}{\lambda\sqrt{2a}}, \quad (15)$$

где $e \approx 2.718$ — основание натурального логарифма. Замена формулы (12) для плотности тока на совокупность (12)–(14) особенно существенна для микромостиков с шириной порядка одного или нескольких микрон, в которых велика роль краевой области. При этом требуется некоторая модификация вида формулы (15) для обеспечения строгой непрерывности функции $J(x)$ в точке сопряжения x_0

$$J(w/2) = \frac{J(0)}{\lambda} \sqrt{\frac{edw}{2a(1 - \frac{a\lambda^2}{2dw})}}. \quad (16)$$

При большой ширине w эта формула переходит в (15). Расчет с использованием выражения (16) дает монотонный рост H при изменении x от 0 до $w/2$, в то время как применение формулы (13) приводит к вполне заметной немонотонности H при $x \sim x_0$ (во всяком случае, при $w \sim 10\lambda$), т.е. для не слишком широких пленок. В работе [6] отмечено, что плотность тока ограничена вблизи края пластины величиной $J_{\text{max}} = I/(\pi\sqrt{2\delta})$, где $\delta = \max\{d, \lambda^2/d\}$. Поскольку в этой работе не предлагается какая-либо аналитическая зависимость для $J(x)$ вблизи края, рассчитать поле на основе этих данных не возможно.

Отметим, что в случае ограничения плотности тока на краю пластины каким-либо способом величина $J(0)$ в формуле (12) увеличится, т.е. функция $J(x)$, описывающая плотность тока в средней части пластины, не может сохранить тот же коэффициент пропорциональности $J(0)$ (см. ниже), который бы имел место при выполнении зависимости (12) вплоть до $x = w/2$. Для того чтобы определить величину $J(0)$, надо решить уравнение для $J(0)$, которое получается из условия $\int_{-w/2}^{w/2} J(x)dx = I$, где I — полный ток. Тогда

$$J(0) = 2I/(\pi w) \quad (17)$$

для плотности тока, изменяющейся по корневому закону до $x = w/2$ [4-6], и

$$J(0) = I / \left\{ w \left[\arcsin\left(1 - \frac{a\lambda^2}{dw}\right) + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{e}-1)}{\sqrt{\frac{dw}{a\lambda^2} - \frac{1}{2}}} \right] \right\} \quad (18)$$

для плотности тока, переходящей в точке $x = x_0$ к экспоненциальной зависимости. Легко видеть, что в пределе бесконечно широкой пленки ($w \rightarrow \infty$) формула (18) переходит в (17). Результирующие формулы для расчета поля выглядят как суммы трех интегралов

$$\begin{aligned} H_y(t, u) = \frac{wJ(0)}{cd} & \left\{ k \left[\int_{-1}^{-s_0} \left(\text{arctg} \frac{2u+d}{2t-ws} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \text{arctg} \frac{2u-d}{2t-ws} \right) \exp\left(-\frac{1+s}{4b}\right) ds \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{s_0}^1 \left(\text{arctg} \frac{2u+d}{2t-ws} - \text{arctg} \frac{2u-d}{2t-ws} \right) \exp\left(-\frac{1-s}{4b}\right) ds \right] \right. \\ & \left. + \int_{-s_0}^{s_0} (1-s^2)^{-1/2} \left(\text{arctg} \frac{2u+d}{2t-ws} - \text{arctg} \frac{2u-d}{2t-ws} \right) ds \right\}; \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_x(t, u) = \frac{wJ(0)}{2cd} & \left\{ k \left[\int_{-1}^{-s_0} \exp\left(-\frac{1+s}{4b}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \ln \frac{(2t-sw)^2 + (2u-d)^2}{(2t-sw)^2 + (2u+d)^2} ds \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{s_0}^1 \exp\left(-\frac{1-s}{4b}\right) \ln \frac{(2t-sw)^2 + (2u-d)^2}{(2t-sw)^2 + (2u+d)^2} ds \right] \right. \\ & \left. + \int_{-s_0}^{s_0} (1-s^2)^{-1/2} \ln \frac{(2t-sw)^2 + (2u-d)^2}{(2t-sw)^2 + (2u+d)^2} ds \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

где проведена замена переменных $x \rightarrow (w/2)s$, а величины k , b и s_0 определены следующим образом:

$k \equiv J(w/2)/J(0) = \frac{\sqrt{edw}}{\lambda\sqrt{2a(1-b)}}$, $b \equiv \frac{a\lambda^2}{2dw}$, $s_0 = 2x_0/w = 1 - 2b$. Формулы (19) и (20) выписаны для случая плотности тока, описываемой выражениями (12)–(16); в том случае, когда рассматривается распределение плотности тока (12), справедливое до $x = w/2$, следует использовать последнее слагаемое в формулах (19), (20), значение $s_0 = 1$ и выражение (17) для $J(0)$. Поле тока, распределенного в двумерной (бесконечно тонкой) пленке согласно выражению (12), может быть вычислено по формулам [10]:

$$H_y^{2D}(t, u) = \frac{w}{c} \int_{-1}^1 \frac{J(0)}{\sqrt{1-s^2}} \frac{(t - ws/2)}{(t - ws/2)^2 + u^2} ds; \quad (21)$$

$$H_x^{2D}(t, u) = \frac{w}{c} \int_{-1}^1 \frac{J(0)}{\sqrt{1-s^2}} \frac{u}{(t - ws/2)^2 + u^2} ds, \quad (22)$$

где $J(0)$ определяется по формуле (17).

3. Сравнение с экспериментальными данными. Подробный расчет поля тока в микромостике заданной геометрии

Расчеты магнитного поля тока проводились для тонкой узкой пленки — микромостика — с размерами $d = 0.2 \mu\text{m}$, $w = 3 \mu\text{m}$, сходной с использованными в [14,15], и для широкой пленки с $d = 0.2 \mu\text{m}$, $w = 1.5 \text{mm}$ [11,12], а также толстой широкой пластины с $d = 8 \mu\text{m}$, $w = 15 \text{mm}$ [16]. В последнем случае целью было сравнение полученных значений поля с результатом работы [16], в которой были измерены компонента поля тока H_x , параллельная поверхности, в нормальном и мейсснеровском состоянии ниобиевой фольги и приведено значение отношения этих полей. Расчет H_x^s/H_x^n проводился как для однослойного, так и для двухслойного тока (при одном и том же полном токе). Как двухслойный рассматривается ток в относительно толстой пластине, т.е. транспортный ток течет в двух приповерхностных слоях толщиной λ . Результат представлен на рис. 3, кривая 1. Во втором случае было рассчитано поле H_y над свинцовой пленкой с током в конфигурации работы [11]. Вычисления были проведены для двумерной модели пленки — как в работе [11], и для трехмерной пленки в двух вариантах распределения тока. Результаты приведены на рис. 2, кривая 2.

Основное внимание уделялось расчетам полей токов, текущих в микромостиках. Вычисления были проведены для однородного распределения тока, для распределения описываемого формулой (12) до $x = w/2$ в бесконечно тонкой пленке и в пленке конечной толщины, для распределения с переходом к экспоненциальной зависимости вблизи края (14) при двух глубинах проникновения магнитного поля. Значения некоторых параметров,

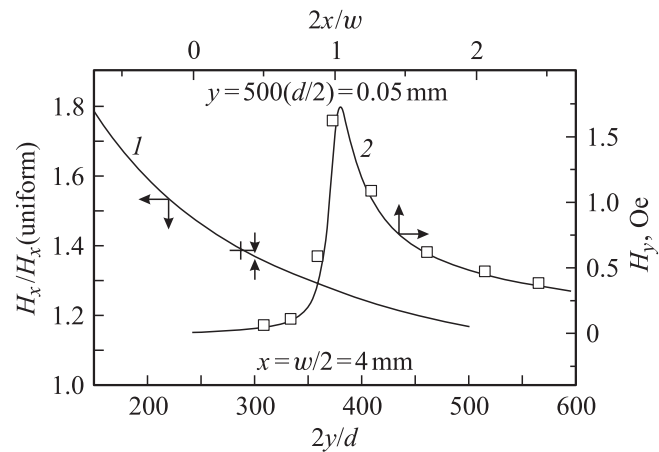


Рис. 4. Сравнение результатов расчета полей с экспериментальными данными. Кривая 1 (левая и нижняя оси) — зависимость отношения H_x в мейсснеровском и нормальном состоянии ниобиевой фольги ($w = 8 \text{mm}$, $d = 8 \mu\text{m}$) от положения точки наблюдения. Датчик Холла находится на расстоянии 1.1–1.2 мм над краем фольги, соответствующая неопределенность показана размерами крестика на кривой 1, встречными стрелками отмечено экспериментальное значение отношения полей в работе [14]. Кривая 2 (правая и верхняя оси) — рассчитанная для $w = 1.5 \text{mm}$, $d = 0.2 \mu\text{m}$, $I = 0.3 \text{A}$ (конфигурация работы [11]) зависимость $H_y(x)$ при $y = 0.05 \text{mm}$. Точками показаны экспериментальные значения поля из работы [11]. Поля разных распределений тока и в первом, и во втором случаях практически совпадают.

использованных или полученных при расчете, приведены в таблице. В первой строке приведены параметры однородного распределения, во второй и третьей даны значения параметров неоднородного распределения тока, ограниченного вблизи края мостика в соответствии с формулами (12)–(14) при $\lambda = 0.4$ и $0.2 \mu\text{m}$ соответственно, в последней — распределения тока, подчиняющегося выражению (9) до $x = w/2$. Последний случай формально соответствует $\lambda = 0$.

Указаны температуры, при которых глубина проникновения λ достигает значений, приведенных в первом столбце, полученные путем обработки данных работы [17] по измерению температурной зависимости глубины проникновения в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$.

Заметим, что для образцов с размерами $0.2 \cdot 3 \mu\text{m}^2$ условие однородности тока $\lambda > (dw)^{1/2} \approx 0.79 \mu\text{m}$ будет выполняться в интервале $T_c - T \sim 1 \text{K}$ (и при $T > T_c$). Графики зависимости абсолютной величины поля тока

Параметры различных распределений тока в микромостике с размерами $w = 3$, $d = 0.2 \mu\text{m}$ при $I = 1 \text{mA}$

λ , μm	T , К	$j(0)$, A/cm^2	$j(w/2)$, A/cm^2	x_0 , μm
> 0.79	$> T_c - 1 \approx 89$	$1.61 \cdot 10^5$	$1.61 \cdot 10^5$	—
0.4	86	$1.21 \cdot 10^5$	$2.97 \cdot 10^5$	1.15
0.2	76	$1.11 \cdot 10^5$	$5.2 \cdot 10^5$	1.4
0	—	$1.03 \cdot 10^5$	∞	$w/2 = 1.5$

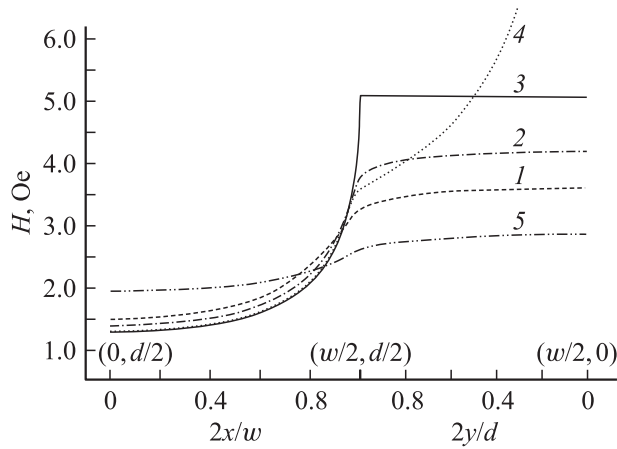


Рис. 5. Графики зависимости абсолютной величины поля $H = (H_x^2 + H_y^2)^{1/2}$ от координаты точки на поверхности микромостика ($w = 3 \mu\text{m}$, $d = 0.2 \mu\text{m}$, $I = 1 \text{mA}$) для разных распределений тока. Кривая 1 в левой части рисунка — это зависимость $H(x)$ от точки $(0, d/2)$ до точки $(w/2, d/2)$ на поверхности $y = d/2$, в правой части — $H(y)$ от $(w/2, d/2)$ до $(w/2, 0)$ на поверхности $x = w/2$ для распределения, переходящего к экспоненциальному на краю пленки, при $\lambda = 0.4 \mu\text{m}$; 2 — то же при $\lambda = 0.2 \mu\text{m}$; 3 — зависимости $H(x)$ и $H(y)$ вдоль тех же линий на поверхности микромостика для тока, распределенного согласно (12) до $x = w/2$; 4 — то же для бесконечно тонкой пленки (с током, также распределенным в соответствии с выражением (12)). Для сравнения приведен также график зависимости полного поля для однородного распределения тока, кривая 5.

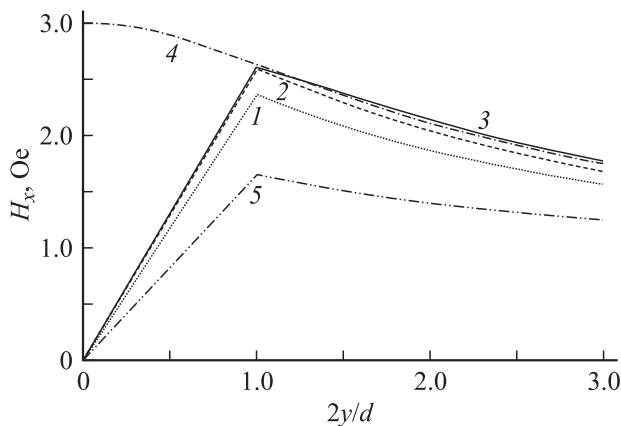


Рис. 6. Зависимость параллельной поверхности составляющей поля $H_x(y)$ микромостика с теми же размерами и током при фиксированном значении $x = 0.9(w/2)$ внутри и вблизи пленки для различных распределений тока. Кривая 1 — зависимость $H_x(y)$ для распределения с переходом к экспоненте при $\lambda = 0.4 \mu\text{m}$; 2 — то же при $\lambda = 0.2 \mu\text{m}$; 3 — поле тока, распределенного, согласно выражению (12), до $x = w/2$; 4 — то же для двумерной пленки. Здесь же приведена для сравнения зависимость $H_x(y)$ однородного распределения — кривая 5.

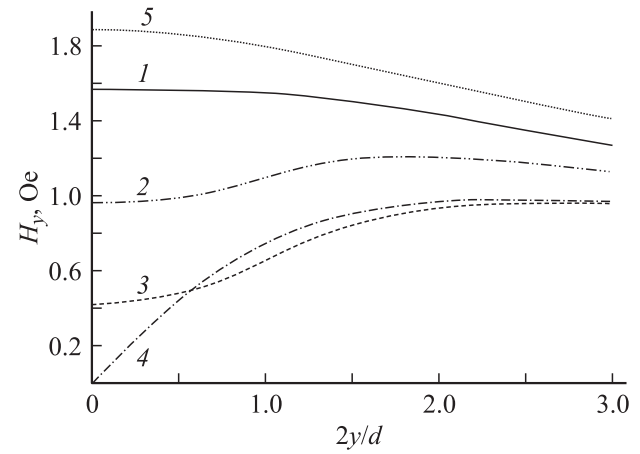


Рис. 7. Зависимость перпендикулярной к поверхности составляющей поля $H_y(y)$ того же микромостика ($I = 1 \text{mA}$) при фиксированном значении $x = 0.9(w/2)$ внутри и вблизи него для различных распределений тока. Нумерация кривых та же, что на рис. 6.

от координат на оси x (где она совпадает с величиной H_y) и на поверхностях образца $y = d/2$ и $x = w/2$ при различных функциях распределения тока $J(x)$ представлены на рис. 2 и 5 соответственно. На рис. 6 и 7 представлены графики зависимости компонент поля H_x и H_y от координаты y в направлении, перпендикулярном поверхности — при некотором фиксированном значении x — внутри и вне пленки.

4. Обсуждение

Кривые 2–4 на рис. 2 показывают, как усиливается выталкивание из микромостика магнитного потока, созданного транспортным током, при понижении температуры. Однородное распределение тока, существующее в проводящей (однородной) прямоугольной пластине и, приближенно, в узком тонком сверхпроводящем мостике в небольшом интервале температур вблизи критической создает поле на оси x (7), представленное кривой 1 на рис. 2. Выражения для поля тока, текущего по прямоугольной пластине, эквивалентные формулам (5)–(7) приведены в справочнике по расчету магнитных полей [18]. К сожалению, в [18] выражения для поля написаны для системы координат с нулем в центре сечения, в то время как при изложении задачи о поле тока полосы начало координат помещено в угловую точку сечения. Кроме того, в [16] приведено завышенное вдвое значение поля тока бесконечной в двух измерениях пластины.

Рассмотрим конкретные примеры применения формул (7), (9). Как уже упоминалось, в работе [8] поле тока на внешнем краю пленки вычисляется по формуле $H = 2\pi jd/c = 2\pi J/c$ для бесконечной в двух направлениях плоскости с током. Результат оказывается верен для пленок с шириной $0.5 \mu\text{m}$ (при $d = 0.12 \mu\text{m}$ в [8]) по той причине, что для таких пленок отношение

$w/d = 4.17$ очень близко к значению $w/d = 4.24$, при котором $H_y(w/2, 0)/H(\text{inf}) = 1$, и занижен на $\sim 20\%$ для пленок шириной $1\ \mu\text{m}$ с $w/d = 8.3$ в той же работе [8] (см. кривые 1 и 2 на рис. 3). В условиях работы [14,15] отношение $H_y(w/2, 0)/H(\text{inf})$ равно 1.4 и 1.33 для пленок с толщиной 0.2 и $0.26\ \mu\text{m}$ соответственно (при ширине $\sim 3.1\ \mu\text{m}$). При произвольных величинах d и w отношение $H_{\text{max}}/H(\text{inf})$ можно определить по графику (рис. 3, кривая 1) или с помощью формулы (9) для H_{max} . Параллельная компонента поля H_x с увеличением ширины пластины имеет пределом (при поддержании постоянной плотности тока) значение поля бесконечной пластины с током $H(\text{inf})$, что показано на рис. 3, кривая 3.

При понижении температуры однородное распределение тока сменяется неоднородным, в основе которого всегда лежит выражение (12). Это же распределение, как видно на рис. 2, кривая 4, дает наибольшее экранирование объема микромостика от магнитного поля тока. На этом рисунке видно также, что на расстоянии, равном или большем полуширины мостика, поля, полученные при всех исследованных в данной работе распределениях тока, кроме, как правило, однородного, весьма близки. Только небольшие — не превосходящие 1% — расхождения в величине поля для различных распределений тока обнаружены и при расчете полей над ниобиевой фольгой и свинцовой пленкой, результаты которых представлены на рис. 3. В первом из этих случаев наблюдается совпадение в пределах погрешности экспериментального значения отношения полей H_x^s/H_x^n с результатом расчета как для двумерной, так и трехмерной пленки, во втором — достаточно хорошее совпадение зависимости $H_y(x)$ с экспериментальными данными — так же и для 2D-, как в работе [11], и для 3D-пленки. При приближении к краю пленки зависимости становятся вполне различимыми (в частности, по величине максимального поля). Поле тока двумерной пленки расходится при $x = w/2, y = 0$ в то же время поле тока пленки конечной толщины $d \sim \lambda$ при том же распределении (12) остается конечным, хотя и наибольшим по сравнению с полями других распределений тока в трехмерной пленке. Таким образом, учет конечности размера пленки по толщине позволяет избежать расходимости поля на краю, что по видимому, есть обычный результат перехода от линейных токов к объемным, однако остается расходимость плотности тока. Очевидно, что закон (12) не может выдерживаться точно при $x \rightarrow w/2$, так как в этом случае вблизи края пленки критическая плотность будет достигнута при сколь угодно малом токе, следствием чего будет появление конечного сопротивления. Такой же результат — ненулевое сопротивление образца при произвольно малом токе — получен в [4] при рассмотрении состояния пластины с током, распределенным в соответствии с (12). В настоящей работе расчет поля тока, распределенного по закону (12), проведен в первых, для сравнения с полями от других распределений, во-вторых, как связующее звено с расчетами поля

двумерной пленки, часто встречающимися в литературе. Двумерная модель подходит для расчета распределения токов в плоскости из измерений распределения поля, так как допускает точное решение обратной задачи Био—Савара—Лапласа, что в трехмерном случае затруднено [19]. В [10,11] описано полученное в рамках теории Лондонов приближенное решение для распределения тока, при котором на некотором расстоянии от края плотность тока (непрерывно) переходит от зависимости (12) к (14), таким образом, оставаясь конечной при $x = w/2$ — исчезает расходимость плотности тока на краю пленки. Другое достоинство этого описания — установление связи распределения тока с величиной глубины проникновения магнитного поля, что дает возможность рассчитать, каким образом распределение тока и его магнитное поле меняются с температурой. Такая картина представлена на рис. 2, где кривые 1–3 отражают последовательное изменение характера зависимости $H(x, 0) = H_y(x, 0)$, а именно усиление выталкивания поля тока из объема мостика, а тока к краю пленки — при уменьшении температуры. На оси x максимальным во всех случаях является поле в точке $x = w/2$. В случае распределения с конечной плотностью тока на краю пленки это поле является максимальным и для всей поверхности пленки (см. рис. 5, где представлены зависимости абсолютной величины поля от координаты на поверхности для разных распределений). Распределение (12), выполняющееся в пленке конечной толщины до $x = w/2$, отличается от других тем, что с ним максимальное значение поля получается в угловой точке $(w/2, d/2)$, где оно на 0.5% больше, чем в точке $(w/2, 0)$. Поскольку практически плотность тока всегда ограничена, то точкой, в которой поле максимально, по всей видимости, является точка $(w/2, d/2)$ даже если закон, по которому изменяется $J(x)$ вблизи края, не совпадает точно с выражением (14). В этой точке начинается проникновение вихрей магнитного поля в объем мостика при достаточно большой величине тока. В то же время модель двумерной пленки, как видно на рис. 2 и 5, малоприспособна для оценки поля тока в этой точке из-за расходимости $H^{2D}(x, y)$ при $x \rightarrow w/2, y \rightarrow 0$. Как видно на рис. 5, для приближенной оценки поля в этой точке в рамках двумерной модели можно использовать значение $H^{2D}(w/2, d/2)$ (т.е. в угловой точке реальной пленки). Погрешность такой оценки в данной геометрии мостика $\sim 10\%$. Полные поля $H(x, d/2) = (H_x^2 + H_y^2)^{1/2}$ для разных распределений тока (включая двумерное) на линии $y = d/2$ (т.е. вдали от точки $(w/2, d/2)$), см. левую часть рис. 5, отличаются не более чем на 20%. В то же время составляющие вектора поля H_x и H_y внутри пленки ведут себя совершенно по-разному для 2D- и 3D-распределений. На рис. 6 и 7 показано, как изменяются H_x и H_y при смещении точки наблюдения перпендикулярно поверхности (значение $x = 0.9(w/2) = 0.45w$ зафиксировано). Компонента $H_x^{2D}(y)$ имеет конечный предел при $y \rightarrow 0$, в то время как в трехмерной пленке для всех распределений H_x стремится к 0 при $y \rightarrow 0$. С компонентой H_y ситуация обратная — трехмерная

пленка со всеми распределениями тока имеет конечное значение $H_y(0)$, а двумерная — нулевое. Вне пленки, как и в случае $H(x, 0)$ на оси x , поля разных распределений сближаются и практически совпадают, как мы видели на примерах ниобиевой фольги и свинцовой пленки, на расстоянии $\sim 0.1-1$ mm от поверхности, на котором находились в этих случаях датчики поля.

Выводы

1) Поля для рассмотренных выше случаев неоднородного распределения тока на достаточно больших по сравнению с толщиной пленки расстояниях практически неразличимы.

2) Распределение тока в сверхпроводящей пленке, переходящее к экспоненциальному, предпочтительнее физически, поскольку при учете конечности толщины пленки позволяет избежать расходимости и в величине магнитного поля, и в плотности тока.

3) Наиболее важна для оценки поля начала проникновения потока в образец середина боковой поверхности пластины $(w/2, 0)$, где поле тока максимально при реально возможных распределениях.

4) Двумерная модель пластины с током не позволяет рассчитать поле в этой точке. Разумной аппроксимацией максимального поля тока на поверхности пластины в этой модели является поле в точке $(w/2, d/2)$, т.е. в угловой точке поперечного сечения реальной трехмерной пластины.

5) Поле однородного распределения тока в произвольной точке плоскости, перпендикулярной пластине, может быть вычислено алгебраически.

Автор благодарит М.П. Волкова за конструктивную критику статьи и Р.В. Парфеньева за ее полезное обсуждение.

Работа поддержана грантом НШ-5596.2206.2 по президентской программе „Ведущие научные школы“.

Список литературы

- [1] Лихарев К.К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 8. С. 909.
- [2] Водлазов Д.Ю. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 20. С. 84.
- [3] Vodolazov D.Yu., Maksimov I.L. // Physica C. 2001. Vol. 349. P. 125.
- [4] Brandt E.H. // Z. Phys. B. 1990. Vol. 80. P. 167.
- [5] Brandt E.H., Indenbom M. // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. N 17. P. 12 893.
- [6] Genenko Yu.A., Usoskin A., Freyhardt H.C. // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. N 15. P. 3045.
- [7] Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. М.: Атомиздат, 1980. (Tinkham M. Introduction to Superconductivity McGRAW-HILL, 1975).
- [8] Ivanov Z.G., Fogel N.Ya., Yuzeephovich O.I. et al. // Fizika Nizkikh Temperatur. 2004. Vol. 30, N 3. P. 276.
- [9] Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. М.: МЦНМО, 2000.
- [10] Ван-Дузер Т., Тернер Ч.У. Физические основы сверхпроводниковых устройств и цепей. М.: Радио и связь, 1984. (Van Duser T., Turner C.W. Principles of Superconductive Devices and Circuits. Elsevier North Holland, 1981).
- [11] Roderick E.H., Wilson E.M. // Nature. 1962. Vol. 194. N 4834. P. 1167.
- [12] Broom R.F., Roderick E.H. // Proc. Phys. Soc. 1962. Vol. 79. P. 586.
- [13] Belevich V. // Philips tech. Rev. 1971. Vol. 32. N 6-8. P. 221.
- [14] Prokofiev D.D., Boikov Yu.A., Volkov M.P., Parfeniev R.V. // Proc. of the Int. Symp. „Properties of f-electron Compounds“. Krakov, 1994. P. 107.
- [15] Прокофьев Д.Д., Волков М.П., Бойков Ю.А. // ФТТ. 2003. Т. 45. № 7. С. 1168.
- [16] Волков М.П., Цыпкин С.И. // Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12. Вып. 23. С. 1411.
- [17] Mao J., Wu D.H., Peng J.L. et al. // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51. N 5. P. 3316.
- [18] Саркисян Л.Ф. Аналитические методы расчета стационарных магнитных полей. М.: Энергоатомиздат, 1993.
- [19] Fisterer M. // Supercond. Sci. Techn. 2005. Vol. 18. P. S58.