

01;03

Нелинейные осцилляции капли, движущейся с постоянной скоростью относительно диэлектрической среды в электростатическом поле

© В.А. Коромыслов, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 1 июля 2005 г.)

В нелинейных асимптотических расчетах второго порядка малости по амплитуде начальной деформации капли показано, что во внешнем электростатическом поле и параллельном ему потоке идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости, ламинарно обтекающем идеально проводящую каплю, имеет место взаимодействие мод как в первом, так и во втором порядках малости. И линейное, и нелинейное взаимодействие мод осцилляций капли приводит к возбуждению мод, отсутствующих в спектре мод, определяющих начальную деформацию равновесной формы капли. Эффект взаимодействия мод приводит во втором порядке малости к снижению критических для реализации неустойчивости капли по отношению к поляризованному заряду величин напряженности электростатического поля, скорости и плотности внешней среды.

PACS: 47.55.D-

В разнообразных приложениях технической формы, геофизики и технологии приходится сталкиваться с каплями, движущимися относительно среды во внешних электростатических полях [1–5]. Исследование закономерности реализации осцилляций и устойчивости таких капель представляет значительный интерес. В частности, из экспериментов [5] известно, что обдувание обводненной градины или крупной капли потоком воздуха снижает критическую для зажигания коронного разряда величину напряженности внешнего электрического поля, что связано со взаимодействием двух видов неустойчивости на свободной поверхности капли или градины: неустойчивости поверхности раздела по отношению к индуцированному заряду [2,3] и по отношению к тангенциальному разрыву поля скоростей [6,7] на поверхности капли (в модели идеальной жидкости). Детальное исследование обсуждаемого вопроса представляет интерес для понимания физических механизмов эволюции заряженных жидкокапельных систем искусственного и естественного происхождения.

Несмотря на обилие экспериментальных работ, посвященных исследованию деформации, устойчивости и дроблению капель в газовых потоках, строгий анализ осцилляций и устойчивости капли, движущейся в электростатическом поле относительно диэлектрической среды, проведен только в линеаризованных математических моделях электрогидродинамики [7–11]. В последние годы появилось несколько работ, посвященных аналитическому асимптотическому исследованию нелинейных осцилляций заряженных капель, покоящихся относительно инерционной диэлектрической внешней среды (см., например, [12–15]). Однако аналитическое исследование нелинейных осцилляций и устойчивости капли, движущейся относительно диэлектрической среды, выполнено пока только для заряженной капли [16]. В связи со

сказанным представлением целесообразно исследовать влияние внешнего электростатического поля на нелинейные осцилляции движущейся капли.

Пусть среда, которую будем моделировать идеальной несжимаемой диэлектрической жидкостью с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ϵ_* , занимающая все пространство, движется с постоянной скоростью \mathbf{U} , параллельной вектору \mathbf{E}_0 — напряженности однородного электростатического поля ($\mathbf{U} \parallel \mathbf{E}_0$) относительно неподвижной капли сферической радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости, с плотностью ρ_1 . Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ . Примем, что обтекание капли потоком внешней среды ламинарное. Согласно [8–10], при ламинарном обтекании первоначально сферической капли потоком идеальной несжимаемой жидкости (газа) она деформируется к форме сплюсненного по потоку сфероида. С другой стороны, в однородном внешнем электростатическом поле электропроводная капля деформируется к вытянутому по полю сфероиду [17]. При некотором соотношении между величиной напряженности электрического поля и скорости обтекающего потока, при условии $\mathbf{U} \parallel \mathbf{E}_0$, капля сохраняет сферическую форму [10,11]. Именно для такой ситуации, существенно снижающей громоздкость расчетов (иначе пришлось бы вводить два малых параметра: один для характеристики стационарной деформации равновесной формы капли, другой для характеристики амплитуды осцилляций), и проводятся последующие расчеты нелинейных осцилляций капли.

Итак, примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметрическое возмущение конечной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли, пропор-

циональное одной из мод ее капиллярных осцилляций, и зададимся вопросом о закономерностях временной эволюции начальной деформации при $t > 0$. Все рассуждения проведем в сферической системе координат, связанной с центром масс капли. Полярный угол будем отсчитывать от положительного направления вектора напряженности электрического поля.

Для упрощения последующих расчетов перейдем к безразмерным переменным, в которых $R = \sigma = \rho_1 = 1$. Уравнение границы раздела сред, возмущенной осесимметричным капиллярным движением, запишем в виде

$$r = 1 + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1.$$

Движения жидкости будем полагать потенциальными, т.е. примем, что поля скоростей волнового движения жидкости в капле $\mathbf{V} = \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$ и в среде $\mathbf{U} = \nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$ определяются функциями потенциалов скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ соответственно.

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций границы раздела сред в описанной системе состоит из системы уравнений Лапласа для потенциалов скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и потенциала электрического поля $\Phi(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\varphi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

и граничных условий к ним

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad (2)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{E}_0; \quad \nabla\varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{U}_0; \quad (3)$$

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial\xi}{\partial\theta}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial\xi}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \frac{\partial\xi}{\partial\theta}; \quad (5)$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + p_{in} + p_E - p_\sigma = -\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\nabla\varphi)^2 + p_{ex}; \quad (6)$$

$$p_E = \frac{\varepsilon_* (\nabla\Phi)^2}{8\pi}; \quad p_\sigma = \text{div } \mathbf{n}; \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t), \quad (7)$$

где p_{in} и p_{ex} определяют давления в капле и среде соответственно; p_E — давление электрического поля на границу раздела сред; p_σ — лапласовское давление, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности капли; $\Phi_S(t)$ — постоянный электростатический потенциал вдоль поверхности капли; $\rho \equiv \rho_2/\rho_1$.

Следует учесть также условия неизменности собственного электрического заряда капли

$$-\frac{\varepsilon_*}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \nabla\Phi) dS = 0; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases} \quad (8)$$

и ее объема

$$\int_{V_1} r^2 dr d\Omega = \frac{4}{3} \pi; \quad V_1 = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (9)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла. Условие неподвижности центра масс системы, как показано в [18], при достаточно больших линейных масштабах внешней среды выполняется автоматически, поэтому расчет амплитуды трансляционной (первой) моды, как и более высоких, будем производить на основе системы гидродинамических граничных условий.

Начальные условия сформулируем, определяя в начальный момент времени осесимметричную деформацию сферической формы капли и полагая равной нулю начальную скорость движения границы раздела сред

$$t = 0: \quad \xi(\theta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \varepsilon P_k(\mu); \quad \mu \equiv \cos\theta; \quad (k \geq 2); \quad (10)$$

$$\frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Здесь ε — безразмерная амплитуда начальной деформации, являющаяся малым параметром задачи; $P_k(\mu)$ — полином Лежандра k -го порядка; ξ_0 — константа, определяемая условием (9) и имеющая во втором порядке малости вид

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{2k+1} + O(\varepsilon^3), \quad (12)$$

где k — номер изначально возбужденной моды.

Решение задачи (1)–(11) в квадратичном по амплитуде осцилляций приближении будем искать на основе асимптотического метода многих временных масштабов. Для этого искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представим в виде рядов по степеням малого параметра ε и будем считать их зависящими не просто от времени t , а от различных его масштабов $T_m = \varepsilon^m t$:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots); \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots); \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \varphi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots); \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots). \end{aligned} \quad (13)$$

Производные по времени в соответствии с идеей метода многих временных масштабов будем вычислять по правилу: $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2)$.

Подставляя разложения (13) в краевую задачу (1)–(9) и приравнявая в каждом из уравнений слагаемые при

равных степенях малого параметра, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}$, $\varphi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$, где $m = 0, 1, 2, \dots$

В нулевом порядке малости задача (1)–(9) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^{(0)} &= 0; & \Delta\varphi^{(0)} &= 0; & \Delta\psi^{(0)} &= 0; \\ r \rightarrow 0: & & \psi^{(0)} &\rightarrow 0; \\ r \rightarrow \infty: & & \nabla\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow -\mathbf{E}_0; & \nabla\varphi^{(0)} &\rightarrow \mathbf{U}_0; \\ r = 1: & & \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial r} &= \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r} = 0; \\ p_{in} - \frac{\rho}{2}(\nabla\psi^{(0)})^2 + \frac{\varepsilon_*(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi} - 2 &= -\frac{\rho}{2}(\nabla\varphi^{(0)})^2 + p_{ex}; \\ & & \Phi^{(0)} &= \Phi_S^{(0)}; \\ \frac{\varepsilon_*}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Решения (14), описывающие равновесное состояние системы, имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_S^{(0)} &\equiv 0; & \psi^{(0)} &= 0; \\ \varphi^{(0)}(r, \theta) &\equiv U \left(r + \frac{1}{2r^2} \right) \mu; & \Phi^{(0)}(r, \theta) &\equiv -E_0 \mu (r - r^{-2}). \end{aligned} \quad (15)$$

В силу линейности уравнений (1)–(3) им должна удовлетворять каждая из функций $\varphi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$ в разложениях (13), потому представим последние для $m \geq 1$ в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^n P_n(\mu); \\ \varphi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} P_n(\mu); \\ \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} P_n(\mu). \end{aligned} \quad (16)$$

В аналогичном виде будем искать и последовательные поправки $\xi^{(m)}$ к выражению, определяющему форму поверхности капли

$$\xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) P_n(\mu). \quad (17)$$

В первом порядке малости по ε для определения неизвестных коэффициентов $G_n^{(1)}$, $E_n^{(1)}$, $F_n^{(1)}$, $M_n^{(1)}$ в решениях (16), (17) (при $m = 1$) система граничных и начальных условий (4)–(11) с учетом (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} r = 1: & & \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_0} &= \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}; \\ & & \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r} &= \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\theta} \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{\varepsilon_*}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\theta} \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r\partial\theta} - \left(\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\theta} \right)^2 \right] \xi^{(1)} \right. \\ \left. + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\theta} \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\theta} \right\} + (2 + \Delta_\Omega)\xi^{(1)} \\ = \rho \left\{ -\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial T_0} + \xi^{(1)} \left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\theta} \right)^2 - \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\theta} \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\theta} \right\}; \\ \Phi^{(1)} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} \xi^{(1)} = \Phi_S^{(1)}; \\ \int_0^\pi \left[\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} - \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\theta} \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta} \right] d\Omega = 0; \\ t = 0: & & \xi^{(1)} &= P_k(\mu); & \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_0} &= 0; & \int_0^\pi \xi^{(1)} d\Omega &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа.

Подставив разложения (16), (17) (при $m = 1$), а также решения нулевого порядка малости (15) в систему (18), можно получить бесконечную систему связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих неизвестные коэффициенты

$$\begin{aligned} G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots), & E_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots), & F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots), \\ M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots): & M_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \\ & M_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; & n \geq 1; \\ A_n M_{n-2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \\ & + \frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \\ & + C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} + D_n M_{n+2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$E_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0};$$

$$\begin{aligned} G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= -\frac{1}{n+1} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \\ &+ \frac{2}{3} U \left[\frac{n}{2n-1} M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \right. \\ &\left. - \frac{n}{2n+3} M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= 3E_0 \left[\frac{n}{2n-1} M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \right. \\ &\left. + \frac{n+1}{2n+3} M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_S^{(1)} &\equiv 0; & A_n &= (We - w)\chi(n) \frac{n^2(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)}; \\ B_n &= -\sqrt{We\rho}n\chi(n); \\ C_n &= \sqrt{We\rho}\chi(n) \frac{n(2n+1)}{2n+3}; \\ D_n &= (We - w)\chi(n) \frac{n^2(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}; \\ \omega_n^2 &= \chi(n) \left(n(n-1)(n+2) - w \frac{n^2(4n^3 + 2n^2 - 6n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right. \\ &\quad \left. - We \frac{2n^2((2n+1)(n^2-1)+3)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right); \\ \chi(n) &= \left(1 + \rho \frac{n}{n+1} \right)^{-1}; & w &= \frac{9E_0^2\varepsilon_*}{4\pi}; & We &= \frac{9}{4}U^2\rho. \end{aligned}$$

Бесконечная система дифференциальных уравнений (19) позволяет определить зависимость коэффициентов разложений только от временного масштаба T_0 . Чтобы завершить рассмотрение задачи в линейном по ε приближении, величины $M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$ положим не зависящими от временного масштаба T_1 и более высоких временных масштабов, т.е. представим в виде $M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \approx M_n^{(1)}(T_0) + O(T_1)$. При этом для возмущения поверхности получается оценка

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon\xi^{(1)}(\theta, t) + \varepsilon O(\varepsilon, t). \quad (20)$$

Это разложение равномерно пригодно при $t \sim O(\varepsilon^0)$, в этом случае ошибка составляет величину $\sim \varepsilon^2$. Для значений $t \sim O(\varepsilon^{-1})$ данное разложение становится непригодным, однако при исследовании тенденций движения поверхности использовать (20) можно и на временных интервалах $t \geq O(\varepsilon^{-1})$ в рамках требования асимптотичности.

В отличие от случая нелинейно осциллирующей движущейся относительно среды заряженной капли [16] линейное взаимодействие мод, определяемое (19), не исчезает даже при отсутствии движения внешней среды (при $U = 0$), поскольку коэффициенты A_n и D_n зависят и от параметра Вебера (We) и от параметра Тейлора (w). В общем случае при $We \neq 0$; $w \neq 0$ n -я мода взаимодействует с четырьмя ближайшими: $(n-2)$ -й, $(n-1)$ -й, $(n+1)$ -й, $(n+2)$ -й, а при отсутствии движения внешней среды с $(n-2)$ -й, $(n+2)$ -й.

Для определения поправок второго порядка малости, т.е. для отыскания функций $G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $E_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, из системы граничных условий (4)–(12), сохраняя в (13) слагаемые второго порядка малости по ε , получим уравнения

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta};$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r^2} \\ &\quad - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} + \xi^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \varphi^{(0)}}{\partial r^3} \\ &\quad - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} + 2\xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta}; \\ &\quad - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon_*}{8\pi} \left[2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &\quad + 2\xi^{(2)} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r \partial \theta} - \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \right)^2 \right) \\ &\quad + 2\xi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r \partial \theta} - 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r \partial \theta} \right) + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} \right. \\ &\quad + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^2 \partial \theta} + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r \partial \theta} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial \theta^2} \right)^2 \\ &\quad \left. - 4 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r \partial \theta} \right) + [(2 + \Delta\Omega)\xi^{(2)} - 2\xi^{(1)}(1 + \Delta\Omega)\xi^{(1)}] \\ &= \rho \left\{ \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial r^2} \right)^2 - \frac{(\xi^{(1)})^2}{2} \left[3 \left(\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial^3 \varphi^{(0)}}{\partial r^2 \partial \theta} \right] \\ &\quad \left. - \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \theta} + \xi^{(1)} \left[2 \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r \partial \theta} \right] \right\}; \\ \Phi^{(2)} + \xi^{(2)} \left(\frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) + \xi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} &= \Phi_S^{(2)}; \\ \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \xi^{(2)} \left(\frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi^{(0)}}{dr^3} + 2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{d\theta} - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{d\theta} \frac{\partial \xi^{(2)}}{d\theta} \right] d\Omega = 0; \\ t = 0: \quad \xi_0^{(2)} &= -\frac{1}{2k+1}; \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = 0; \\ &\int_0^\pi [\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2] d\Omega = 0. \quad (21) \end{aligned}$$

Подставим разложения (16), (17) (при $m = 2$), а также решения (15) и (19) в (21), и выпишем систему неоднородных дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $E_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$. Исключив из получившихся уравнений слагаемые, пропорциональные $(\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)/\partial T_1)$, которые приводят к появлению секулярных членов в решениях, найдем, что амплитуды разложения $M_n^{(1)}$ не зависят от временного масштаба T_1 . Таким образом, в дальнейшем будем полагать, что $M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \approx M_n^{(1)}(T_0) + O(T_2)$. На основе вышесказанного система дифференциальных уравнений для отыскания коэффициентов $G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $E_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ сведется к следующему виду:

$$\begin{aligned} M_0^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (M_0^{(1)}(T_0))^2; \\ A_n M_{n-2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &+ B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \\ &+ \frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \\ &+ C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} + D_n M_{n+2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \\ &= \chi(n) f_n(T_0); \quad n \geq 1; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} E_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{1}{n} \left(\frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \right. \\ &\left. - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[(m-1) K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m} \right] \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{3n}{2(2n-1)} U M_{n-1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \\ &- \frac{3n}{2(2n+3)} U M_{n+1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) - \frac{1}{n+1} \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \\ &- \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \left[\frac{m+2}{n+1} K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{(n+1)(m+1)} \right] \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \right. \\ &\times M_l^{(1)}(T_0) + \frac{3}{2} U M_m^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0) \left[-\frac{m(m-1)^2}{(n+1)(2m+1)} \right. \\ &\times K_{m-1,l,n} + \frac{(m+1)^2(m+2)}{(n+1)(2m+1)} K_{m+1,l,n} - \frac{(m+1)\alpha_{m+1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} \\ &\left. \left. + \frac{(m-1)\alpha_{m-1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= 3E_0 \left\{ \frac{n}{2n-1} M_{n-1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \right. \\ &+ \frac{n+1}{2n+3} M_{n+1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{m^2}{2m-1} M_{m-1}^{(1)}(T_0) \right. \\ &\left. + \frac{m(m+1)}{2m+3} M_{m+1}^{(1)}(T_0) \right) K_{m,l,n} M_l^{(1)}(T_0) \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\Phi_S^{(2)} \equiv 0;$$

$$\begin{aligned} f_n(T_0) &= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} M_m^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0) \left\{ K_{m,l,n} \left(2n[l(l+1)-1] \right. \right. \\ &+ w \frac{n(13m(m+1)-7)}{(2m-1)(2m+3)} + \text{We} \frac{n(9m^2+9m-7)}{(2m-1)(2m+3)} \left. \right) \\ &+ \frac{1}{2} (11w - \text{We}) \left[\frac{nm(m-1)}{(2m-1)(2m+1)} K_{m-2,l,n} \right. \\ &+ \frac{n(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)} K_{m+2,l,n} \left. \right] + \text{We} \left(\frac{n(n-1)(m-1)}{(2n-1)(2m+1)} \right. \\ &\times [m(m-1)K_{m-1,l,n-1} - \alpha_{m-1,l,n-1}] - \frac{n(n-1)(m+1)}{(2n-1)(2m+1)} \\ &\times [(m+1)(m+2)K_{m+1,l,n-1} - \alpha_{m+1,l,n-1}] - \frac{n(n+1)(m-1)}{(2n+3)(2m+1)} \\ &\times [m(m-1)K_{m-1,l,n+1} - \alpha_{m-1,l,n+1}] + \frac{n(n+1)(m+1)}{(2n+3)(2m+1)} \\ &\left. \left. \times [(m+1)(m+2)K_{m+1,l,n+1} - \alpha_{m+1,l,n+1}] \right) \right\} + M_{m-1}^{(1)}(T_0) \\ &\times M_l^{(1)}(T_0) \left(\frac{nm(m+1)}{(2m+1)(2m-1)} [\text{We}((m-1)(m+2)K_{m+1,l,n} \right. \\ &- m(m+5)K_{m-1,l,n}) - w((m+2)^2K_{m+1,l,n} + m(m+5)K_{m-1,l,n})] \\ &+ w \frac{nm^2}{2m-1} \left[\frac{n^2}{2n-1} K_{m,l,n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} K_{m,l,n+1} \right] \\ &+ M_{m+1}^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0) \left(\frac{n(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} [\text{We} m(m(m+5) \right. \\ &\times K_{m-1,l,n} - (m-1)(m+2)K_{m+1,l,n}) - w(m+1) \\ &\times (m(m+5)K_{m-1,l,n} + (m+2)^2K_{m+1,l,n})] + w \frac{nm(m+1)}{2m+3} \\ &\times \left[\frac{n^2}{2n-1} K_{m,l,n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} K_{m,l,n-1} \right] \\ &+ \left(M_{m-1}^{(1)}(T_0) M_{l-1}^{(1)}(T_0) \frac{nm l [\text{We} + w]}{(2m+1)(2l+1)} \right. \\ &\left. + M_{m+1}^{(1)}(T_0) M_{l-1}^{(1)}(T_0) \frac{n l [(m+1)w - m \text{We}]}{(2m+3)(2l-1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ M_{m-1}^{(1)}(T_0)M_{l+1}^{(1)}(T_0) \frac{nm[(l+1)w - lWe]}{(2m-1)(2l+3)} \\
 &+ M_{m+1}^{(1)}(T_0)M_{l+1}^{(1)}(T_0) \frac{n[(m+1)(l+1)w + nmWe]}{(2m+3)(2l+3)} \\
 &\times \frac{1}{2} [(m+1)(l+1)K_{m,l,n} + \alpha_{m,l,n}] + \left(\frac{M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{2m+3} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \right. \\
 &- \left. \frac{M_{m-1}^{(1)}(T_0)}{2m-1} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \right) \frac{1}{2} \sqrt{We\rho n} \left[m(m+1)K_{m,l,n} \right. \\
 &+ \left. \frac{m}{l+1} \alpha_{m,l,n} \right] + \frac{\partial^2 M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0^2} M_l^{(1)}(T_0) \left[(m-n-1)K_{m,l,n} \right. \\
 &- \left. \frac{\alpha_{m,l,n}}{m} - \frac{\rho n}{n+1} \left((m-n+1)K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m+1} \right) \right] \\
 &+ \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \left[\left(m-1-\frac{n}{2} \right) K_{m,l,n} - \frac{n+2l}{2ml} \alpha_{m,l,n} \right. \\
 &+ \left. \frac{\rho n}{2(n+1)} \left((n-2m-3)K_{m,l,n} + \frac{(n+2l+3)\alpha_{m,l,n}}{(m+1)(l+1)} \right) \right] \\
 &+ \sqrt{We\rho n} \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0) \left(\frac{m(4+5n+3m+mn+m^2)}{(n+1)(2m+1)} \right. \\
 &\times K_{m-1,l,n} + \frac{(m+2)(2+n+m-mn+m^2)}{(n+1)(2m+1)} K_{m+1,l,n} \\
 &+ \frac{(n-1)(m+2)}{2n-1} K_{m,l,n-1} - \frac{(n+1)(m+2)}{2n+3} K_{m,l,n+1} \\
 &+ \frac{(m-1)\alpha_{m-1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} - \frac{(n-1)\alpha_{m,l,n-1}}{(m+1)(2n-1)} + \frac{(n+1)\alpha_{m,l,n+1}}{(m+1)(2n+3)} \\
 &- \left. \frac{(m+1)\alpha_{m+1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} \right) + M_m^{(1)}(T_0) \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{n\sqrt{We\rho}}{(n+1)(2m+1)} \\
 &\times [(m+1)^2(m+2)K_{m+1,l,n} - m(m-1)^2K_{m-1,l,n} \\
 &- (m+1)\alpha_{m+1,l,n} + (m-1)\alpha_{m-1,l,n}] + \sqrt{We\rho nm(m+1)} \\
 &\times K_{m,l,n} \left(\frac{\partial M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_l^{(1)}(T_0)}{2m+3} - \frac{\partial M_{m-1}^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_l^{(1)}(T_0)}{2m-1} \right) \\
 &+ \sqrt{We\rho} \frac{nl}{2} \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \left(\frac{M_{l+1}^{(1)}(T_0)}{2l+3} - \frac{M_{l-1}^{(1)}(T_0)}{2l-1} \right) \\
 &\times \left((1+l)K_{m,l,n} + \frac{\alpha_{m,l,n}}{1+m} \right) \Bigg\};
 \end{aligned}$$

$$K_{m,l,n} \equiv [C_{m0l0}^n]^2;$$

$$\alpha_{m,l,n} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0l0}^n C_{(m-1)l0}^n;$$

C_{m0l0}^n и $C_{(m-1)l0}^n$ — коэффициенты Клебша–Гордана.

Рассмотрение задачи в квадратичном по ε приближении позволяет определить зависимость коэффици-

ентов $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ только от временного масштаба T_0 . При этом можно записать, что $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \approx M_n^{(2)}(T_0) + O(T_1)$, и для возмущения поверхности получить следующую оценку:

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, t) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, t) + O(\varepsilon^3 t). \quad (23)$$

Выражение (23) справедливо на временном интервале $t \sim O(\varepsilon^0)$ с ошибкой $\sim \varepsilon^3$. На интервале $O(\varepsilon^0) \leq t \leq O(\varepsilon^{-1})$ величина погрешности становится сравнимой со вторым слагаемым (с поправкой второго порядка малости), и следовательно, в разложении (23) справедливым останется лишь первый член, соответствующий линейному приближению. Таким образом, приближенное решение линейной задачи (20) применимо на временном интервале $t \leq O(\varepsilon^{-1})$.

Прежде чем приступить к численному решению систем дифференциальных уравнений (19) и (22), следует подчеркнуть, что капля в параллельных электростатическом поле и гидродинамическом потоке будет сохранять сферическую форму. Согласно [10,11], это будет иметь место при $We = w$. При этом в системах уравнений (19) и (22) коэффициенты A_n и D_n обратятся в ноль.

Отметим, что критические для реализации неустойчивости n -й моды осцилляций капли значения параметров Тейлора (w_{cr}) и Вебера (We_{cr}) определяются условием прохождения через ноль квадрата частоты n -й моды $\omega_n^2 = 0$

$$\begin{aligned}
 n(n-1)(n+2) - w \frac{n^2(4n^3 + 2n^2 - 6n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \\
 - We \frac{2n^2((2n+1)(n^2-1) + 3)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = 0.
 \end{aligned}$$

Из этого выражения несложно найти критические значения параметров Тейлора и Вебера для различных мод осцилляций. Так, для основной моды $w_{cr} = We_{cr} \approx 3.33$; для третьей — ≈ 4.66 ; для четвертой — ≈ 5.79 ; для пятой — ≈ 6.84 и т.д.

Численное решение системы дифференциальных уравнений (19) относительно $M_n^{(1)}(T_0)$ проводилось в пакете символьных компьютерных вычислений. Поскольку решение бесконечной системы дифференциальных уравнений невозможно, расчет ограничивался первыми пятью модами ($n = 2, 3, 4, 5, 6$). Как будет видно из представленных ниже результатов расчетов, вклад более высоких мод весьма незначителен и проявляется при закритических в смысле устойчивости капли по отношению к комбинированному действию давления электрического и гидродинамического полей на границе раздела сред значениях w и We . Расчеты показывают, что при малых значениях плотности среды ρ (например, для соотношения сред вода–воздух $\rho = 10^{-3}$) заметный вклад в спектр капиллярных колебаний капли вносит только изначально возбужденная мода ($n = k$) и (при $k \neq 2$) основная мода, которая для капли в потоке возбуждается автоматически за счет взаимодействия с движущейся

средой и внешним электростатическим полем (в результате перераспределения гидродинамического давления по поверхности капли [10–11]). Вклад остальных мод ($n \neq k$), определяющийся линейным межмодовым взаимодействием, согласно (19), относительно мал. При этом моды, более близкие по номеру к изначально возбужденной k -й, имеют большую величину амплитуды колебаний, которая по мере удаления n от k убывает.

Выяснилось, что поверхность капли совершает близкие к гармоническим колебания, соответствующие суперпозиции k -й (исначально возбужденной) моды и основной моды, в окрестности равновесной формы. Амплитуды мод с номерами ($n \neq k$) незначительно возрастают с увеличением w и We и становятся сравними с амплитудой изначально возбужденной моды только при значениях $w = We > 3.33$, т.е. когда основная мода, а следовательно и вся капля, становится неустойчивой (рис. 1 и 2). Для иллюстрации на рис. 1 приведены временные зависимости первых пяти мод для $\rho = 0.1$ при изначально возбужденной основной моде ($k = 2$). Видно (рис. 1, а), что даже при величинах w и We , близких к критическому значению для основной моды, амплитуды наиболее близких к основной третьей и четвертой мод остаются сравнительно малыми. Тогда как

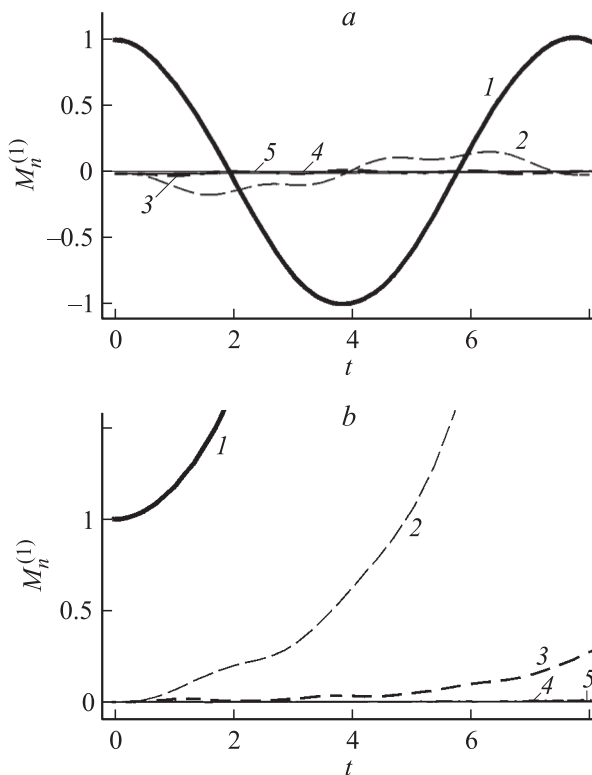


Рис. 1. Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитудных коэффициентов $M_n^{(1)}(t)$ мод, возбуждающихся в первом порядке малости, при начальной деформации капли, определяющейся основной модой ($k = 2$), когда $\rho = 0.1$. Кривая 1 соответствует второй моде, 2 — третьей, 3 — четвертой, 4 — пятой, 5 — шестой моде. а) $w = We = 3$, б) $w = We = 3.5$.

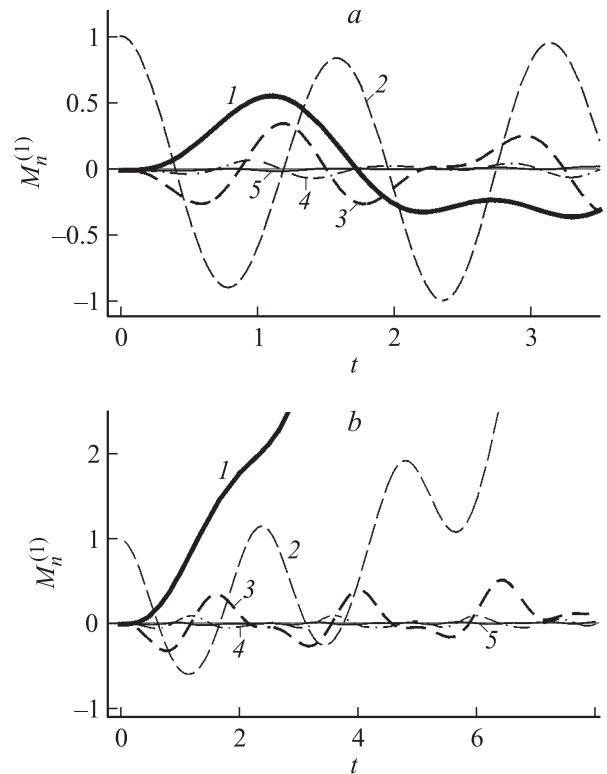


Рис. 2. Те же зависимости, что и на рис. 1, при начальной деформации, определяющейся третьей модой ($k = 3$). а) $w = We = 2$, б) $w = We = 3.5$.

при закритических значениях w и We неустойчивыми оказываются все ближайшие моды (см. рис. 1, б), хотя критические значения параметров w и We превышены только для основной моды.

Для изначально возбужденной третьей моды (рис. 2) величины амплитуд мод, ближайших к возбужденной (второй и четвертой), становятся сравними с амплитудой изначально возбужденной моды уже при докритических значениях w и We , т.е. можно предположить, что процесс перекачки энергии из возбужденных мод к невозбужденным идет тем интенсивнее, чем выше номер изначально возбужденной моды. При этом, когда становится неустойчивой основная мода, также становятся неустойчивыми и остальные моды, при этом для слабо закритических значений w и We неустойчивость носит явно выраженный колебательный характер (рис. 2, б).

Следует отметить, что в процессе перекачки энергии от изначально возбужденной моды в соседние значительную роль играет также отношение плотностей ρ . Так, при больших значениях безразмерной плотности $\rho \geq 1$ амплитуды изначально невозбужденных, но возбуждающихся за счет линейного взаимодействия, мод становятся сравними с амплитудой изначально возбужденной моды при докритических значениях w и We (рис. 3).

Численное решение систем дифференциальных уравнений (19) и (22) относительно $M_n^{(2)}(T_0)$ — амплитуд мод, возбуждающихся во втором порядке малости за

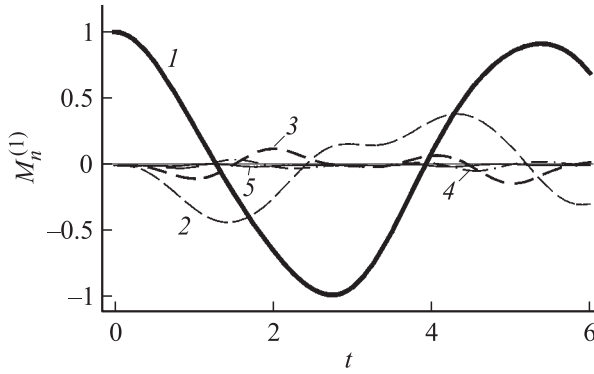


Рис. 3. Те же зависимости, что и на рис. 1, при безразмерной плотности среды $\rho = 1$ и $w = We = 2$.

счет нелинейного взаимодействия (для мод от нулевой до шестой), показывает, что при малых величинах плотности и скорости внешней среды и малости напряженности электрического поля наибольшую амплитуду имеют моды, которые возбуждались бы в отсутствие движения внешней среды [14,15] аналогично тому, как это было в линейном приближении, т.е. моды с номерами $n = 2j$, где $j = 0, 1, \dots, k$. Движение внешней среды приводит к возбуждению во втором порядке малости дополнительных мод, появление которых связано с наличием в спектре мод первого порядка малости, отличных от изначально возбужденных, появившихся только за счет линейного взаимодействия. Амплитуды таких дополнительно возбужденных мод весьма малы, и их вклад в формирование рельефа осциллирующей капли незначителен. С ростом величин ρ , w и We амплитуды дополнительно возбужденных мод увеличиваются.

На рис. 4, *a-c* приведены рассчитанные по (22) при различных значениях плотности среды ρ , параметров Вебера (We) и Тейлора (w) временные зависимости амплитуд мод, возбуждающихся во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, когда начальная деформация определена виртуальным возбуждением основной ($k = 2$) моды. При малых значениях w и We во втором порядке малости возбуждались бы только нулевая, вторая и четвертая моды. Наличие же движения внешней среды и электрического поля привело к дополнительному возбуждению первой, третьей, пятой, шестой мод. Тем не менее видно, что амплитуды основной и четвертой мод максимальны.

Из рис. 4 видно также, что с ростом w и We растут и величины амплитуд колебаний изначально невозбужденных мод. Согласно рис. 4, *c*, при $w = We = 3$, т.е. при докритических значениях w и We , возникает неустойчивость нулевой, второй и третьей мод, капля становится неустойчивой.

Наличие идеальной несжимаемой диэлектрической среды, обтекающей идеально проводящую каплю параллельно внешнему электростатическому полю, приводит

к появлению взаимодействия мод как в первом, так и во втором порядках малости, следствием чего является возбуждение мод, отсутствующих в спектре мод, определяющих начальную деформацию капли. С увеличением скорости потока и напряженности внешнего электростатического поля растут и амплитуды колебаний изначально невозмущенных мод. Наличие взаимодействия мод приводит во втором порядке малости к снижению критических для реализации неустойчивости капли величин напряженности электрического поля, скорости и плотности внешней среды.

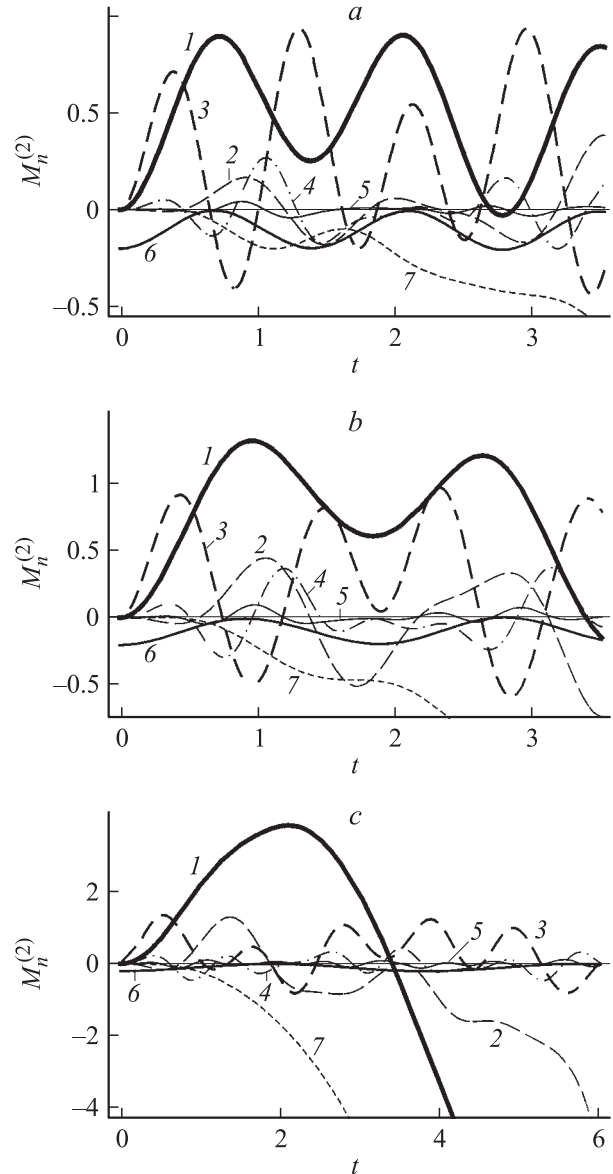


Рис. 4. Зависимости безразмерных амплитудных коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$ мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся основной модой ($k = 2$), при $\rho = 0.1$. Кривая *b* соответствует нулевой моде, 7 — первой; остальные кривые обозначены так же, как и на предыдущих рисунках. *a*) $w = We = 1$, *b*) $w = We = 2$, *c*) $w = We = 3$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-00760.

Список литературы

- [1] Гонор А.Л., Ривкинд В.Я. // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 17. М.: Изд. ВИНТИ, 1982. С. 98–159.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [3] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–27.
- [4] Дячук В.А., Мучник В.М. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [5] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [7] Коромыслов В.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 9. С. 21–28.
- [8] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Рыбакова М.В., Ширяева С.О. // ЭОМ. 2002. № 1. С. 41–45.
- [9] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 41–47.
- [10] Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 12. С. 91–94.
- [11] Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Рыбакова М.В. // ЭОМ. 2002. № 4. С. 50–53.
- [12] Гаилов А.Р., Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 4. С. 22–27.
- [13] Гаилов А.Р., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 13–20.
- [14] Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 44–51.
- [15] Рыбакова М.В., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 24–31.
- [16] Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 23–31.
- [17] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
- [18] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.