

01;05

## Линейные вихри в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде при малых значениях параметра пиннинга

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 16 мая 2005 г.)

Предложена методика расчета структуры и энергии линейного вихря, ось которого проходит по оси симметрии бесконечной в двух направлениях пластины конечной толщины.

Методика основана на решении линейной системы уравнений в конечных разностях. Роль граничных условий играют условия квантования флюксоида в близких к центру вихря ячейках. Используется также идея приближения к точному решению путем последовательных итераций по значениям тех скачков фазы, которые не могут считаться малыми.

Идентичность рассматриваемой конфигурации и некоторой периодической последовательности вихрей позволяет учесть влияние границы области на структуру и энергию вихря. Показано, что при любой ширине полосы найдутся столь малые значения параметра пиннинга, при которых нельзя считать вихрь уединенным, поэтому при расчете нужно учитывать вклады, вносимые другими вихрями. Такой подход позволяет найти структуру и энергию вихря при сколь угодно малых значениях параметра пиннинга.

Полная энергия вихря складывается из его „собственной“ энергии и суммы энергий его взаимодействия со всеми вихрями цепочки. Собственная энергия является суммой энергий малого дискретного остова и квазинепрерывной внешней части. Показано, что энергия остова линейно зависит от параметра пиннинга и сопоставима с энергией наружной части.

PACS: 03.75.Lm, 47.32.-y

### Введение

Одной из важнейших проблем в физике высокотемпературных сверхпроводников является анализ структуры, движения и пиннинга вихрей, возникающих в образце при внесении его во внешнее магнитное поле. Исследованию вихрей посвящено значительное количество работ, в которых рассматриваются вихри в средах различной геометрии и структуры. В [1,2] анализируется поведение одномерных вихрей в длинном джозефсоновском контакте. Однако в этом рассмотрении вихрь предполагается непрерывным в пространстве распределением фазы, а его пиннинг обусловлен взаимодействием с дискретно расположенными центрами пиннинга. На самом же деле, джозефсоновская среда представляет собой ячеистую структуру, что уже само по себе обуславливает пиннинг, определяемый энергией, необходимой для перемещения центра вихря из одной ячейки в другую.

В [3] проведен анализ поведения вихря в линейной цепочке СКВИДов. Однако в этом случае рассмотрение ведется в двумерной ситуации, т.е. магнитное поле отдельной петли учитывается лишь в магнитном потоке, пронизывающем ее саму. В трехмерном же случае вихрь представляет собой систему коаксиальных „соленоидов“, поэтому магнитный поток через петлю создается не только ею самой, но и другими токовыми участками, в том числе достаточно удаленными. При этом с уменьшением критического тока контакта растет размер вихря, т.е. число петель, принимающих участие в формировании магнитного потока через центральную

ячейку вихря, что компенсирует уменьшение вклада в магнитный поток от каждой петли.

В работах [4,5] предложена модель трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды и получена система уравнений квантования флюксоида в ячейках, на основе которой проведен анализ структуры возможных экранирующих, ламинарных и вихревых токовых состояний. В [16] проведен расчет равновесных конфигураций ламинарного (плоского) вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде и построены зависимости энергии пиннинга плоского вихря, а также его магнитной и джозефсоновской энергий от величины критического тока джозефсоновского контакта.

В работе [7] проведен расчет структур и энергий равновесных состояний линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде во всем диапазоне значений параметра пиннинга  $I$ . При этом система уравнений, описывающих вихрь, решается внутри квадрата  $7 \times 7$  ячеек. Показано, что при  $I > 0.25$  весь вихрь целиком умещается в этом квадрате, при меньших значениях  $I$  его энергия представляется как сумма энергий малого по размеру дискретного остова и квазинепрерывной внешней части. На базе такой модели в [7] получены формулы для энергий равновесных состояний вихря. Однако при малых  $I$ , когда размер вихря намного больше размера рассматриваемого квадрата, полученные результаты являются весьма приближительными.

В настоящей работе предлагается новый метод расчета структур и энергий равновесных состояний линейного вихря, позволяющий произвольно увеличить размер области, в которой он расположен. Это дает

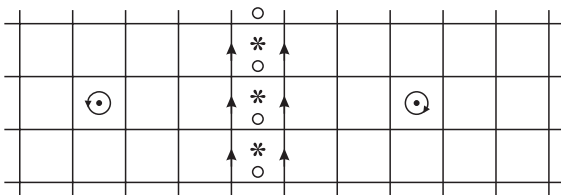
возможность учесть влияние размеров рассматриваемой области и рассчитать структуры и энергии вихрей с любой точностью.

## Методика расчета структуры равновесных состояний вихря

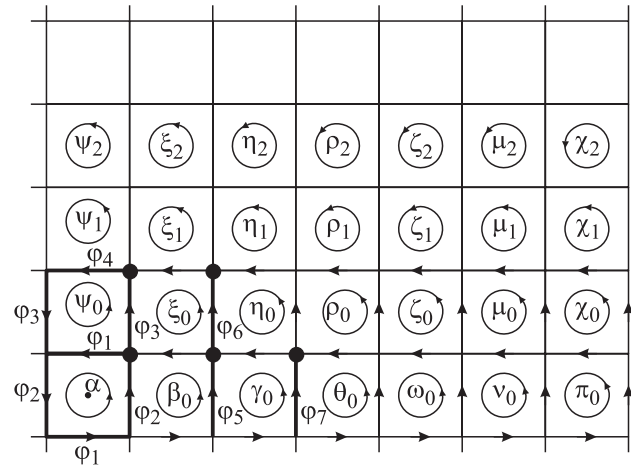
Рассмотрение будем, как и в [7], проводить на модели, представляющей собой кубическую решетку с периодом  $a$ , состоящую из сверхпроводящих проводов диаметром  $\delta$ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же величиной критического тока  $J_c$ . Токовое распределение имеет плоскую структуру, т.е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вихря и расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга, токи распределены идентично.

Рассмотрим линейный вихрь, ось которого проходит посередине бесконечной в двух направлениях плоской пластины толщиной  $(2N-1)$  ячеек. Тогда сечение вихря плоскостью, перпендикулярной его оси, будет представлять собой не квадрат, как в [7], а бесконечную полосу шириной  $(2N-1)$  ячеек, в среднем ряду которой находится центр вихря. Как показано в [7], вихрь может существовать в двух равновесных конфигурациях: а) центр вихря расположен в центре одной из ячеек; б) центр вихря находится на одном из контактов (т.е. сдвинут на 0.5 ячейки).

Легко видеть, что эта конфигурация эквивалентна периодической последовательности вихрей попеременно чередующейся ориентации. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим такую последовательность вихрей, расстояние между центрами которых равняется  $2N$  ячеек, т.е. между их центральными ячейками размещается  $(2N-1)$  ячеек. Для примера на рис. 1 изображена такая конфигурация с  $N = 3$ . Точкой обозначена центральная ячейка вихря. Из симметрии картины ясно, что в вертикальном ряду ячеек, расположенном посередине между центрами соседних вихрей (на рис. 1 он обозначен звездочками), все горизонтальные токи равны нулю, так что структура картины между двумя такими соседними „осевыми“ вертикальными рядами идентична одному вихрю, расположенному в центре слоя шириной  $(2N-1)$  ячеек. Эта аналогия будет использована в дальнейшем при анализе полученных результатов.



**Рис. 1.** Бесконечная периодическая последовательность вихрей попеременно чередующейся ориентации, эквивалентная единичному вихрю в плоской пластине толщиной в 5 ячеек.



**Рис. 2.** Распределение „контурных“ скачков фазы в ячейках для одного квадранта конфигурации „а“ вихря в плоскости, перпендикулярной его оси. Жирными линиями показаны контакты, скачки фазы в которых не предполагаются малыми. Точкой обозначена ячейка, содержащая 1 квант потока  $\Phi_0$ , все остальные содержат 0 квантов.

Рассмотрим конфигурацию „а“ линейного вихря — центр вихря в центре ячейки. На рис. 2 изображена структура одного квадранта такого вихря в полосе шириной 13 ячеек ( $N = 7$ ). В этом случае расстояние между центрами соседних вихрей в периодической картине равно 14. Такой вихрь обладает вертикальной и горизонтальной плоскостями симметрии, проходящими через центр левой нижней ячейки на рис. 2. На этой основе, зная распределение токов на рис. 2, можно построить все сечение вихря.

В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида [4]:

$$2\pi \Phi_m / \Phi_0 + \sum_k \varphi_k^{(m)} = 2\pi K_m, \quad (1)$$

где  $\sum_k \varphi_k^{(m)}$  — сумма скачков фазы на джозефсоновских контактах  $m$ -й ячейки;  $\Phi_m$  — полный магнитный поток через  $m$ -ю ячейку;  $\Phi_0$  — квант магнитного потока;  $K_m$  — целое число, равное 1 для центральной ячейки вихря и нулю для всех остальных. Величины джозефсоновских токов  $J_k = J_c \sin \varphi_k$  по мере удаления от центра вихря убывают, причем скорость убывания возрастает с ростом величины критического тока  $J_c$ . В результате расчета мы увидим, что можно считать малыми (так что  $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ ) скачки фаз на всех контактах, кроме самых больших по величине скачков фазы  $\varphi_1 - \varphi_7$ . Участки, на которых скачки фаз не считаются малыми, на рис. 2 выделены жирными линиями.

Чтобы избежать выписывания условий баланса токов в узлах, удобно воспользоваться методом „контурных токов“ ячеек. Пусть в каждой ячейке протекает контурный ток, равный произведению  $J_c$  на соответствующий



Общее решение системы (3) имеет вид (при  $m \geq 0$ )

$$\begin{aligned}\psi_m &= \sum_{i=1}^7 A_i \lambda_i^m; & \xi_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i k_i \lambda_i^m; \\ \eta_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i (k_i^2 - 2) \lambda_i^m; & \rho_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i k_i (k_i^2 - 3) \lambda_i^m; \\ \xi_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i (k_i^4 - 4k_i^2 + 2) \lambda_i^m; \\ \mu_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i k_i (k_i^4 - 5k_i^2 + 5) \lambda_i^m; \\ \chi_m &= 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i (k_i^6 - 6k_i^4 + 9k_i^2 - 2) \lambda_i^m.\end{aligned}\quad (15)$$

Для нахождения  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ), а также величин контурных токов в нижнем ряду на рис. 2:  $\beta_0, \gamma_0, \theta_0, \omega_0, \nu_0, \pi_0$  и скачков фазы  $\varphi_4 = \psi_0 - \psi_1$ , запишем условия (1) для ячеек двух нижних рядов на рис. 2, а также упомянутое выше добавочное условие  $\varphi_4 = \psi_0 - \psi_1$  и следующие условия баланса токов в узлах, отмеченных темными кружками на рис. 2:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_3 + \xi_0 &= \sin \varphi_4 + \psi_1, \\ \sin \varphi_6 + \eta_0 &= \xi_0, \\ \sin \varphi_5 + \gamma_0 &= \beta_0, \\ \sin \varphi_7 + \theta_0 &= \gamma_0, \\ \sin \varphi_2 + \beta_0 - \xi_0 &= \sin \varphi_1 + \sin \varphi_3.\end{aligned}\quad (16)$$

В результате получим 20 уравнений для 20 неизвестных. Как и в [7], воспользуемся методом последовательных приближений по величинам  $\varphi_3 - \varphi_7$ . Для этого представим эти величины и их синусы в виде  $\varphi_5 = \varphi_3^0 + \delta_3$ ,  $\sin \varphi_3 = \sin \varphi_3^0 + \cos \varphi_3^0 \cdot \delta_3$  и т.д., где  $\varphi_3^0 - \varphi_7^0$  считаем известными величинами (на первой итерации равными нулю), а  $\delta_3 - \delta_7$  являются новыми неизвестными (вместо  $\varphi_3 - \varphi_7$ ), относительно которых система линейна.

Тогда 18 из 20 уравнений будут линейными. Вычислив обратную матрицу, выразим 18 неизвестных  $A_1 - A_7, \beta_0, \gamma_0, \theta_0, \omega_0, \nu_0, \pi_0, \delta_3 - \delta_7$  через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Подставив полученные выражения в оставшиеся 2 уравнения, получим систему из двух нелинейных уравнений относительно двух неизвестных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = [2\pi - I \sin \varphi_1 - b_1 \varphi_1 - b_2] / b_3, \quad (17)$$

$$\varphi_1 = [2\pi - I \sin \varphi_2 - b_4 \varphi_1 - b_5] / b_6, \quad (18)$$

где коэффициенты  $b_1 - b_6$  являются функциями  $I$ , а также величин  $\varphi_3^0 - \varphi_7^0$ .

Кривые (17) и (18) имеют только одну точку пересечения, соответствующие которой значения  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$  находятся численным методом. Зная  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$ , находим все остальные неизвестные. Для следующей итерации возьмем новые значения  $\varphi_3^0 - \varphi_7^0$ , добавив к их предыдущим значениям полученные величины  $\delta_3 - \delta_7$ , и снова решим систему. Итерационная процедура сходится, т.е. каждая следующая итерация дает на порядки меньшие значения  $\delta_3 - \delta_7$ . Таким способом исходную систему можно решить с любой степенью точности всего за несколько шагов.

Аналогично решается задача для вихрей конфигурации „b“. Отличие состоит только в том [7], что скачки фазы в самом нижнем ряду на рис. 3 не равны их значениям в следующем ряду (с противоположным знаком), как для случая „a“, а обращаются в нуль на всех контактах, кроме центрального, на котором этот скачок равен  $\pi$ . При этом все соотношения (3)–(16) останутся в силе. Незначительно изменятся некоторые из 20 уравнений системы, в результате чего другими станут выражения для коэффициентов  $b_i$  в уравнениях (17) и (18).

На рис. 3 и 4 изображены рассчитанные распределения скачка фазы по контактам вихрей в конфигурациях „a“ и „b“ для значения  $I = 10^{-6}$ . Видно, что условие справедливости расчета ( $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ ) для обеих конфигураций действительно выполнено для всех  $\varphi_k$ , кроме, возможно,  $\varphi_1 - \varphi_7$ .

Полученные результаты показывают, что в отличие от плоских вихрей, ширина которых с убыванием  $I$  стремится к бесконечности [6], линейные вихри при любых значениях  $I$  имеют центральную часть размером

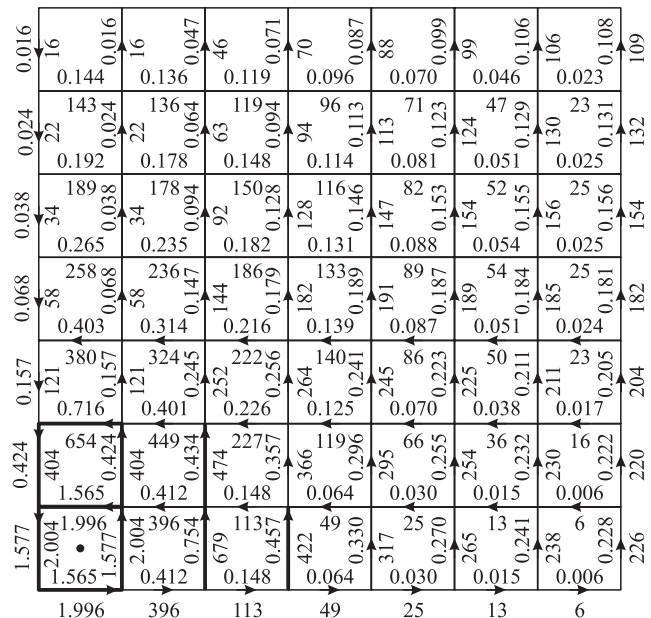


Рис. 3. Распределение скачков фазы в конфигурации „a“ вихря при  $I = 10^{-6}$ . Верхние числа соответствуют точному расчету, нижние — приближению суперпозиции непрерывных вихрей.

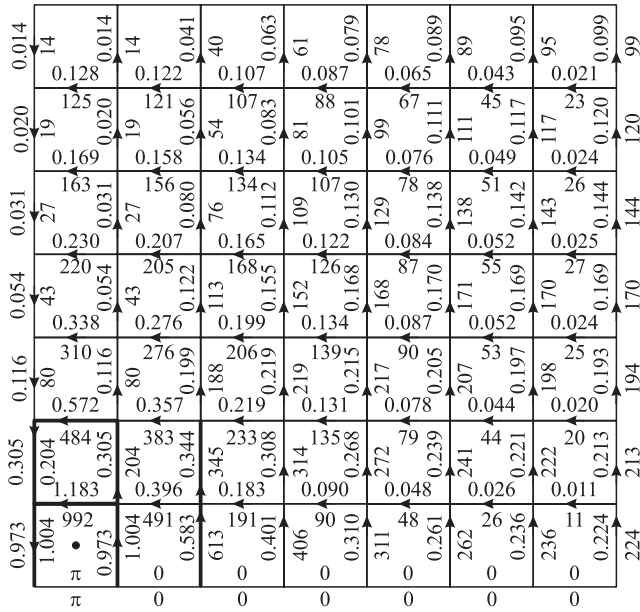


Рис. 4. Распределение скачков фазы и конфигурации „b“ вихря при  $I = 10^{-6}$ .

в несколько ячеек, где скачки фазы, а значит, и токи в контактах, намного больше, чем в остальной области вихря. Можно сказать, что плоские вихри с убыванием  $I$  расплываются, а линейные — всегда имеют в центре „пупырышку“ размером в несколько ячеек. Речь идет именно о структуре вихря, величины же токов убывают с уменьшением  $J_c$ , если именно ему обязан  $I$  своим убыванием. Если же  $I$  уменьшается из-за убывания периода решетки  $a$ , то остов вихря уменьшается в диаметре, но значения токов не изменяются.

На рис. 3 можно видеть, что из-за притяжения со стороны соседей вихрь растягивается по направлению к ним, сжимаясь в перпендикулярном направлении. Это проявляется в том, что горизонтальные токи на рис. 3 больше симметричны им вертикальным.

При малых значениях  $I$  размеры вихря велики. Рассматривая последовательность периодически расположенных вихрей, нужно понимать, что при любом периоде найдутся столь малые  $I$ , при которых размеры отдельных вихрей сравнимы с этим периодом. В этом случае нельзя считать вихрь уединенным, а при расчете распределения токов и фаз нужно учитывать вклады, вносимые другими вихрями, причем не только ближайшими, но и весьма удаленными.

В работе [5] рассматривается вопрос о переходе от дискретного случая к непрерывному при малых значениях параметра пиннинга  $I$ . Так показано, что вихрь в непрерывной среде описывается теми же уравнениями, что и обычный абрикосовский [8], но роль лондоновской глубины проникновения играет величина  $\lambda_J = a/\sqrt{I}$ . Тогда магнитное поле и плотность тока вне остова

описываются выражениями

$$H(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda_J^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda_J}\right) = \frac{J_c}{a} K_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{I}\right), \quad (19)$$

$$j = |\text{rot } \mathbf{H}| = \frac{J_c\sqrt{I}}{a^2} K_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{I}\right), \quad (20)$$

где  $K_0$  и  $K_1$  — функции Бесселя от мнимого аргумента нулевого и первого порядков. При малых значениях аргумента  $K_0(x) \approx -\ln x$ ,  $K_1(x) \approx 1/x$ , поэтому не очень далеко от центра вихря плотность тока описывается формулой  $j = J_c/ar$ . В [5] предлагается производить сопоставление распределения скачков фазы в дискретном случае с плотностью тока  $\mathbf{j}$  в непрерывном на базе следующего соотношения:

$$\mathbf{j} = J_x/a^2\mathbf{n}_x + J_y/a^2\mathbf{n}_y = (\varphi_x\mathbf{n}_x + \varphi_y\mathbf{n}_y)J_c/a^2, \quad (21)$$

где  $\mathbf{n}_x$  и  $\mathbf{n}_y$  — единичные векторы вдоль осей в плоскости, перпендикулярной оси вихря;  $J_x, J_y, \varphi_x$  и  $\varphi_y$  — токи и скачки фазы на горизонтальных и вертикальных контактах вблизи рассматриваемой точки. Тогда скачки фаз на контактах можно рассчитать, проектируя вектор  $\mathbf{j}$  на оси  $x$  и  $y$ .

Вясним, в какой степени справедливы эти утверждения, и как далеко от центра вихря можно считать вихрь непрерывным. При малых  $I$  рассматриваемая конфигурация не может считаться уединенным вихрем. Она создается бесконечной последовательностью вихрей, каждый из которых вносит свой вклад в плотность тока  $\mathbf{j}$  в каждой точке. Поэтому скачки фазы в горизонтальных или вертикальных участках вычисляются как суммы членов вида (20), умноженных на косинусы соответствующих углов и чередующихся по знаку.

На рис. 3 и 4 приведены результаты такого расчета скачков фазы (нижние значения). Видно, что приближение суперпозиции непрерывных вихрей дает хорошие результаты везде, кроме непосредственной окрестности их центров радиусом 3–4 ячейки.

## Энергии равновесных состояний вихря

В [7] показано, что в отличие от абрикосовских вихрей в непрерывной среде, где при малых значениях  $I$  можно пренебречь энергией остова, в дискретной среде энергия остова сопоставима с энергией наружной части. В [7] приведены выражения для энергий вихрей обеих конфигураций с учетом энергии остова. Однако получены эти выражения в рамках весьма грубых количественных оценок. Представляется интересным проверить эти приближенные выражения в рамках более точного расчета.

Джозефсоновские  $E_J^{a,b}$  и магнитные  $E_H^{a,b}$  энергии единицы длины вихря в конфигурациях „a“ и „b“ определяются выражениями

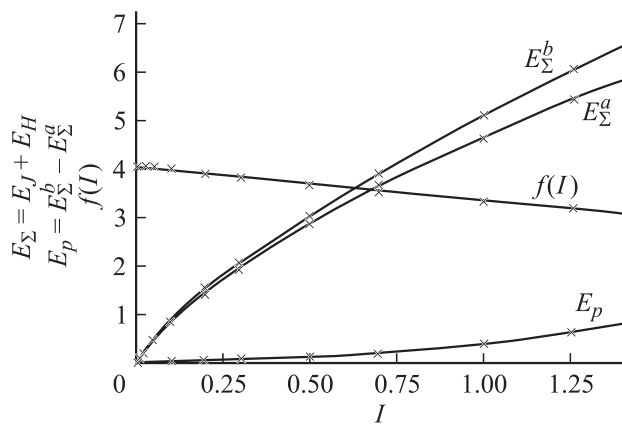
$$E_J^{a,b} = \frac{E_c}{a} \sum_k (1 - \cos \varphi_k) = IE_0 \sum_k (1 - \cos \varphi_k), \quad (22)$$

$$E_H^a = \sum_m \frac{B_m^2}{2\mu_0} V_m = I^2 E_0 \left[ 2 \sum_{m=0}^{\infty} (0.5\psi_m^2 + \xi_m^2 + \eta_m^2 + \dots + \chi_m^2) - \psi_0^2 + (\sin \varphi_4 + \psi_1)^2 + 0.5(\sin \varphi_2 + \beta_0)^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 + \dots + \pi_0^2 \right], \quad (23)$$

$$E_H^b = I^2 E_0 \left[ 2 \sum_{m=0}^{\infty} (0.5\psi_m^2 + \xi_m^2 + \eta_m^2 + \dots + \chi_m^2) - \psi_0^2 + (\sin \varphi_4 + \psi_1)^2 + (\sin \varphi_2 + \beta_0)^2 + 2(\beta_0^2 + \gamma_0^2 + \dots + \pi_0^2) \right], \quad (24)$$

где  $E_c = \Phi_0 J_c / 2\pi$  — энергия джозефсоновского контакта;  $B_m^2 / 2\mu_0$  — плотность магнитной энергии в  $m$ -й ячейке;  $V_m$  — соответствующий объем;  $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 a^2$  — нормировочная постоянная. Суммирование по  $k$  в (22) ведется по всем джозефсоновским контактам.

На рис. 5 приведены рассчитанные зависимости полных энергий вихрей двух конфигураций и их разности от значения параметра пиннинга  $I$ . Отметим, что сравнение этих величин с данными, полученными в [7], показывает полное совпадение результатов при  $I > 0.25$ . В [7] указывалось, что полученные там значения энергий правильны именно в этом диапазоне, когда вихрь полностью располагается в рассматриваемом квадрате. По мере уменьшения  $I$  значения энергий из [7] оказываются меньше полученных в настоящей работе. Это объясняется тем, что в [7] рассматривался вихрь, ограниченный со всех четырех сторон (в настоящей работе — с двух). Это эквивалентно тому, что он расположен в квадратной решетке вихрей, где со всех четырех сторон ближайшие вихри ориентированы противоположно ему, т.е. притягивают его к себе. Притяжение соответствует отрицательной энергии взаимодействия, т.е. энергия вихря в такой решетке меньше энергии уединенного вихря. В рассматриваемом в настоящей работе случае



**Рис. 5.** Графики зависимостей от параметра пиннинга  $I$  энергий конфигураций „а“ и „б“, их разности, а также функции  $f(I)$ .  $\times$  — результаты расчета.

вихрь имеет только двух ближайших соседей (а не 4), поэтому модуль энергии взаимодействия меньше, а полная энергия больше чем в [7].

При малых значениях  $I$  размеры вихря велики, и нельзя пренебрегать взаимодействием вихря с его соседями. Рассчитаем энергию, приходящуюся на один вихрь в ситуации, изображенной на рис. 1, при расстоянии между центрами соседних вихрей, равном  $d$  ячеек.

Выше было показано, что у каждого вихря существует центральная часть (остов), в которой существенна дискретность среды, а в наружных областях зависимость  $\varphi$  от координат можно считать квазинепрерывной. Поля и токи в случае уединенного вихря описываются формулами (19), (20), а полная энергия вихря радиусом  $R$  ячеек в пренебрежении его центральной частью равна [8]

$$E = E_0 \pi I K_0(R\sqrt{I}). \quad (25)$$

Энергия взаимодействия двух вихрей при расстоянии между центрами  $d$  ячеек, равна [8]

$$E = \pm E_0 \pi I K_0(d\sqrt{I}), \quad (26)$$

где плюс соответствует отталкиванию, а минус — притяжению.

Выбранный нами вихрь взаимодействует со всеми вихрями в бесконечной цепочке, причем знаки энергий чередуются. Тогда теоретическая полная энергия вихря без учета остова складывается из его „собственной“ энергии и суммы энергий взаимодействия со всеми вихрями:

$$E_T = E_0 \pi I \left[ K_0(R\sqrt{I}) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_0(dm\sqrt{I})(-1)^m \right]. \quad (27)$$

Чтобы найти добавку, вносимую остовом, нужно из вычисляемой по формулам (22)–(24) суммы джозефсоновской и магнитной энергии вычесть величину (27). Поскольку при малых  $I$  распределение скачков фазы в центральной области вихря перестает зависеть от  $I$ , то энергия остова должна быть прямо пропорциональна  $I$ . На рис. 5 приведена кривая зависимости  $f(I) = (E_J + E_H - E_T)/I$  для конфигурации „а“ в предположении  $R = 1$ . При малых значениях  $I$  величина  $f(I)$  равна 4.08. Аналогичным образом для конфигурации „б“ получим 4.29. Видно, что предположение о пропорциональности энергии остова величине  $I$  достаточно хорошо выполняется в широком диапазоне значений  $I$ . Важно отметить, что расчеты, проведенные при других значениях периода  $d$  (например, при  $N = 5$  и  $N = 6$ ), дают кривые  $f(I)$ , в точности совпадающие с изображенной на рис. 5, что может служить подтверждением правильности модели.

Может возникнуть вопрос, почему при стремлении  $I$  к нулю коэффициент при  $I$  в энергии вихря, равный в уединенном вихре  $K_0(R\sqrt{I})$ , не стремится к бесконечности, а остается постоянным.

Воспользовавшись при малых  $x$  и  $y$  соотношениями [9]

$$K_0(x) \cong -C - \ln \frac{x}{2};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_0(my)(-1)^m \cong \frac{1}{2} \left( C + \ln \frac{y}{4\pi} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \right);$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=1}^M \left( \frac{1}{2m} \right) - \frac{1}{2} \ln M \right) = \frac{C}{2};$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \left( \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2} \ln M \right) = \frac{C}{2} + \ln 2,$$

где  $C = 0.577$  — постоянная Эйлера, при малых  $\sqrt{I}$  можно преобразовать выражение (27) к виду

$$E_T = E_0 \pi I \ln \frac{2d}{\pi R}. \quad (28)$$

Таким образом, вместо расходящейся при стремлении  $I$  к нулю функции  $K_0(R\sqrt{I})$  в энергии уединенного вихря, в случае периодической цепочки вихрей мы получаем не зависящую от  $I$  величину  $\ln \frac{2d}{\pi R}$ , определяемую периодом  $d$ .

Этот вывод справедлив при условии  $d\sqrt{I} \ll 1$ . Таким образом, для любого, сколь угодно большого, значения периода  $d$ , при  $\sqrt{I} \ll 1/d$  нельзя пренебрегать взаимодействием вихрей и считать вихрь уединенным.

Добавляя энергию остова к (25), получим выражение для энергии уединенных вихрей при  $I \ll 1$

$$E^a = E_0 I [\pi K_0(\sqrt{I}) + 4.08] = E_0 \frac{\pi}{2} I \left( \ln \frac{1}{I} + 2.60 \right), \quad (29)$$

$$E^b = E_0 I [\pi K_0(\sqrt{I}) + 4.29] = E_0 \frac{\pi}{2} I \left( \ln \frac{1}{I} + 2.73 \right). \quad (30)$$

В [7] получены аналогичные выражения для энергий вихрей в конфигурациях „ $a$ “ и „ $b$ “, но числа в скобках равны 2.77 для „ $a$ “ и 2.81 для „ $b$ “. Можно отметить хорошее совпадение результатов точного расчета (29) и (30) с полученными весьма приблизительно значениями [7]. Правда, уточненная величина энергии пиннинга  $E_p = E^b - E^a$  оказалась в 3 раза большей, чем в [7]. Это расхождение не должно удивлять, поскольку разность энергий двух конфигураций является величиной более высокого порядка малости, чем сами энергии, и может существенно зависеть от деталей рассматриваемых моделей.

## Заключение

Предложена новая методика нахождения структуры двух равновесных конфигураций линейного вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде: центр вихря расположен в центре одной из ячеек; центр вихря находится на одном из контактов. Эта

методика позволяет весьма точно рассчитывать токовую конфигурацию вихря, сечение которого плоскостью, перпендикулярной его оси, представляет собой не квадрат, как в предыдущих работах, а бесконечную полосу, в среднем ряду которой находится центр вихря. Ширина полосы для рассмотренного в работе случая равна 13 ячейкам, но предложенная методика позволяет при желании произвольно увеличить эту ширину. При этом число неизвестных растет пропорционально ширине полосы. Существовавшие методики были ограничены небольшими по размеру квадратами, поскольку число неизвестных пропорционально площади квадрата.

Методика основана на том, что уже на небольшом удалении от центра вихря скачки фазы на контактах могут считаться малыми, что позволяет получить линейную систему уравнений в конечных разностях. Эта система имеет точное решение, коэффициенты для которого находятся из условий квантования флюксоида в близких к центру вихря ячейках. Кроме того, используется идея приближения к точному решению путем последовательных итераций по значениям скачков фазы, которые не могут считаться малыми.

Показано, что рассматриваемая конфигурация эквивалентна периодической последовательности вихрей попеременно чередующейся ориентации. Эта идентичность позволяет понять механизм влияния размеров и формы рассматриваемой области на структуры и энергии вихрей, на основе чего выводятся формулы, описывающие вихри при любых сколь угодно малых значениях параметра пиннинга.

Полученные результаты показывают, что в отличие от плоских вихрей, ширина которых с убыванием  $I$  стремится к бесконечности, линейные вихри при любых значениях  $I$  имеют центральную часть размером в несколько ячеек, где скачки фазы, а значит, и токи в контактах, намного больше, чем в остальной области вихря.

При малых значениях  $I$  размеры вихря велики. Рассматривая последовательность периодически расположенных вихрей, нужно понимать, что при любом периоде найдутся столь малые  $I$ , при которых размеры отдельных вихрей сравнимы с этим периодом. В этом случае нельзя считать вихрь уединенным, а при расчете распределения токов и фаз нужно учитывать вклады, вносимые другими вихрями, причем не только ближайшими, но и весьма удаленными.

Показано, что везде, кроме непосредственной окрестности центров вихрей радиусом 3–4 ячейки, распределение скачка фазы по контактам может рассчитываться как суперпозиция распределений, созданных набором непрерывных вихрей. Это относится не только к рассматриваемой конфигурации, но и к более общим случаям.

Рассчитаны энергии двух равновесных состояний линейных вихрей в рассматриваемой геометрии. Показано, что для сколь угодно большой ширины полосы существует область малых значений  $I$ , в которой нельзя

считать вихрь уединенным и пренебрегать его взаимодействием с вихрями цепочки (или с границей образца). Полная энергия вихря складывается из его „собственной“ энергии и суммы энергий его взаимодействия со всеми вихрями цепочки. Собственная энергия может быть представлена как сумма энергий геометрически малого по размеру дискретного остова и квазинепрерывной внешней части. Показано, что энергия остова при малых значениях параметра пиннинга  $I$  линейно зависит от него, причем коэффициент пропорциональности таков, что энергия остова сопоставима с энергией наружной части.

Полученные выражения для собственных энергий вихря количественно согласуются с результатами, полученными ранее на базе менее точного рассмотрения. При этом энергия вихря с центром на контакте при всех значениях  $I$  оказалась больше энергии конфигурации с центром в середине ячейки, как предсказывалось и в предыдущих работах. Однако величина разности этих энергий оказалась примерно втрое большей, чем считалось ранее.

## Список литературы

- [1] *Kivshar Y.S., Malomed B.A.* // Rev. Mod. Phys. 1989. Vol. 61. P. 763.
- [2] *Брыксин В.В., Дороговцев С.Н.* // ЖЭТФ. 1992. Т. 102. С. 1025.
- [3] *Parodi F., Vaccarone R.* // Physica C. 1991. Vol. 173. P. 56.
- [4] *Zelikman M.A.* // Superconductor Science & Technology. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469–474.
- [5] *Zelikman M.A.* // Superconductor Science & Technology. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795–800.
- [6] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. № 7. С. 28–35.
- [7] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 1. С. 37–44.
- [8] *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
- [9] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.