

01;03

Нелинейные осцилляции заряженной капли в электростатическом подвесе

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 2 августа 2005 г.)

С помощью аналитических асимптотических методов найдено решение задачи о нелинейных осцилляциях заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, в электростатическом подвесе, в квадратичном приближении по двум малым параметрам: амплитуде осцилляций и величине равновесной деформации формы капли в электростатическом поле. Для аналитического решения задачи характерно разложение искомых величин по полущелым степеням малого параметра. Выяснилось, что и заряд капли, и внешнее гравитационное поле вносят вклады как в форму капли, так и в нелинейные поправки к частотам осцилляций, и в критические условия реализации неустойчивости капли по отношению к поверхностному заряду. При зарядах капли, близких к критическим, форма нелинейно-осциллирующей капли существенно отличается как от сферы, так и от сфероида, что необходимо учитывать при интерпретации экспериментальных данных.

PACS: 47.55.D-

Несмотря на обилие исследований нелинейных осцилляций заряженных капель, выполненных за два последних десятилетия и продолжающихся в настоящее время [1–4], изучение осцилляций капли во внешнем электростатическом поле только начинается. На сегодняшний день проведены лишь два нелинейных аналитических асимптотических исследования осцилляций и устойчивости: в квадратичном приближении по амплитуде осцилляций [5] и в приближении $\sim 5/2$ [6]. За исключением [5,6] все работы по расчету осцилляций незаряженных и заряженных капель во внешних силовых полях выполнены лишь в линейном приближении по амплитуде осцилляций [7–9] вследствие громоздкости задачи, содержащей два независимых малых параметра: один характеризует стационарную деформацию капли во внешних силовых полях, второй — амплитуду нелинейных осцилляций. Тем не менее, в силу широкого применения различного вида бесконтактных подвесов для жидких капель (электростатических, электродинамических, аэродинамических, акустических [10–15]), использующихся как для получения сверхчистых веществ, так и для исследования закономерностей электростатического распада, анализ таких осцилляций необходим для корректной интерпретации результатов экспериментов.

В связи с этим в настоящей работе проводится расчет нелинейных осцилляций заряженной капли в электростатическом подвесе в суперпозиции коллинеарных гравитационного поля и внешнего электростатического поля в предположении, что оба малых параметра задачи имеют один порядок величины.

Пусть в вакууме капля электропроводной несжимаемой идеальной жидкости, имеющей заряд Q (который для определенности примем положительным), в поле

сил тяжести \mathbf{g} подвешена в однородном внешнем электростатическом поле напряженностью \mathbf{E}_0 , где $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{E}_0$. Примем, что жидкость имеет плотность ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ . В отсутствие электростатического и гравитационного полей капля имеет сферическую форму с радиусом R . Согласно [16], равновесная форма такой капли представляет собой вытянутый по полю сфероид с эксцентриситетом e в квадратичном по e приближении (а именно такое приближение обеспечивает необходимую строгость асимптотических расчетов нелинейных осцилляций капли в приближении $\sim \varepsilon e^2$ и $\sim \varepsilon^2$, которое используется в настоящем исследовании): $e^2 \equiv 36w/(4 - W)$; $W \equiv Q^2/4\pi$; $w \equiv E_0^2/16\pi$. При записи выражений для эксцентриситета используются, как и во всей работе, безразмерные переменные, в которых $\rho = \sigma = R = 1$. Условие неподвижности центра масс капли в подвесе записывается в виде: $g = 3QE_0/4\pi$.

Поскольку давление электрического поля на поверхность капли $p_E \sim E_0^2$ приводит к сфероидальному искажению ее равновесной сферической формы то, следовательно, давление должно иметь тот же порядок малости, что и вызванное им искажение. Но так как параметры e^2 и ε имеют один порядок малости, то $p_E \sim E_0^2 \sim e^2 \sim \varepsilon$, или $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$. Поскольку заряд не нарушает сферичности равновесной формы капли, то примем $Q \sim \varepsilon^0$. Для гравитационного поля получится $g \sim QE_0 \sim \varepsilon^{1/2}$.

Математическая формулировка задачи о расчете нелинейных осцилляций и используемый метод отыскания аналитического решения аналогичны использованному ранее в [5,6], поэтому, не приводя их, запишем окончательное выражение для образующейся нелинейно-

осциллирующей капли:

$$r(\theta, t) = 1 + \frac{e^2}{3} P_2(\mu) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_n^{(1)}(t) + \varepsilon^{1/2} M_n^{(3/2)}(t) + \varepsilon M_n^{(2)}(t) \right) P_n(\mu) + O(\varepsilon^{5/2});$$

$$(n \geq 2); \quad M_n^{(1)}(t) = h_i \delta_{i,n} \cos[(\omega_n - \varepsilon b_n)t]; \quad \mu \equiv \cos \theta;$$

$$\varepsilon^{1/2} M_n^{(3/2)} = - (h_{n-1} \chi_{n-1} + h_{n+1} \chi_{n+1}) \cos \omega_n t + h_{n-1} \chi_{n-1} \cos(\omega_{n-1} t) + h_{n+1} \chi_{n+1} \cos(\omega_{n+1} t);$$

$$\begin{aligned} \varepsilon M_n^{(2)}(t) = & - \left[\frac{h_n}{n(2n+1)} ((2n+3)(n+1)(\chi_{n+1})^2 + (2n-1)(n-1)(\chi_{n-1})^2) + h_{n+2} \chi_{n+2} \right. \\ & - \chi_{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{(\omega_{n+1}^2 - \omega_{n+2}^2)(2n+5)} \left(\frac{3QE_0}{4\pi} (2n+1) - g \right) \\ & + h_{n-2} \left(\chi_{n-2} - \chi_{n-1} \frac{(n-1)^2}{(\omega_{n-1}^2 - \omega_{n-2}^2)(2n-3)} \times \left(\frac{3QE_0}{4\pi} (2n-5) - g \right) \right) \left. \right] \cos \omega_n t + h_{n+2} \chi_{n+2} \cos \omega_{n+2} t \\ & + h_{n-2} \chi_{n-2} \cos \omega_{n-2} t + \chi_{n-1} (n+1) \left(\frac{(2n+3)h_n \chi_{n+1}}{n(2n+1)} - \frac{h_{n+2}(n+2) \left(\frac{3QE_0}{4\pi} (2n+1) - g \right)}{(\omega_{n+1}^2 - \omega_{n+2}^2)(2n+5)} \right) \cos \omega_{n+1} t \\ & + \chi_{n-1} (n-1) \left(\frac{(2n-1)h_n \chi_{n-1}}{n(2n+1)} - \frac{h_{n-2} \left(\frac{3QE_0}{4\pi} (2n-5) - g \right)}{(\omega_{n-1}^2 - \omega_{n-2}^2)(2n-3)} \right) \cos \omega_{n-1} t \\ & + \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} \frac{h_i h_j}{2} \left\{ \lambda_{ijn}^{(+)} [\cos(\omega_i + \omega_j)t - \cos \omega_n t] + \lambda_{ijn}^{(-)} [\cos(\omega_i - \omega_j)t - \cos \omega_n t] \right\}; \end{aligned}$$

$$\varepsilon^2 M_0^{(2)}(t) = - \sum_{i \in \Xi} \frac{\varepsilon^2 h_i^2}{2i+1} (\cos \omega_i t)^2 - \varepsilon e^2 \frac{2h_2}{15} \cos \omega_2 t;$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 M_1^{(2)}(t) = & - \sum_{i \in \Xi} \frac{9i h_{i-1} h_i \varepsilon^2}{(2i-1)(2i+1)} \cos \omega_{i-1} t \cos \omega_i t \\ & - \varepsilon e^2 \frac{9h_3}{35} \cos \omega_3 t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon b_n \equiv & \left[\frac{n^2}{(2n-1)(2n+3)} \left(e^2 (n+1) \left(n^2 + \frac{\omega_n^2}{(n-1)n} \right) + \frac{9E_0^2}{4\pi} \frac{2(n-1)n(2n+3)-1}{2n+1} \right) + \frac{1}{(\omega_{n-1}^2 - \omega_n^2)} \right. \\ & \times \frac{(n-1)n^3}{(2n-1)(2n+1)} \left(\frac{3QE_0}{4\pi} (2n-3) - g \right)^2 \\ & + \frac{1}{(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)} \frac{(n+1)^3 n}{(2n+1)(2n+3)} \\ & \left. \times \left(\frac{3QE_0}{4\pi} (2n-1) - g \right)^2 \right] \frac{1}{2\omega_n}; \\ \lambda_{kmn}^{(\pm)} = & \frac{1}{2} \frac{(\gamma_{kmn} + \gamma_{mkn}) \pm \omega_k \omega_m (\eta_{kmn} + \eta_{mkn})}{\omega_n^2 - (\omega_k \pm \omega_m)^2}; \\ \omega_n^2 = & n(n-1)(n+2-W). \end{aligned} \quad (1)$$

В представленных выражениях коэффициенты h_m определяют парциальный вклад m -й моды в форму начальной деформации из спектра номеров Ξ , ее определяющих. Коэффициенты χ_j , явный вид которых не приводится из соображений экономии места, пропорциональны линейной комбинации заряда капли и гравитационного поля. В частности, коэффициенты $\chi_{n\pm 1}$ обращаются в ноль при $Q \rightarrow 0$, $g \rightarrow 0$. Коэффициенты γ_{kmn} и η_{kmn} выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана [4–6].

В полученных выражениях „бросаются в глаза“ следующие отличия от ранее разобранных задач о нелинейных осцилляциях заряженной капли [1–5]:

1) нелинейная поправка к частоте εb_n появляется в расчетах второго порядка малости, линейна по амплитуде осцилляций, определяется формой стационарной деформации капли во внешних полях, зависит от величины заряда капли, наличия электрического и гравитационного полей и всегда отрицательна, что приводит к снижению критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к суперпозиции собственного и индуцированного заряда (см. рис. 1);

2) в выражении для образующей формы капли, в отличие от [1–5] и ситуации незаряженной капли во внешнем электростатическом поле [6,7], появляется слагаемое, пропорциональное амплитуде осцилляций в степени 3/2, обращающееся в ноль при $Q \rightarrow 0$, $g \rightarrow 0$. Сама форма капли при зарядах, близких к критическому, по Рэлею, значению, т.е. когда электростатический подвес используется для проверки критерия Рэлея, существенно отличается от сферической (см. рис. 2), что приводит к погрешностям, обусловленным использованием электростатического подвеса, особенно при наличии нелинейных осцилляций;

3) нелинейные поправки к амплитудам нулевой $M_0^{(2)}(t)$ и первой (трансляционной) $M_1^{(2)}(t)$ мод содержат слагаемые, пропорциональные косинусам основной и третьей мод соответственно, обращающиеся в ноль

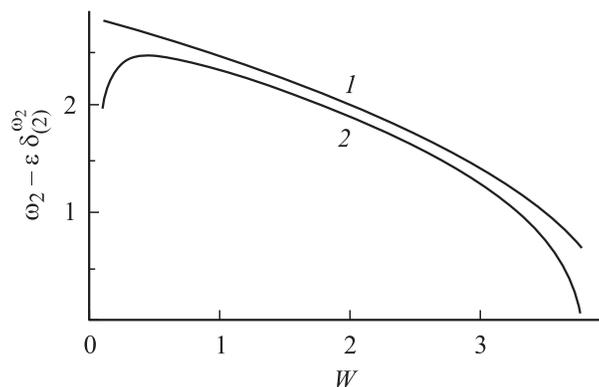


Рис. 1. Зависимость частоты основной моды от параметра Рэлея W без учета нелинейной поправки (1) и с учетом (2), нелинейной поправки $\varepsilon = 0.2$.

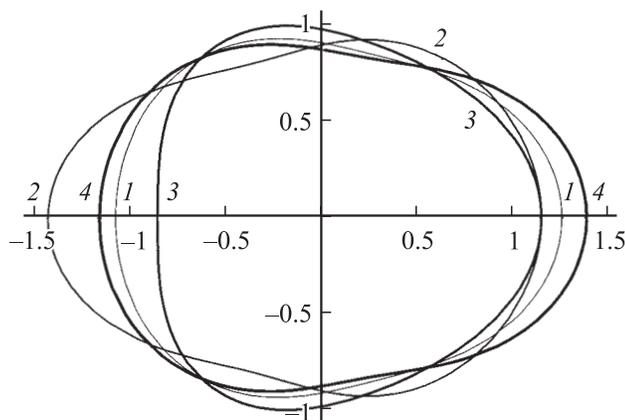


Рис. 2. Образующая формы нелинейно-осциллирующей капли, начальная деформация определена суперпозиций 2-й и 3-й мод, в различные моменты времени, измеренные в долях периода 2-й моды, $\varepsilon = 0.2$, $W = 3.7$. $t = 1 - 0$, $2 - 1/2 T_2$; $3 - T_2$; $4 - 37/16 T_2$.

при отсутствии номеров этих мод в спектре мод Ξ , определяющих начальную деформацию. Появление этих слагаемых связано с наличием стационарной деформации капли, которая совместно с зарядом и гравитационным полем приводит и к усложнению структуры спектра реализующихся нелинейных осцилляций. Количество и положения внутренних нелинейных резонансов, характеризующихся слагаемыми в (1), $\sim \lambda_{kmn}^{(\pm)}$, в использованном порядке приближений на зависят от наличия внешних полей, определяются только зарядом капли и не отличаются от ранее проанализированной ситуации свободной заряженной капли [1–4].

Использование для проверки критерия Рэлея устойчивости капли по отношению к собственному заряду электростатического подвеса (как в чистом виде [10,11], так и в комбинации с другими силовыми полями [13]) приводит к погрешностям, обусловленным стационарными деформациями капель. Возможные нелинейные осцилляции капель в подвесе приводят к еще большему увеличению погрешностей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-00760.

Список литературы

- [1] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
- [2] Feng Z. // J. Fluid Mech. 1997. V. 333. P. 1–21.
- [3] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
- [4] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 17. С. 28–35.
- [5] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 36–44.
- [6] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.
- [7] Cheng K.J. // Phys. Lett. 1985. V. A112. № 11. P. 392–396.
- [8] Feng Z.C., Beard K.V. // J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 429–447.
- [9] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 4. С. 84–88.
- [10] Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. // J. Colloid Sci. 1964. V. 19. P. 136–143.
- [11] Abbas M.A., Latham J. // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. № 4. P. 663–670.
- [12] Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. // J. Atmosph. Sci. 1970. V. 27. № 11. P. 1173–1181.
- [13] Schweizer J.W., Hanson D.N. // J. Cool. Int. Sci. 1971. V. 35. № 3. P. 417–423.
- [14] Roulleau M., Desbois M. // J. Atmosph. Sci. 1972. V. 29. № 4. P. 565–569.
- [15] Duft D., Lebius H., Huber B.A. et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. № 8. P. 1–4.
- [16] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.