

## О механизмах, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации

© А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
410012 Саратов, Россия  
e-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

(Поступило в Редакцию 22 марта 2005 г.)

Выявлен универсальный механизм, приводящий к возникновению режимов обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических осцилляторах. Рассмотрение основано на введении модифицированной системы с дополнительной диссипацией. Данный подход иллюстрируется рядом модельных примеров. Сделан вывод о том, что два типа поведения нелинейных динамических систем, известные как обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, которые считались различными явлениями, представляют собой единый тип синхронного поведения хаотических осцилляторов, а их возникновение обусловлено одним и тем же универсальным механизмом.

PACS: 05.45.Xt

### Введение

Синхронизация колебаний — одно из важнейших нелинейных явлений, привлекающих к себе широкое внимание исследователей [1], имеющих как теоретическое, так и практическое значение (например, в биологических и физиологических задачах [2], при скрытой передаче информации с помощью хаотических сигналов [3–5], при управлении системами сверхвысокочастотной электроники [6] и т. п.).

С развитием теории динамического хаоса было выявлено достаточно различных типов хаотического синхронного поведения связанных динамических систем [7,8]: фазовая синхронизация [7], обобщенная [9], лаг- [10], перемежающиеся лаг- [11] и обобщенная [12], полная синхронизации [13]. Каждый из этих типов синхронной хаотической динамики имеет свои особенности и способы диагностики, при этом в научной литературе активно обсуждается вопрос о взаимосвязи этих типов поведения. Разные типы синхронизации связанных хаотических осцилляторов могут рассматриваться как различные виды проявления единых закономерностей, возникающих в связанных нелинейных системах (см., например, [14–18]). В частности, в работах [16,17,19] введен в рассмотрение новый тип синхронного поведения хаотических осцилляторов — синхронизация временных масштабов, который естественным образом обобщает различные типы поведения, перечисленные выше.

Одним из вызывающих большой интерес видов синхронного хаотического поведения является режим обобщенной синхронизации однонаправленно связанных хаотических осцилляторов [9]. Данный тип поведения означает, что между состояниями взаимодействующих однонаправленно связанных ведущих  $x_d(t)$  и ведомого  $x_r(t)$  хаотических осцилляторов (с непрерывным или дискретным временем), существует такая функциональная зависимость  $F[\cdot]$ , что после завершения переходного

процесса устанавливается функциональное соотношение  $x_r(t) = F[x_d(t)]$ .

Сам вид данной зависимости  $F[\cdot]$  (гладкая или фрактальная) может быть достаточно сложным, а процедура ее нахождения весьма нетривиальна. Выделяют сильную и слабую обобщенную синхронизацию [20]. При этом следует отметить, что в качестве взаимодействующих осцилляторов могут выступать две разные динамические системы, в том числе и с различной размерностью фазового пространства.

В литературе предложены несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации между хаотическими осцилляторами, такие как метод ближайших соседей [9,21] или часто используемый метод вспомогательной системы [22]. Суть метода вспомогательной системы сводится к следующему: наряду с ведомой системой  $x_r(t)$  рассматривается идентичная ей вспомогательная система  $x_a(t)$ . Начальные условия для вспомогательной системы  $x_a(t_0)$  выбираются отличными от начального состояния ведомой системы  $x_r(t_0)$ , однако лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора. При отсутствии режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами вектора состояния ведомой  $x_r(t)$  и вспомогательной  $x_a(t)$  систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но являются различными. В том случае, когда имеет место режим обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений  $x_r(t) = F[x_d(t)]$  и соответственно  $x_a(t) = F[x_d(t)]$  после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными  $x_r(t) \equiv x_a(t)$  (более подробно см. [22]). Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса (который может быть достаточно длительным [12]) является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осцилляторами.

Анализ режима обобщенной синхронизации может быть проведен также с помощью вычисления условных

ляпуновских экспонент [23,24]. В этом случае рассчитываются ляпуновские экспоненты для ведомой системы, а так как ее поведение зависит от поведения ведущей системы, то эти экспоненты отличаются от экспонент автономной ведомой системы и называются условными. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных динамических системах является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя [20,23]. Следует также отметить, что для однонаправленно связанных хаотических осцилляторов режимы полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием также являются частными случаями режима обобщенной синхронизации [20].

Цель данной работы является выявление и иллюстрация универсального механизма, приводящего к возникновению режимов обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических осцилляторах. Структура работы следующая. В разделе 1 рассматривается подход к объяснению возникновения обобщенной синхронизации, основанный на введении в рассмотрение модифицированной системы. В разделах 2 и 3 приводятся результаты исследования возникновения обобщенной синхронизации в ряде модельных систем с различными типами связи. В разделе 4 обсуждается взаимосвязь между явлениями обобщенной хаотической синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, и делается вывод, что оба явления представляют собой единый тип синхронного поведения хаотических осцилляторов, а их возникновение обусловлено одним и тем же универсальным механизмом.

## 1. Метод модифицированной системы применительно к анализу обобщенной хаотической синхронизации

Рассмотрим поведение двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_d, \mathbf{g}_d), \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{G}(\mathbf{x}_r, \mathbf{g}_r) + \varepsilon \mathbf{P}(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_r),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\mathbf{x}_{d,r}$  — векторы состояний ведущей и ведомой систем соответственно;  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  определяют векторное поле рассматриваемых систем,  $\mathbf{g}_d$  и  $\mathbf{g}_r$  являются векторами параметров, слагаемое  $\mathbf{P}$  отвечает за однонаправленную связь между системами, а параметр  $\varepsilon$  определяет силу связи между системами.

Если размерности фазовых пространств ведущей и ведомой систем соответственно равны  $N_d$  and  $N_r$ , то поведение однонаправленно связанных хаотических осцилляторов (1) может быть охарактеризовано с помощью спектра ляпуновских показателей  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_d+N_r}$ . В силу независимости поведения ведущей системы от состояния ведомого осциллятора спектр ляпуновских показателей может быть разделен

на две части: ляпуновские показатели ведущей системы  $\lambda_1^d \geq \dots \geq \lambda_{N_d}^d$  и условные ляпуновские показатели  $\lambda_1^r \geq \dots \geq \lambda_{N_r}^r$ . Как уже говорилось выше, критерием возникновения обобщенной синхронизации служит смена знака с „плюса“ на „минус“ старшего показателя  $\lambda_1^r$ .

Как правило, режим обобщенной синхронизации рассматривается для двух идентичных хаотических осцилляторов со слегка различающимися параметрами, связанных однонаправленной диссипативной связью. Поэтому начнем рассмотрение именно с этого случая. Другие типы связи, а также ситуации, когда обобщенная синхронизация наблюдается в различных динамических системах (например, в однонаправленно связанных системах Ресслера и Лоренца) будут рассмотрены далее. В случае одинаковых связанных систем с диссипативной однонаправленной связью размерности фазовых пространств ведущей и ведомой систем равны друг другу ( $N_d = N_r = N$ ), а уравнения (1) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_d, \mathbf{g}_d), \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_r, \mathbf{g}_r) + \varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_r),\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\mathbf{A} = \{\delta_{ij}\}$  — матрица связи,  $\varepsilon$  — скалярный параметр, характеризующий силу связи,  $\delta_{ii} = 0$  или 1,  $\delta_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ).

Рассмотрим ведомую систему  $\mathbf{x}_r(t)$  как некоторую неавтономную модифицированную систему

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{H}'(\mathbf{x}_m, \mathbf{g}_r, \varepsilon) \quad (3)$$

под внешним воздействием  $\varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{H}'(\mathbf{x}_m, \mathbf{g}_r, \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x}_d, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{H}'(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) - \varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (5)$$

Следует обратить внимание, что слагаемое  $-\varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x}$  фактически вносит дополнительную диссипацию в модифицированную систему (3).

Очевидно, что режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (2) при увеличении параметра связи  $\varepsilon$ , может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно. Первый из этих процессов — увеличение диссипации в модифицированной системе (3), а второй — возрастание амплитуды внешнего сигнала. Понятно, что оба процесса связаны друг с другом посредством параметра  $\varepsilon$  и не могут быть реализованы в ведомой системе (2) независимо друг от друга. Тем не менее для лучшего понимания механизмов, приводящих к возникновению режима обобщенной синхронизации, рассмотрим сначала оба этих процесса независимо друг от друга. Начнем рассмотрение с изучения автономного поведения модифицированной системы (3).

Для рассматриваемой модифицированной системы  $\varepsilon$  выступает в качестве параметра диссипации. Когда  $\varepsilon$  равно нулю, поведение модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$

полностью совпадает с поведением ведомой системы  $\mathbf{x}_r(t)$  в отсутствие связи. С увеличением параметра диссипации  $\varepsilon$  динамика модифицированной системы (3) должна упрощаться. Вследствие этого модифицированная система  $\mathbf{x}_m(t)$  должна совершать переход от хаотических колебаний к регулярным (периодическим), и, может быть (в случае большого значения параметра диссипации), — даже к стационарному состоянию. В этом случае один из ляпуновских показателей модифицированной системы  $\lambda_0^m$  является нулевым (или отрицательным в случае, если в модифицированной системе (3) реализуется стационарное состояние), а все остальные ляпуновские показатели отрицательны ( $0 > \lambda_1^m \geq \dots \geq \lambda_{N-1}^m$ ). В то же время следует отметить, что спектр ляпуновских показателей системы (3) отличается от условных ляпуновских показателей  $\lambda_1^r \geq \dots \geq \lambda_N^r$  ведомой системы (2), так как в отличие от модифицированной системы спектр условных ляпуновских показателей определяется не только поведением ведомой, но также и динамикой ведущей системы (2). Соответственно, рассматривая только спектр ляпуновских показателей модифицированной системы, нельзя сделать вывод о существовании режима обобщенной синхронизации в исходной системе (2) однонаправленно связанных хаотических осцилляторов.

Внешний сигнал в соотношении (4), наоборот, стремится навязать хаотическую динамику ведущей системы  $\mathbf{x}_d(t)$  модифицированной системе  $\mathbf{x}_m(t)$  и соответственно усложнить динамику последней. Понятно, что режим обобщенной синхронизации может существовать только в том случае, если собственная хаотическая динамика модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$  будет подавлена за счет увеличения диссипации. Очевидно, что только при выполнении этого условия текущее состояние модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$  будет определяться внешним сигналом, то есть будет выполняться соотношение  $\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ . В соответствии с соотношением (4) функциональное соотношение  $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$  также будет справедливым, что соответствует режиму обобщенной синхронизации.

Итак, возникновение режима обобщенной синхронизации в рассматриваемой системе (2) возможно только для таких значений параметра  $\varepsilon$ , при которых модифицированная система (3) демонстрирует периодические колебания или переходит в стационарный режим. В то же время хорошо известно, что даже периодическое внешнее воздействие может привести к возникновению хаотической динамики в системе, демонстрирующей периодическое поведение. Поэтому установившийся регулярный режим должен быть достаточно устойчив, чтобы внешнее воздействие не могло возбудить собственной хаотической динамики модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$  и соответственно разность значений параметров связи  $\varepsilon = \varepsilon_{GS}$  (момент возникновения режима обобщенной синхронизации) и  $\varepsilon = \varepsilon_p$  (точка перехода к периодическим колебаниям в модифицированной системе) может быть достаточно большой.

В режиме обобщенной синхронизации ( $\varepsilon > \varepsilon_{GS}$ ) амплитуда внешнего воздействия оказывается относительно малой по сравнению с амплитудой периодических колебаний в модифицированной системе  $\mathbf{x}_m(t)$  (в том случае, если имеют место регулярные колебания). Соответственно режим обобщенной синхронизации может в данном случае рассматриваться как слабое внешнее хаотическое возмущение периодической динамики.

Аналогичный вывод можно сделать и в случае, когда при достаточно больших значениях параметра  $\varepsilon$  в модифицированной системе  $\mathbf{x}_m(t)$  устанавливается стационарный режим. В этом случае режим обобщенной синхронизации является фактически хаотическим возмущением стационарного состояния. Иными словами, поведение системы является переходным процессом, который стремится сойтись к стационарному состоянию, возмущаемому внешним хаотическим воздействием. Если управляющие параметры  $\mathbf{g}_{d,r}$  рассматриваемых ведущей и ведомой систем различаются незначительно, а параметр  $\varepsilon$  достаточно велик, переходный процесс будет достаточно быстрым, и соответственно в фазовом пространстве модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$  изображающая точка будет следовать за возмущенным „стационарным состоянием“ с некоторым малым запаздыванием  $\tau$ , что соответствует режиму синхронизации с запаздыванием.

## 2. Обобщенная синхронизация в хаотических системах с диссипативной связью

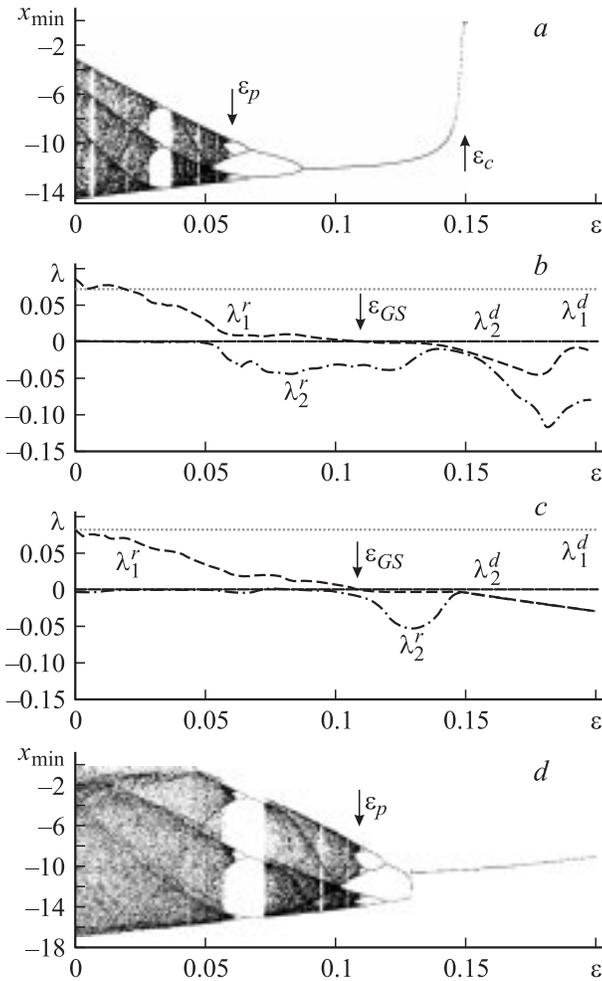
Для того чтобы пояснить подход, изложенный в разделе 1, рассмотрим несколько примеров режима обобщенной синхронизации. В качестве первого примера выберем систему двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера со слегка различающимися параметрами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c). \end{aligned} \quad (6)$$

В системе (6) параметр  $\varepsilon$  характеризует величину связи между осцилляторами. Значения управляющих параметров были выбраны по аналогии с работой [25]:  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ ,  $\omega_r = 0.95$ .

Соответственно модифицированная система Ресслера будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= -\omega_r y_m - z_m - \varepsilon x_m, \\ \dot{y}_m &= \omega_r x_m + a y_m, \\ \dot{z}_m &= p + z_m(x_m - c). \end{aligned} \quad (7)$$



**Рис. 1.** *a* — бифуркационная диаграмма для модифицированной системы Ресслера в зависимости от значения управляющего параметра  $\varepsilon$ . *b, c* — зависимости спектров ляпуновских показателей от  $\varepsilon$  для слабо ( $\omega_d = 0.99$ ) и сильно ( $\omega_d = 1.3$ ) отстроенной по параметру  $\omega$  систем Ресслера. Условные ляпуновские показатели показаны пунктирной ( $\lambda_1^r$ ) и штрихпунктирной ( $\lambda_2^r$ ) линиями соответственно. *d* — бифуркационная диаграмма для неавтономной модифицированной системы Ресслера, находящейся под внешним гармоническим воздействием. Значение  $\varepsilon_p$ , соответствующее установлению периодического режима показано стрелкой.

На рис. 1, *a* показана бифуркационная диаграмма для модифицированной системы Ресслера (7). Из рисунка отчетливо видно, что с увеличением параметра диссипации в системе происходит переход от хаотических колебаний к периодическим через обратный каскад бифуркаций удвоения периода, и, начиная со значения  $\varepsilon = \varepsilon_p \approx 0.06$  (отмечен на рис. 1, *a* стрелкой), в системе (7) реализуются периодические колебания.

Рисунок 1, *b* иллюстрирует зависимость четырех старших ляпуновских показателей для системы двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (6) с малой расстройкой значений управляющего параметра  $\omega$  ( $\omega_d = 0.99$ ) от величины параметра  $\varepsilon$ . Два из этих

показателей  $\lambda_1^d$  и  $\lambda_2^d$  соответствуют поведению ведущей системы, и поэтому не зависят от величины параметра связи. Два других показателя  $\lambda_1^r$  и  $\lambda_2^r$  характеризуют поведение ведомой системы, зависят от параметра связи  $\varepsilon$  и соответственно являются условными ляпуновскими показателями. В том случае, когда параметр связи равен нулю, условные ляпуновские показатели  $\lambda_1^r$  и  $\lambda_2^r$  совпадают с ляпуновскими показателями модифицированной системы  $\lambda_1^m$  и  $\lambda_2^m$ , и поскольку модифицированная система при  $\varepsilon = 0$  демонстрирует хаотические колебания (см. рис. 1, *a*), то старший из них является положительным ( $\lambda_1^r > 0$ ), а второй — нулевым ( $\lambda_2^r = 0$ ). С ростом параметра  $\varepsilon$  второй условный ляпуновский показатель становится отрицательным ( $\varepsilon \approx 0.04$ ), однако динамика модифицированной системы остается по-прежнему хаотической, о чем свидетельствует положительность старшего условного ляпуновского показателя  $\lambda_1^r$ . С дальнейшим увеличением  $\varepsilon$  ( $\varepsilon_p \approx 0.06$ ) поведение модифицированной системы становится периодическим (см. рис. 1, *a*), но режим обобщенной синхронизации в системе (6) все еще не наблюдается.

Режим обобщенной синхронизации возникает в системе однонаправленно связанных хаотических осцилляторов лишь тогда, когда периодический режим в модифицированной системе (7) становится достаточно устойчивым. Соответствующее значение параметра связи  $\varepsilon = \varepsilon_{GS} \approx 0.11$  отмечено на рис. 1, *b* стрелкой. При данном значении параметра связи в модифицированной системе Ресслера (7) реализуется цикл периода один. Отметим, что когда в модифицированной системе наблюдается периодический режим (а в системе однонаправленно связанных хаотических осцилляторов реализуется соответственно режим обобщенной синхронизации), значение старшего условного ляпуновского показателя  $\lambda_1^r$  является слабо отрицательным. С дальнейшим ростом параметра связи  $\varepsilon$  при некотором критическом значении  $\varepsilon_c \approx 0.15$  (отмечен на рис. 1, *a* стрелкой) в модифицированной системе Ресслера устанавливается стационарное состояние, и старший условный ляпуновский показатель начинает быстро уменьшаться (ср. рис. 1, *a* и 1, *b*).

Отметим, что рассмотренный подход к объяснению явления обобщенной синхронизации, основанный на рассмотрении динамики модифицированной системы, позволяет объяснить тот факт [25], что порог возникновения режима обобщенной синхронизации практически не зависит от величины расстройки значений управляющих параметров связанных хаотических осцилляторов. Из нашего рассмотрения следует, что устойчивость периодического режима (которая необходима для возникновения обобщенной синхронизации) обусловлена прежде всего свойствами самой модифицированной системы  $x_m(t)$ . Величина  $\varepsilon_{GS}$ , соответствующая моменту возникновения режима обобщенной синхронизации, слабо зависит от величины расстройки параметра  $\omega$  (ср. значения  $\varepsilon_{GS}$  для  $\omega_d = 0.99$  (рис. 1, *b*) и  $\omega_d = 1.3$  (рис. 1, *c*)). Данный вывод, как уже отмечалось, достаточно хорошо соотносится с результатами, изложенными в работе [25].

Рассмотрим теперь вопрос о том, почему значение управляющего параметра  $\varepsilon_{GS}$ , при котором возникает режим обобщенной синхронизации, не совпадает ни с одной точкой бифуркации в модифицированной системе (ср. рис. 1, *a* и 1, *b*). Причиной такого несоответствия является внешнее воздействие со стороны ведущей системы. Как уже говорилось, даже гармоническое внешнее воздействие может возбуждать хаотические колебания в системах с периодической динамикой. В этом случае бифуркационные точки модифицированной системы под внешним воздействием будут сдвинуты в сторону больших значений параметра  $\varepsilon$  по сравнению с автономной динамикой модифицированной системы. При этом момент возникновения режима обобщенной синхронизации не будет совпадать с бифуркационными точками автономной модифицированной системы.

Для пояснения этого вывода рассмотрим поведение модифицированной системы под внешним гармоническим воздействием:

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= -\omega_r y_m - z_m - \varepsilon x_m + A \cos(\Omega t), \\ \dot{y}_m &= \omega_r x_m + a y_m, \\ \dot{z}_m &= p + z_m(x_m - c),\end{aligned}\quad (8)$$

где значения управляющих параметров  $A = 1.32$  и  $\Omega = 1.0$  выбраны таким образом, чтобы смоделировать характеристики динамики ведущей системы. Бифуркационная диаграмма неавтономной модифицированной системы приведена на рис. 1, *d*. Отчетливо видно, что все бифуркационные точки неавтономной модифицированной системы Ресслера (8) оказываются сдвинутыми относительно точек автономной модифицированной системы (7) в сторону больших значений  $\varepsilon$  (ср. рис. 1, *a* и 1, *d*), как это и обсуждалось выше. Момент возникновения режима обобщенной синхронизации для двух систем Ресслера отмечен стрелкой (рис. 1, *b*) и он соответствует значениям  $\varepsilon$ , при которых в неавтономной модифицированной системе под периодическим внешним воздействием устанавливаются периодические колебания.

Тот же эффект приводит к возникновению режима обобщенной синхронизации в динамических системах с дискретным временем (отображения). Например, известно, что режим обобщенной синхронизации возникает при значениях параметра связи  $\varepsilon \geq \varepsilon_{GS} \approx 0.32$  в системе однонаправленно связанных логистических отображений [20]

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \varepsilon(f(x_n) - f(y_n)),\end{aligned}\quad (9)$$

где  $f(x) = 4x(1-x)$ . Следуя подходу, изложенному выше, рассмотрим модифицированную систему

$$z_{n+1} = (1-\varepsilon)f(z_n) = a z_n(1-z_n),\quad (10)$$

где  $a = 4(1-\varepsilon)$ . Отчетливо видно, что значение  $\varepsilon_{GS} \approx 0.32$ , при котором возникает режим обобщенной синхронизации, соответствует значению  $a \approx 2.72$

модифицированной системы (10). При таком значении управляющего параметра в логистическом отображении аттрактором является неподвижная устойчивая точка  $x^0 = (a-1)/a$ .

### 3. Обобщенная синхронизация в хаотических системах с недиссипативной связью

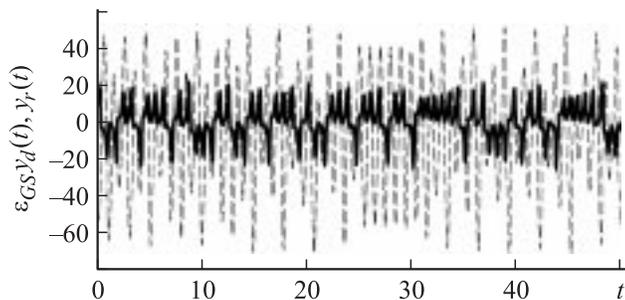
Обсудим теперь вопрос о механизмах возникновения обобщенной синхронизации в случае однонаправленно связанных различных динамических систем, либо в случае недиссипативной связи. Известно несколько примеров таких систем [20,22]. Очевидно, что при диссипативном типе связи, различие ведущей и ведомой систем не играет значительной роли, а соответственно, все вышележающее остается справедливым и в этом случае. В то же время, если однонаправленная связь не является диссипативной, использовать подход модифицированной системы не представляется возможным. К подобным системам относятся однонаправленно связанные осцилляторы Ресслера и Лоренца [20]. В качестве ведущей системы используется хаотический осциллятор Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= -\alpha(y_d + z_d), \\ \dot{y}_d &= \alpha(x_d + a y_d), \\ \dot{z}_d &= \alpha(p + z_d(x_d - c))\end{aligned}\quad (11)$$

с параметрами  $\alpha = 6$ ,  $a = 0.2$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 5.7$ , а в качестве ведомой — осциллятор Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= \sigma(y_r - x_r), \\ \dot{y}_r &= r x_r - y_r - x_r z_r + \varepsilon y_d, \\ \dot{z}_r &= -b z_r + x_r y_r\end{aligned}\quad (12)$$

с параметрами  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ . Параметр  $\alpha$  добавлен в уравнения (11) для изменения характерного масштаба колебаний в системе Ресслера. Значение параметра связи  $\varepsilon$ , при котором возникает режим обобщенной синхронизации между осцилляторами (11) и (12) было определено в [20] и составляет  $\varepsilon_{GS} \approx 6.66$ . В этом случае амплитуда колебаний  $y_d$  — переменной ведущей системы Ресслера составляет примерно 10 безразмерных единиц, в свою очередь амплитуда колебаний  $y_r$  — переменной ведомой системы Лоренца  $\approx 20$  единиц. Очевидно, что в этом случае величина внешнего сигнала  $\varepsilon_{GS} y_d$ , воздействующего на систему Лоренца (12) превышает амплитуду собственных колебаний в системе примерно в три раза. Данная ситуация показана на рис. 2, где приведены временная реализация  $y_r(t)$  ведомой системы Лоренца в автономном режиме и внешнее воздействие  $\varepsilon_{GS} y_d(t)$ . Очевидно, что внешняя сила перемещает изображающую точку в фазовом пространстве ведомой системы в области с сильной



**Рис. 2.** Временная реализация  $y_r(t)$ , соответствующая автономной динамике системы Лоренца (12) (сплошная линия) и внешнее воздействие  $\varepsilon_{GS} y_d(t)$  (пунктирная линия), вносимое в ведомую систему около точки возникновения режима обобщенной синхронизации. Видно, что амплитуда внешнего воздействия в несколько раз превышает амплитуду автономных колебаний ведомой системы.

диссипацией, в результате чего собственная хаотическая динамика системы оказывается подавленной и возникает режим обобщенной синхронизации.

Таким образом, можно выделить два схожих механизма, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации, в основе которых лежит подавление собственных хаотических колебаний с помощью дополнительного введения диссипации. Это осуществляется введением дополнительного диссипативного слагаемого либо смещением изображающей точки системы в области фазового пространства с сильной диссипацией.

#### 4. Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом

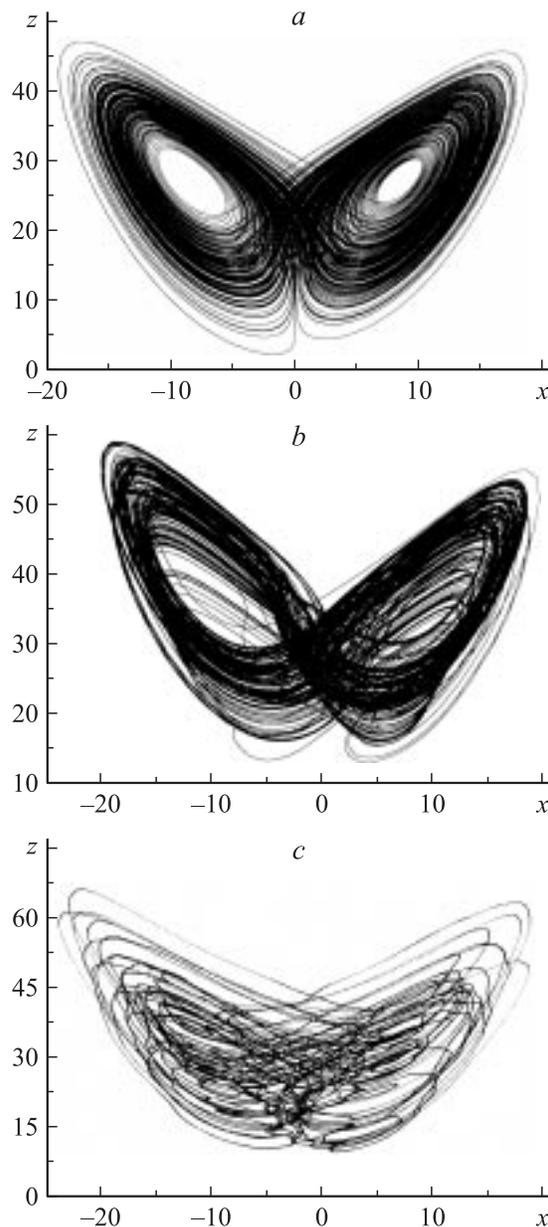
Важно отметить, что для ряда хаотических систем был обнаружен режим синхронизации, индуцированной шумом [26–28]. В этом случае случайный сигнал  $\xi(t)$ , действующий на две независимые, но идентичные хаотические системы  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$  (с разными начальными условиями  $\mathbf{u}(t_0)$  и  $\mathbf{v}(t_0)$ , лежащими в бассейне притяжения одного и того же хаотического аттрактора), может приводить к тому, что эти системы „синхронизируются“ друг с другом, т.е. после завершения переходного процесса они начинают демонстрировать идентичное поведение  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{v}(t)$ . В этом случае, как и при режиме обобщенной синхронизации, установление синхронной динамики двух систем с общим источником шума возможно лишь в том случае, когда все условные ляпуновские экспоненты оказываются отрицательными [29,30].

Как было показано в работах [26–28], возможны два схожих механизма, приводящих к возникновению режима индуцированной шумом синхронизации.

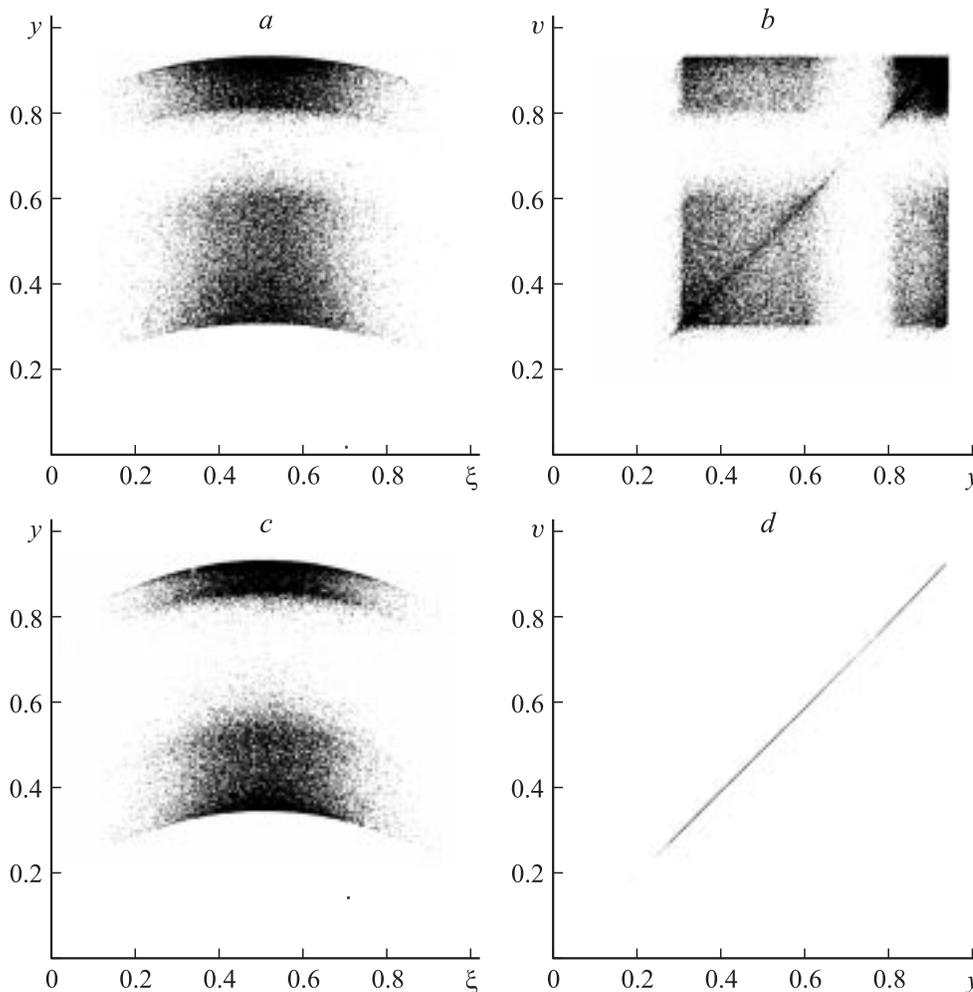
1. Случайный сигнал  $\xi(t)$ , действующий на идентичные хаотические системы, имеет ненулевое среднее, что фактически переводит систему в нехаотический

режим [31–33], при котором состояние системы просто „следует“ за внешним случайным возмущением  $\xi(t)$ .

2. Внешний случайный сигнал большой интенсивности (может быть, даже с нулевым средним значением) переводит изображающую точку в области фазового пространства с большим сжатием фазового потока, которая находится в этих областях большее время, в результате чего в среднем имеет место сходимость соседних траекторий [28,34,35]. В обоих случаях определяющую роль



**Рис. 3.** *a* — фазовый портрет автономной системы Лоренца (12); *b* — системы Лоренца, находящейся в режиме обобщенной синхронизации с системой Ресслера (11),  $\varepsilon = 20$ ; *c* — режим индуцированной шумом синхронизации той же системы Лоренца (13), на которую воздействует случайный дельта-коррелированный гауссов процесс  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$  с амплитудой  $\varepsilon = 40$  [28].



**Рис. 4.** Плоскости  $(\xi_n, y_n)$  и  $(y_n, v_n)$  для значения параметра связи  $\varepsilon = 0.125$  (*a, b*) и  $\varepsilon = 0.175$  (*c, d*) логистического отображения (14). Видно, что для  $\varepsilon = 0.175$  ведомая  $y_n$  и вспомогательная  $v_n$  системы демонстрируют идентичное поведение  $y_n = v_n$ , что свидетельствует о наличии функциональной связи  $y_n = F(\xi_n)$  и соответственно установлении синхронного режима.

играет сжатие фазового потока, при этом условные ляпуновские экспоненты имеют отрицательные значения.

Очевидно, что режим обобщенной хаотической синхронизации и режим синхронизации, индуцированной шумом, несмотря на то что традиционно считаются разными явлениями, на самом деле обусловлены проявлениями одного и того же механизма и вызваны одной и той же причиной — подавлением собственных хаотических колебаний с помощью дополнительного введения диссипации (с помощью ненулевого среднего значения шума в случае индуцированной шумом синхронизации, с помощью дополнительного диссипативного слагаемого в случае режима обобщенной синхронизации, либо путем смещения изображающей точки системы в области фазового пространства с сильной диссипацией).

На рис. 3 приведены фазовые портреты для автономной хаотической системы Лоренца (*a*) и той же системы, находящейся под внешним воздействием (*b, c*). Рис. 3, *b* соответствует режиму обобщенной синхронизации систем (11) и (12), описанной выше для значения управляющего параметра  $\varepsilon = 20$ , а рис. 3, *c*, взятый из

работы [28] — режиму индуцированной шумом синхронизации. В этом случае система Лоренца описывается уравнениями<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= \sigma(y_r - x_r), \\ \dot{y}_r &= rx_r - y_r - x_r z_r + \varepsilon \xi(t), \\ \dot{z}_r &= -bz_r + x_r y_r, \end{aligned} \quad (13)$$

а в качестве внешнего воздействия выступает случайный дельта-коррелированный гауссов процесс  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$  с амплитудой  $\varepsilon = 40$ . Отчетливо видно, что в обоих случаях структура аттрактора одинакова, поскольку синхронное поведение вызвано одной и той же причиной (для случая индуцированной шумом синхронизации см. более подробно [28]).

<sup>1</sup> Значения управляющих параметров выбраны теми же, что и в системе (12).

С учетом вышеизложенного можно предсказать, что режим индуцированной шумом синхронизации может реализовываться и для диссипативного типа связи (подобно использованному в соотношениях (6), (9)), если вместо переменной  $x_d(t)$  ведущей системы используется случайный процесс. В качестве примера рассмотрим ведомое логистическое отображение (9), когда изменение величины  $x_n$  с изменением дискретного времени определяется не оператором эволюции (9), а является случайным процессом  $\xi_n$  с плотностью распределения вероятности  $p(\xi)$ . В этом случае динамика ведомой системы будет определяться соотношением

$$y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon(f(\xi_n) - f(y_n)). \quad (14)$$

Покажем, что и в этом случае, несмотря на случайный характер величины  $\xi(t)$ , между этим процессом и динамической системой может устанавливаться синхронное поведение, аналогичное режиму хаотической обобщенной синхронизации.

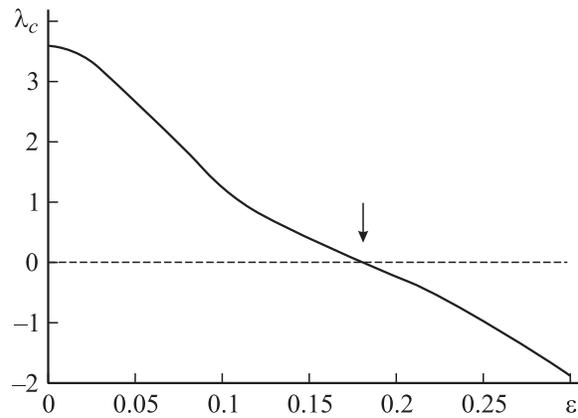
Для диагностики обобщенной синхронизации между случайным процессом  $\xi_n$  и динамической системой  $y_n$  воспользуемся методом вспомогательной системы, описанным выше. На рис. 4, *b* показано поведение ведомой и вспомогательной систем ( $y_n$  и  $v_n$ , соответственно) для значения управляющего параметра  $a = 3.75$ , случайная величина  $\xi$  подчиняется нормальному распределению

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (15)$$

где  $\xi_0 = 1/2$ ,  $\sigma = 0.11$ .

Видно, что в случае малого параметра связи ( $\varepsilon = 0.125$ ) ведомая и вспомогательная системы в один момент дискретного времени принимают разные значения (точки, характеризующие состояния систем, распределены по плоскости  $(y, v)$ ), а следовательно, не существует функциональной зависимости между случайным процессом  $\xi_n$  и состоянием динамической системы  $y_n$ . С увеличением параметра связи  $\varepsilon = 0.175$  ситуация кардинально изменяется (см. рис. 4, *d*): точки, соответствующие состояниям систем, ложатся на диагональ  $y = v$ , что свидетельствует о наличии функциональной связи  $y_n = F(\xi_n)$ , и следовательно в рассматриваемом случае имеет место синхронное поведение. Следует также обратить внимание, что функциональная зависимость  $F[\cdot]$  в этом случае имеет сложную фрактальную структуру (рис. 4, *c*), что соответствует случаю слабой синхронизации. Анализируя же плоскость  $(\xi, y)$  невозможно установить факт наличия функциональной связи (ср. рис. 4, *a* и 4, *c*).

Факт существования синхронизации подтверждается также зависимостью условной ляпуновской экспоненты  $\lambda_c$  от параметра связи  $\varepsilon$  (см. рис. 5). Видно, что для малых значений параметра связи условная ляпуновская экспонента  $\lambda_c$  положительна, что свидетельствует об отсутствии функциональной зависимости между случайной величиной  $\xi_n$  и состоянием динамической систе-



**Рис. 5.** Зависимость условного ляпуновского показателя  $\lambda_c$  системы (14) от параметра связи  $\varepsilon$ . Случайная величина  $\xi_n$  распределена по нормальному закону (15), момент возникновения синхронизации отмечен стрелкой.

мы  $y_n$ . С увеличением параметра связи условный ляпуновский показатель становится отрицательным, а следовательно имеет место функциональная зависимость  $y_n = F[\xi_n]$ , что соответствует установлению синхронного режима.

## Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены причины, приводящие к возникновению режима обобщенной хаотической синхронизации. Для объяснения механизмов установления синхронного режима использован метод вспомогательной системы и показано, что поведение ведомой системы соответствует поведению модифицированной системы (с внесенной дополнительной диссипацией) под внешним хаотическим воздействием. Увеличение параметра связи в свою очередь эквивалентно увеличению диссипации вспомогательной системы и амплитуды внешнего воздействия. Порог возникновения обобщенной хаотической синхронизации определяется в этом случае балансом между подавлением собственной хаотической динамики в ведомой системе и возбуждением хаотических колебаний в ней под действием внешнего сигнала ведущей системы. Аналогичные процессы, связанные с подавлением собственной динамики, имеют место и при установлении обобщенной синхронизации в случае недиссипативной связи, когда изображающая точка перемещается под внешним воздействием в область фазового пространства с сильным сжатием.

Одновременно можно сделать вывод о том, что режимы обобщенной хаотической синхронизации и синхронизации, индуцируемой шумом, хотя традиционно и считаются разными явлениями, обусловлены одной причиной — подавлением собственных хаотических колебаний с помощью дополнительного введения диссипации.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ по программе „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект 333), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–02–16273 и 05–02–16286), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–1250.2003.02), а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC–006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)). Авторы благодарят также Фонд некоммерческих программ „Династия“ и Международный центр фундаментальной физики (Москва).

## Список литературы

- [1] Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
- [2] Glass L. Nature. 2001. Vol. 410. P. 277–284.
- [3] Murali K., Lakshmanan M. // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 48. N 3. R1624–R1626.
- [4] Yang T., Wu C.W. and Chua L.O. // IEEE Trans. Circuits and Syst. 1997. Vol. 44. N 5. P. 469–472.
- [5] Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
- [6] Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е. Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. XLVII. № 5–6. С. 343–372.
- [7] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [8] Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C. // Phys. Rep. 2002. Vol. 366. P. 1.
- [9] Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. N 2. P. 980–994.
- [10] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. N 22. P. 4193–4196.
- [11] Boccaletti S., Valladares D.L. // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. N 5. P. 7497–7500.
- [12] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Europhys. Lett. 2005. Vol. 70. N 3.
- [13] Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. N 8. P. 821–824.
- [14] Boccaletti S., Pecora L.M., Pelaez A. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 066219.
- [15] Brown R., Kocarev L. // Chaos. 2000. Vol. 10. N 2. P. 344–349.
- [16] Короновский А.А., Храмов А.Е. // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 7. С. 391–395.
- [17] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. Vol. 14. N 3. P. 603–610.
- [18] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80. № 1. С. 25–28.
- [19] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V., Rempen I.S. // Chaos. 2005. Vol. 15. N 1. P. 013705.
- [20] Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. N 5. R4508–R4511.
- [21] Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. N 4. P. 3420–3439.
- [22] Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. N 5. P. 4528–4535.
- [23] Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. N 4. P. 2374–2383.
- [24] Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. N 5. P. 5183–5188.
- [25] Zheng Z., Hu G. // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. N 6. P. 7882–7885.
- [26] Martian A., Banavar J.R. // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72. N 10. P. 1451–1454.
- [27] Kaulakys B., Ivanauskas F., Meskauskas T. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1999. Vol. 9. N 3. P. 533–539.
- [28] Toral R., Mirasso C.R., Hernández-García E., Piro O. // Chaos. 2001. Vol. 11. N 3. P. 665–673.
- [29] Pikovsky A.S. // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. N 21. P. 2931.
- [30] Zhou C., Lai C.-H. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. N 4. P. 5188–5191.
- [31] Herzel H., Freund J. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. N 3. P. 3238–3241.
- [32] Gade P.M., Basu C. // Phys. Lett. A. 1996. Vol. 217. N 1. P. 21–27.
- [33] Sánchez E., Matias M.A., Pérez-Muñuzuri V. // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. N 4. P. 4068–4071.
- [34] Minai A.A., Anand T. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. N 2. P. 1559–1562.
- [35] Rim S., Hwang D.-U., Kim I., Kim C.-M. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. N 11. P. 2304–2307.