01

Трехмерные лапласовы потенциалы с комплексным представлением

© Ю.К. Голиков, Н.К. Краснова, К.В. Соловьев

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: solovjov@rphf.spbstu.ru

(Поступило в Редакцию 20 апреля 2005 г.)

В работе развивается новый аналитический способ построения широких классов трехмерных лапласовых потенциалов, допускающих замкнутое представление в элементарных функциях. Эти классы особенно полезны в проблемах синтеза электронно-оптических устройств на базе обратных задач динамики частиц, когда возникает некорректная задача Коши для уравнения Лапласа, связанная с процедурой аналитического продолжения потенциала с плоскости в пространство.

PACS: 02.30.Em

Пусть для потенциала $\varphi(x, y, z)$ в декартовых координатах поставлена задача Коши вида

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, -z) \tag{1}$$

$$\varphi\big|_{z=0} = f(x, y).$$

Стандартный прием, дающий решение, по крайней мере, в узком слое $|z| \leq h$, заключается в разложении по четным степеням переменной z, что дает следующее представление:

$$\varphi = f(x, y) - \frac{\Delta f}{2!} z^2 + \frac{\Delta(\Delta f)}{4!} z^4 - \dots (-1)^n \frac{\Delta^n f}{(2n)!} z^{2n} + \dots\,, \tag{2}$$

где $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$. Если $f(x, y)$ — конечный полином по x, y, то ряд (2) обрывается, и мы получаем множество трехмерных гармонических полиномов, четных по z. Дифференцируя или интегрируя их по z, получим трехмерные нечетные по z гармонические полиномы. Таким образом, строятся все возможные гармонические полиномы. Этот факт очевиден и представляет собой общее место. Но мы поставим задачу определения более широких классов $f(x, y)$, отличных от полиномов по x, y, для которых ряд (2) обрывается на конечном номере n. Для этого введем сопряженные комплексные переменные

$$\omega = x + iy, \ \overline{\omega} = x - iy$$

и операторы Колосова [1]

$$\frac{\partial}{\partial\omega} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\overline{\omega}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3}$$

Тогда (2) можно переписать в виде

$$\varphi = f - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial\overline{\omega}} z^2 + \frac{2}{3}\,\frac{\partial^4 f}{\partial\omega^2\partial\overline{\omega}^2} z^4 + \dots \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}\cdot\frac{\partial^{2n} f}{\partial\omega^n\partial\overline{\omega}^n} z^{2n} + \dots\,. \tag{4}$$

Интегрируя (4) по z и полагая $\varphi(x, y, 0) = 0$, можно найти ряд для антисимметричной по z гармонической функции:

$$\varphi = f\cdot z - \frac{2}{3}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial\overline{\omega}} z^3 + \frac{2}{15}\,\frac{\partial^4 f}{\partial\omega^2\partial\overline{\omega}^2} z^5 + \dots \frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{\partial^{2n} f}{\partial\omega^n\partial\overline{\omega}^n} z^{2n+1} + \dots\,. \tag{5}$$

Данные представления замечательны тем, что из них легко реконструировать общую структуру $f(\omega, \overline{\omega})$ с тем, чтобы ряды обрывались на $(n+1)$-м члене. Для этого достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{\partial^{2(n+1)}}{\partial\omega^{(n+1)}\partial\overline{\omega}^{(n+1)}}\,f = 0. \tag{6}$$

Это уравнение по природе операторное в силу равенств (3), и в то же время его можно рассматривать как обычное уравнение в частных производных относительно переменных ω и $\overline{\omega}$. Из (6) можно восстановить $f(\omega, \overline{\omega})$ интегрированием.

Начнем с простейшего случая. Пусть функция $f(\omega, \overline{\omega})$ такова, что в (4) исчезает квадратичный по z член (и, соответственно, все члены более высокого порядка по z). Для этого необходимо выполнение равенства

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial\overline{\omega}} = 0, \tag{7}$$

из которого сразу же следует:

$$f = A(\omega) + B(\overline{\omega}), \tag{8}$$

где $A(\omega)$ и $B(\overline{\omega})$ — произвольные аналитические функции своих аргументов. Условие (8) дает f в виде комплексной функции $f_1(x, y) + i f_2(x, y)$ и, чтобы избавиться от этой излишней общности, положим $B(\overline{\omega}) = \overline{A}(\overline{\omega})$. Тогда

$$\varphi = f = A(\omega) + \overline{A}(\overline{\omega}) \tag{9}$$

задает произвольную вещественную гармоническую функцию переменных x, y.

Следующий по порядку рассмотрения случай — сохранение в (4) только членов нулевой и второй степени по z. Уравнение для f — условие обрыва ряда при этом выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial\omega^2\partial\overline{\omega}^2} = \frac{\partial^2}{\partial\omega\partial\overline{\omega}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial\overline{\omega}}\right) = 0 \tag{10}$$

Оставаясь в рамках вещественных функций, будем иметь для f уравнение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial\overline{\omega}} = A(\omega) + \overline{A}(\overline{\omega}). \tag{11}$$

Интегрирование (11) дает

$$f = \overline{\omega}\int A(\omega)d\omega + \omega\int \overline{A}(\overline{\omega})d\overline{\omega} + C(\omega) + D(\overline{\omega}). \tag{12}$$

Комбинация функций $C(\omega) + D(\overline{\omega})$ уничтожается на этапе вычисления коэффициента при z^2 при подстановке (12) в (4), а этот вариант уже представлен выражением (9) и, следовательно, при построении нового трехмерного гармонического потенциала нет смысла сохранять $C(\omega)$, $D(\overline{\omega})$ ненулевыми. Таким образом, можно записать

$$f = \overline{\omega}\int A(\omega)d\omega + \omega\int \overline{A}(\overline{\omega})d\overline{\omega}. \tag{13}$$

Соответствующий потенциал будет иметь вид:

$$\varphi = \left(\overline{\omega}\int A(\omega)d\omega + \omega\int \overline{A}(\overline{\omega})d\overline{\omega}\right) - 2\big(A(\omega) + \overline{A}(\overline{\omega})\big)z^2. \tag{14}$$

Следующий шаг состоит в уничтожении всех степеней, начиная с шестой, что приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega\partial\overline{\omega}}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial\omega^2\partial\overline{\omega}^2}\right) = 0. \tag{15}$$

Аналогично предыдущему шагу, получаем при условии вещественности f:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial\omega^2\partial\overline{\omega}^2} = A(\omega) + \overline{A}(\overline{\omega}). \tag{16}$$

Интегрируя (16) по $\omega, \overline{\omega}$, имеем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial\overline{\omega}} = \overline{\omega}\int A(\omega)d\omega + \omega\int \overline{A}(\overline{\omega})d\overline{\omega} + C(\omega) + \overline{C}(\overline{\omega}). \tag{17}$$

Далее, интегрируя (17), получим:

$$f = \frac{\overline{\omega}^2}{2}\iint A(\omega)d\omega d\omega + \frac{\omega^2}{2}\iint \overline{A}(\overline{\omega})d\overline{\omega}d\overline{\omega} + \overline{\omega}\int C(\omega)d\omega + \omega\int \overline{C}(\overline{\omega})d\overline{\omega} + D(\omega) + \overline{D}(\overline{\omega}). \tag{18}$$

При подстановке (18) в (4) все члены второй строки формулы (18) уничтожаются в коэффициенте при z^4, а последние два слагаемых второй строки — в коэффициенте при z^2. Следовательно, нетривиальная часть f, приводящая к потенциалу, отличающемуся от ранее полученных, имеет вид

$$f = \frac{\overline{\omega}^2}{2}\iint A(\omega)d\omega d\omega + \frac{\omega^2}{2}\iint \overline{A}(\overline{\omega})d\overline{\omega}d\overline{\omega}. \tag{19}$$

Само выражение для потенциала можно записать следующим образом:

$$\varphi = \left(\frac{\overline{\omega}^2}{2}\iint A(\omega)d\omega d\omega + \frac{\omega^2}{2}\iint \overline{A}(\overline{\omega})d\overline{\omega}d\overline{\omega}\right) - 2\left(\overline{\omega}\int A(\omega)d\omega + \omega\int \overline{A}(\overline{\omega})d\overline{\omega}\right)z^2 + \frac{2}{3}\big(A(\omega) + \overline{A}(\overline{\omega})\big)z^4. \tag{20}$$

Полученных результатов достаточно, чтобы определить общий вид функции f, зануляемой $n+1$-кратным применением оператора Лапласа и, следовательно, приводящей к сохранению только $n+1$ ненулевых членов ряда (4) (до членов, пропорциональных z^{2n}, включительно):

$$f = \frac{\overline{\omega}^n}{n!}\underbrace{\int\ldots\int}_{n} A(d\omega)^n + \frac{\omega^n}{n!}\underbrace{\int\ldots\int}_{n} \overline{A}(d\overline{\omega})^n. \tag{21}$$

Верность выражения (21) можно проверить прямой подстановкой (21) в (4) и необходимости в строгом доказательстве (21) методом математической индукции не возникает. Результирующий гармонический потенциал φ является четным по z полиномом с коэффициентами, выражаемыми через произвольную двумерногармоническую функцию.

Так, выбрав в качестве генерирующей функции $A = \ln\omega$, получим базисные осесимметричные функции вида

$$\varphi = P_n(r, z)\ln r + Q_n(r, z) \quad \text{(см. [2, 3])}.$$

Заметим, что выбирая в качестве стартовой функции $A(\omega)$ какое-либо произвольное элементарное выражение, мы всегда рискуем получить на k-м шаге интегрирования неинтегрируемую комбинацию, вследствие чего общее выражение для потенциала станет неэлементарным. Более плодотворен другой подход. Введем функцию

$$R(\omega) = \int\ldots\int A(\omega)(d\omega)^n, \tag{22}$$

тогда

$$A(\omega) = \frac{d^n R(\omega)}{d\omega^n} \tag{23}$$

и f можно представить в виде

$$f = \frac{\overline{\omega}^n R(\omega) + \omega^n \overline{R}(\overline{\omega})}{n!}. \tag{24}$$

Таким образом, R оказывается производящей функцией, гарантирующей в случае своей элементарности также элементарность выражающихся через нее базисных функций φ

$$\varphi = \frac{1}{n!}\big(\overline{\omega}^n R(\omega) + \omega^n R(\overline{\omega})\big) - \frac{2}{(n-1)!}\big(\overline{\omega}^{n-1} R'(\omega) + \omega^{n-1} R'(\omega)\big) z^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^i 2^{2i}}{(n-i)!(2i)!}\big(\overline{\omega}^{n-i} R^{(i)}(\omega) + \omega^{n-i} R^{(i)}(\overline{\omega})\big) z^{2i} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}\big(R^{(n)}(\omega) + R^{(n)}(\overline{\omega})\big) z^{2n}; \; n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{25}$$

Интегрирование (25) по z при условии $\varphi(x, y, 0) = 0$ дает базис нечетных по z функций, описывающих потенциалы полей с плоскостью антисимметрии:

$$\varphi = \frac{1}{n!}\big(\overline{\omega}^n R(\omega) + \omega^n R(\overline{\omega})\big) z - \frac{2}{(n-1)!3}\big(\overline{\omega}^{n-1} R'(\omega) + \omega^{n-1} R'(\omega)\big) z^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^i 2^{2i}}{(n-i)!(2i+1)!}\big(\overline{\omega}^{n-i} R^{(i)}(\omega) + \omega^{n-i} R^{(i)}(\overline{\omega})\big) z^{2i+1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}\big(R^{(n)}(\omega) + R^{(n)}(\overline{\omega})\big) z^{2n+1}; \; n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{26}$$

Таким образом, мы построили последовательности симметричных и антисимметричных потенциалов, являющихся конечными полиномами по переменной z. Если в качестве производящих $R(\omega)$ использовать главные элементарные функции $a\omega^s$, $a \exp(s\omega)$, $a \ln\omega$, где a, s — произвольные комплексные числа, то каждая из них порождает свой базисный ряд гармонических потенциалов типа (25) и (26). Причем в действительности каждый такой базис будет содержать в своем составе свободные параметры a, s, что еще больше увеличивает разнообразие реализуемых электродных конфигураций.

Очевидно, нетривиальные трехмерные антисимметричные полевые конфигурации имеют место уже при $n = 0$. В то же время для получения истинно трехмерных полевых конфигураций в симметричном случае необходимо удержание в (4) хотя бы двух членов, т.е. необходимо рассматривать $n > 0$.

Рассмотрим далее несколько прострых, но интересных для практики примеров.

Пример 1

$$R(\omega) = \omega^k, \quad k \in Z, \quad k \geq 0.$$

При целых неотрицательных k формулы (25), (26) дают все гармонические полиномы до порядков $n = k$. При вещественных положительных, но не целых k формулы (25), (26) дают последовательность элементарных решений, ограниченных в любой конечной точке (x, y) плоскости $z = 0$ при $k \geq n$ и имеющих особенности в коэффициентах старших степеней z при $n > [k]$, где $[k]$ — целая часть k.

Пример 2

$$R(\omega) = \omega^k, \quad k \in Z, \quad k < 0.$$

В этом случае все структуры, начиная с $n = 0$, будут обладать полюсами. Пусть $k = -1$, $n = 0$, тогда для антисимметричного случая имеем

$$R = \frac{1}{\omega}, \quad \varphi = \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\overline{\omega}}\right) z = \frac{2xz}{x^2 + y^2}, \tag{27}$$

т.е. получаем однородный потенциал нулевой кратности, эквипотенциали которого — конуса с общей вершиной в начале координат. При $n = 1$ антисимметричный потенциал, содержащий члены до кубических по z включительно, при данной производящей функции R имеет вид

$$\varphi = \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega} + \frac{\omega}{\overline{\omega}}\right) z + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\overline{\omega}^2}\right) z^3, \tag{28}$$

или в вещественных координатах

$$\varphi = 2\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} z + \frac{4}{3}\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} z^3. \tag{29}$$

Этот потенциал также однородный, но уже первой кратности. Очевидно, что потенциалы, соответствующие $n > 1$, будут также однородными функциями, но более высоких степеней кратности.

Пример 3

$$R(\omega) = \omega^s, \quad s = k + il.$$

В этом случае антисимметричный потенцила при $n = 0$ имеет вид

$$\varphi = (\omega^s + \overline{\omega}^s) z \tag{30}$$

или, в цилиндрических координатах

$$\omega = r\exp(i\gamma), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \gamma = \mathrm{arctg}(y/x). \tag{31}$$

Тогда

$$\omega^s = r^{k+il}\exp\big(i(k+il)\gamma\big) = r^k \exp(-l\gamma)\exp\big(i(l\ln r + k\gamma)\big) \tag{32}$$

и

$$\varphi = 2r^k z \exp(-l\gamma)\cos(l\ln r + k\gamma). \tag{33}$$

Интересно, что данный потенциал обладает кроме плоской нулевой эквипотенциали $z = 0$ также нулевыми эквипотенциалями, определяемыми уравнением

$$l \ln r + k\gamma = \pi/2 + \pi m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{34}$$

Эти поверхности имеют уравнение

$$r = \exp\big((-k\gamma + \pi/2 + m)/l\big), \tag{35}$$

не зависящие от координаты z, следовательно, эквипотенциали — цилиндры с образующими, параллельными оси z и сечениями в виде логарифмических спиралей.

Пример 4

$$R(\omega) = Ln\omega.$$

Антисимметричный потенциал при $n = 0$ имеет вид

$$\varphi = (Ln\omega + Ln\overline{\omega})z = 2z \ln r \tag{36}$$

и обладает нулевыми эквипотенциалями — плоскостью $z = 0$ и цилиндром $r = 1$.

Пример 5

$$R(\omega) = \omega^k Ln\omega.$$

Симметричные и антисимметричные потенциалы при $n = k$ суть элементы рассмотренного в [2,3] базиса осесимметричных гармонических потенциалов с логарифмической особенностью на оси.

Пример 6

$$R(\omega) = iLn\omega.$$

Потенциал

$$\varphi = (iLn\omega - iLn\overline{\omega})z = 2z\gamma \tag{37}$$

интересен своей геометрией. Его эквипотенциали

$$z\gamma = c = \text{const} \tag{38}$$

при любом $z = \text{const}$ представляют собой луч $\gamma = \text{const}$ и, таким образом, эквипотенциаль имеет вид шнека с переменным шагом.

Пример 7

$$R(\omega) = \exp \omega.$$

Соответствующий $n = 0$ антисимметричный потенциал

$$\varphi = (\exp \omega + \exp \overline{\omega})z = 2z \exp x \cos y \tag{39}$$

является периодическим по y.

Пример 8

$$R(\omega) = \omega^s, \quad s \in R, \quad s > 0.$$

Симметричный потенциал, соответствующий $n = 1$, имеет вид

$$\varphi = (\omega\overline{\omega} - 2sz^2)(\omega^{s-1} + \overline{\omega}^{s-1})$$

или в цилиндрических координатах

$$\varphi = 2(r^2 - 2sz^2)r^{s-1} \cos\big((s-1)\gamma\big).$$

Данное поле обладает круговой конической эквипотенциалью с углом полураствора конуса, равным $\operatorname{arctg}\sqrt{2s}$, а также плоскими эквипотенциальными поверхностями, касающимися оси z и имеющими углы $\pi(k + 1/2)/(s-1)$, $k \in Z$ наклона к меридиональной плоскости $\gamma = 0$.

Мы ограничились изложением теоретических принципов построения новых элементарных гармонических базисов решений трехмерного уравнения Лапласа. Эти базисы, в частности, можно положить в основу аппроксимации распределения потенциала, либо напряженности поля, соответственно, в плоскости его симметрии, либо антисимметрии для последующего решения некорректной задачи Коши для уравнения Лапласа — задачи восстановления потенциала в пространстве. Примеры конкретных применений введенных потенциалов в электронной оптике будут даны в последующих публикациях.

Список литературы

[1] *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной к теории упругости. ОНТИ. М.-Л.: 1935.

[2] *Зашквара В.В., Тындык Н.Н.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 4. С. 148.

[3] *Голиков Ю.К., Григорьев Д.В., Соловьев К.В., Уткин К.Г.* Новый базисный ряд осесимметричных гармонических потенциалов для синтеза энергоанализаторов // Тез. докл. IV Всеросс. семинара „Проблемы теоретической и прикладной электронной оптики“. М.: 1999.