

Метод конечных элементов в пространственно-временной области для нестационарной электродинамики

© М.В. Давидович

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия
e-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru

(Поступило в Редакцию 12 ноября 2004 г.)

Предложен новый численный метод решения нестационарных задач электродинамики, основанный на интегродифференциальных уравнениях и представлении полей конечными элементами. Метод проиллюстрирован примерами численного расчета.

PACS: 02.70.Bf

Введение

Для анализа нестационарных электродинамических процессов в настоящее время в основном используются кусочно-разностные методы в пространственно-временной области: Finite Difference Time-Domain (FDTD), метод линий передачи (TLM) и модификации метода линий (MOL), широко представленные, как правило, в англоязычных публикациях (см., например [1–3]). На данных методах базируется ряд коммерческих прикладных пакетов программ, таких как Quick Waves. Указанные алгоритмы основываются на кусочно-разностной аппроксимации исходных дифференциальных уравнений (уравнений Максвелла), т.е. относятся к сеточным методам [4,5]. Другой подход в численных методах, основанный на использовании интегральных представлений, интегральных операторов и соответствующих им функционалов, связан с методами типа обобщенных взвешенных невязок, конечных элементов, граничных интегралов и интегральных уравнений (ИУ) [6,7]. Он обычно приводит к более эффективным алгоритмам.

Метод конечных элементов (МКЭ) [8,9] в прикладной электродинамике применяется как к дифференциальным формулировкам задач (в форме уравнений Максвелла), так и к интегральным их формулировкам (в форме интегральных уравнений, которые могут быть объемными и поверхностными). Соответственно используются объемные и поверхностные конечные элементы (КЭ). В последнее время МКЭ стал употребляться для решения и нестационарных задач в дифференциальной формулировке [10]. Ряд пакетов программ (SEMTool, MATLAB PDE Toolbox, FEMLAB), основанных на МКЭ, применимы и к расчету переменных полей. Однако к объемным уравнениям МКЭ применялся в основном только для стационарных (спектральных) задач (в частности, [11–22]), а число публикаций по различным методам решения нестационарных задач с использованием ИУ в отечественной литературе незначительно (см., например, [23–26]). Между тем в электродинамике и оптике (при возбуждении и распространении коротких и сверхкоротких импульсов) давно назрела необходимость

решать сильно нестационарные задачи более удобными, чем FDTD, методами.

Целью данной работы является развитие МКЭ для нестационарных задач в пространственно-временной области.

1. Постановка задачи

Здесь мы рассмотрим замкнутые ограниченные пространственные области V_0 (экранированные резонаторы с поверхностью S_0) и соответствующие решения для ограниченных структур в свободном пространстве (открытые резонаторы объема V_0 , ограниченного поверхностью S_0). Отличие состоит в том, что в первом случае плотность потока вектора Пойтинга на S_0 равна нулю, т.е. поверхность состоит из совокупности электрических и/или магнитных стенок, а во втором случае эта поверхность является границей диэлектрического тела и/или может быть частично экранирована. Задачи для неограниченных (полубесконечных) структур, представляющих собой различные волноводные трансформаторы, являются более сложными для численного решения и здесь не рассматриваются. Мы считаем, что анализируемые структуры возбуждаются сторонним электрическим током с плотностью $\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$, которая распределена в некотором объеме V . Соответственно имеется плотность стороннего электрического заряда

$$\rho_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = - \int_{-\infty}^t \nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t') dt'.$$

Обобщение на случай магнитных токов и магнитных включений осуществляется элементарно. В случае экранированного незаполненного резонатора и тока в свободном пространстве решение задачи определяется через тензорную функцию Грина (ФГ) [25–29]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int_V \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'. \quad (1)$$

Здесь по сравнению с [29] изменен знак в соотношении (1) и у ФГ. Диэлектрические включения можно

учесть, вводя токи поляризации, а металлические тела — с помощью поверхностной плотности тока на них. Пренебрегая пространственной дисперсией, запишем материальное уравнение в общем виде [30] с помощью восприимчивости

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \right\} \\ &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда для тока поляризации получим

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_P^e(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \\ &= \varepsilon_0 \left\{ \hat{\kappa}(\mathbf{r}, +0) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t \hat{\kappa}'(\mathbf{r}, t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражение (3) соответствует взятию предела при стремлении t' к t слева, поэтому $\hat{\kappa}(\mathbf{r}, +0)$ определяет мгновенный вклад в ток поляризации (без запаздывания). Следует отметить, что восприимчивость в нуле терпит скачок, поскольку $\hat{\kappa}(\mathbf{r}, 0) = 0$. Интеграл определяет вклад в ток поляризации от запаздывающего поля. Если процессы медленные и запаздыванием поляризации можно пренебречь, то для сред без дисперсии $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\delta(t)$ и $\mathbf{J}_P^e(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0(\varepsilon(\mathbf{r}) - 1)\partial\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/\partial t$.

Включение металлических тел приводит к появлению на их поверхности S поверхностной плотности тока \mathbf{J}_S . Поверхность S может состоять из замкнутых и разомкнутых поверхностей внутри V_0 , а также из разомкнутых частей поверхности S_0 . Поэтому в общем виде вместо (1) задача описывается интегральным уравнением в четырехмерной пространственно-временной области

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int_{V_0+V} \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt', \quad (4)$$

где введен полный ток $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_P(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_S(\mathbf{r}_\tau, t)\delta(x_\nu)$; интегрирование производится по объему, занятому структурой и сторонним током; $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r}$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — нормаль к поверхности S ; x_ν — нормальная координата, отсчитываемая от поверхности.

В соответствии с идеологией введения поверхностного тока дельта-функция выделяет в (4) поверхностный интеграл. Поле (4) должно удовлетворять граничным условиям на металлических поверхностях внутри рассматриваемой области и условиям сопряжения на границах раздела и внутри диэлектрических тел (в последнем случае это условия непрерывности), что и приводит к интегродифференциальным уравнениям (ИДУ). В общем случае эти уравнения являются комбинированными (поверхностно-объемными) и зависящими от времени.

В случае структур в свободном пространстве все сказанное сохраняет силу, только вместо ФГ замкнутого объемного резонатора объема V_0 необходимо рассматривать ФГ свободного пространства [29]. В силу однородности пространства–времени эта ФГ зависит только от разности соответствующих аргументов и записывается как

$$\begin{aligned} \Gamma^{ee}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \left(\frac{\nabla \otimes \nabla}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t' - t'') dt'' \right. \\ &\quad \left. - \mu_0 \hat{I} \frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где введены единичный тензор \hat{I} и скалярная ФГ, имеющая вид [29]

$$G(\mathbf{r}, t) = (4\pi|\mathbf{r}|)^{-1} \delta(t - |\mathbf{r}|/c) = g(\mathbf{r})\delta(t - |\mathbf{r}|/c). \quad (6)$$

Смысл соотношения (5) таков, что сначала необходимо осуществить интегрирование по штрихованному пространственно-временным переменным, а потом взятие первообразной и интегрирование по времени [29]. Поэтому тензорная ФГ может быть представлена соотношением

$$\begin{aligned} \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t) &= \frac{Z_0}{4\pi r} \left\{ (\hat{I} - \mathbf{r}_0 \otimes \mathbf{r}_0) \frac{\delta'(t-r/c)}{c} \right. \\ &\quad \left. - (\hat{I} - 3\mathbf{r}_0 \otimes \mathbf{r}_0) \left[\frac{\delta(t-r/c)}{r} + \frac{c\chi(t-r/c)}{r^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$, $\chi(t)$ — функция Хевисайда (равная 1 при положительном аргументе и 0 в остальных случаях). Следует еще раз заметить, что ФГ (7) отличается от соответствующей ФГ в [29] знаком (соответственно изменен знак и в уравнении (4)). Кроме этого, изменен знак у первого члена в (7) по сравнению с выражением (34а) в работе [29]. Это связано с тем обстоятельством, что операторы дифференцирования и интегрирования с дельта-функцией антикоммутируют

$$\partial/\partial t \int \delta(t-t')f(t')dt' = f'(t) = - \int \delta'(t-t')f(t')dt'.$$

В этом соотношении f — произвольная непрерывная функция. Если вместо этой функции используется дельта-функция (как в [29] при определении поля диполя), то знак производной дельта-функции при формальном вычислении не определен. Поскольку ФГ (7) действует как интегральный оператор на некую функцию координат и времени, производную дельта-функцию следует взять со знаком „минус“. В этом случае интегрирование с дельта-функцией дает запаздывающее значение функции, а дифференцирование — запаздывающее значение ее производной, т.е. именно тот результат, который соответствует интегрированию с отрицательной производной дельта-функции и соотношениями поля диполя [29, формулы 8.32–8.33]. ФГ (7) удовлетворяет условию излучения и условию причинности.

Для экранированного резонатора выражения для тензорных ФГ аналогичны, только в (7) вместо $\hat{I}G$ следует рассматривать диагональную тензорную функцию $\hat{G}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t')$. Ее диагональные элементы суть решения скалярного волнового уравнения при трех различных ориентациях диполя [27,28]. В случае комбинированных ИУ необходимо вводить как поверхностные, так и объемные конечные элементы, поэтому сначала рассмотрим только объемные ИУ в пространственно-временной области. В этом случае (4) можно записать как

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \int_{V_0} \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') \hat{\kappa}(\mathbf{r}', +0) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \\ &+ \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \int_{V_0} \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') \int_{-\infty}^{t'} \hat{\kappa}'_i(\mathbf{r}', t' - t'') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'') d\mathbf{r}' dt' dt'', \\ \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^t \int_V \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'. \quad (8) \end{aligned}$$

Это уравнение можно переписать в операторной форме $\hat{L}\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{in}}$, где введен линейный интегральный оператор

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \hat{I} - \hat{L}_0 = \hat{I} - \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \int_{V_0} \left\{ \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') \hat{\kappa}(\mathbf{r}', +0) \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{t'} \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') \hat{\kappa}'_i(\mathbf{r}', t' - t'') dt'' \right\} (\cdot) d\mathbf{r}' dt'. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь \hat{I} — тождественный (единичный) оператор, а скобки указывают на необходимость подстановки функции от штрихованных аргументов, на которую действует \hat{L} . Уравнение (8) и оператор (9) записаны в интегральной форме, однако наличие производной дельта-функции в (7) превращает (8) и (9) соответственно в ИДУ и интегродифференциальный оператор.

ФГ (7) имеет сильную неинтегрируемую особенность в виде производной потенциала двойного слоя $\sim r^{-3}$. Это не позволяет использовать кусочно-постоянные КЭ. Поэтому преобразуем уравнение (8), представив его в форме

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{K}(\mathbf{r}, t), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \nabla \cdot \int_{-\infty}^t \int_{V_0} \hat{G}_t(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') \left\{ \hat{\kappa}(\mathbf{r}', +0) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{t'} \hat{\kappa}'_i(\mathbf{r}', t' - t'') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'') dt'' \right\} d\mathbf{r}' dt', \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^t \int_{V_0} \hat{G}'_t(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') \left\{ \hat{\kappa}(\mathbf{r}', +0) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{t'} \hat{\kappa}'_i(\mathbf{r}', t' - t'') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'') dt'' \right\} d\mathbf{r}' dt'. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь $\nabla \nabla \cdot$ — оператор $\text{grad} \cdot \text{div}$; $\hat{G}'_t(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t')$ — производная; $\hat{G}_t(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t')$ — первообразная по t диагональной ФГ $\hat{G}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t')$. В соотношении (12) знак „минус“ из (5) изменен на „плюс“ по аналогичным соображениям, поскольку для экранированного резонатора тензорную ФГ можно представить как сумму сингулярной части в виде (7) и регулярной части, ответственной за выполнение граничных условий на его стенках, причем

$$\hat{G}_t(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') = \hat{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c), \quad (13)$$

$$\hat{G}'_t(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') = \hat{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c). \quad (14)$$

Поэтому преобразования произведем для ФГ свободного пространства в форме (5). Тогда все ФГ зависят от разностей нештрихованных и штрихованных аргументов. Вычисляя в (12) интеграл по времени, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c^2} \int_{V_0} g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\{ \hat{\kappa}(\mathbf{r}', +0) \mathbf{E}'_i(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \right. \\ &+ \hat{\kappa}'_i(\mathbf{r}', +0) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \\ &\left. + \int_{-\infty}^{t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c} \hat{\kappa}'_i(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') dt' \right\} d\mathbf{r}'. \quad (15) \end{aligned}$$

Ядро в (15) имеет слабую особенность типа потенциала простого слоя, определяемую функцией $g(\mathbf{r}) = (4\pi r)^{-1}$, а знак (15) такой же, как и знак соответствующего члена в (5) при соблюдении указанного порядка операций.

Интегрирование (11) с ФГ (13) по времени t' следует понимать как выделение из бесконечной временной области полубесконечной области $(-\infty, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ или взятие первообразной (поскольку в бесконечном прошлом все поля равны нулю). Поэтому в (11) функцию Хевисайда, обеспечивающую в (14) принцип причинности, следует опустить или же поставить бесконечный верхний предел. В случае ее формального учета и попытки, например, выполнить интегрирование по частям получим неверный результат (функция учтена дважды). В соотношении (11) перенесем операцию дифференцирования на подынтегральную функцию, т. е. на координаты точки истока. Для этого воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot (f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \mathbf{a}(\mathbf{r}', t)) &= f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \nabla' \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}', t) \\ &- \nabla \cdot (f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \mathbf{a}(\mathbf{r}', t)) \quad (16) \end{aligned}$$

($f(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ — произвольные функции), и преобразуем дивергенцию по теореме о дивергенции (теореме Гаусса) в поверхностный интеграл

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \nabla \cdot \int_{-\infty}^t \int_{V_0} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{a}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \\ &= -\nabla \int_{-\infty}^t \oint_{S_0} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{a}(\mathbf{r}', t') \mathbf{v}(\mathbf{r}') dS' \\ &\quad + \nabla \int_{-\infty}^t \int_{V_0} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \nabla' \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \\ &= \int_{-\infty}^t \oint_{S_0} \nabla' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') (\mathbf{a}(\mathbf{r}', t') \mathbf{v}(\mathbf{r}')) dS' \\ &\quad - \int_{-\infty}^t \int_{V_0} \nabla' \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}', t') \nabla' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') d\mathbf{r}' dt'. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\nabla' = \mathbf{x}_0 \partial / \partial x' + \mathbf{y}_0 \partial / \partial y' + \mathbf{z}_0 \partial / \partial z'$ — оператор градиента в штрихованных координатах,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \hat{\kappa}(\mathbf{r}, +0) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t \hat{\kappa}'_t(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (18)$$

$$f(\mathbf{r}, t) = \chi(t - r/c) g(r), \quad (19)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \nabla' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) &= \delta(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\quad + \chi(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \hat{\kappa}(\mathbf{r}, +0) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \nabla \hat{\kappa}(\mathbf{r}, +0) \cdot$$

$$+ \int_{-\infty}^t \{ \hat{\kappa}'_t(\mathbf{r}, t - t') \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') + \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \nabla \hat{\kappa}'_t(\mathbf{r}, t - t') \} dt'. \quad (21)$$

В соотношении (17) интегрирование по времени с дельта-функцией, возникшей в (20), осуществляется элементарно, и для первого члена в (20) остаются только поверхностный и объемный интегралы, при этом соотношения (19), (20) налагают на члены в (17) условие причинности, проявляющееся в появлении запаздывающих функций. В частности, верхний предел оставшихся временных интегралов можно положить равным $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$.

Полученное уравнение (10) с учетом (12), (15) и (17)–(21) является ИДУ для электрического поля, его производной по времени и дивергенции. По-

следнюю из ИДУ (10) можно исключить. Для этого возьмем дивергенцию от (2). Согласно уравнениям Максвелла, $\nabla \cdot \partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) / \partial t = \partial \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) / \partial t = 0$, откуда $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = c(\mathbf{r})$. Поскольку в далеком прошлом ($t = -\infty$) поле отсутствовало и его дивергенция была равна нулю, имеем $c(\mathbf{r}) = 0$. Поэтому для определения дивергенции получаем ИУ

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} &= \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \nabla \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t - t') \\ &\quad + \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t - t') \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \} dt' = \frac{\rho_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из этого ИУ методом Фурье она определяется в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{\text{inc}}(\mathbf{r}, \omega, t) / \varepsilon_0 - \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega, t) \nabla \hat{\kappa}(\mathbf{r}, \omega)}{1 + \hat{\kappa}(\mathbf{r}, \omega)} \exp(j\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь введены мгновенные (моментные) спектры электрического поля и плотности заряда, вычисляемые по промежутку времени $(-\infty, t)$ и поэтому зависящие от текущего времени; $\nabla \hat{\kappa}(\mathbf{r}, \omega)$, $\hat{\kappa}(\mathbf{r}, \omega)$ — спектры ядер $\nabla \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t)$ и $\hat{\kappa}(\mathbf{r}, t)$ соответственно. В силу того что оба ядра равны нулю при отрицательных t , эти спектры определяются по положительным временам, например

$$\hat{\kappa}(\mathbf{r}, \omega) = \int_0^{\infty} \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Получим также вид ИДУ для сред без дисперсии. В этом случае

$$\varepsilon_0^{-1} \mathbf{J}_P^e(\mathbf{r}, t) = (\varepsilon(\mathbf{r}) - 1) \partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) / \partial t, \quad (24)$$

поэтому выражение в фигурных скобках в (11), (12), согласно (3), надо заменить на (24). Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \nabla \cdot \int_{-\infty}^t \int_{V_0} g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\varepsilon(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{E}'_t(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \\ &= \nabla \nabla \cdot \int_{V_0} g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\varepsilon(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) d\mathbf{r}' \\ &= \int_{V_0} \nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla \cdot [(\varepsilon(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)] d\mathbf{r}' \\ &\quad - \oint_{S_0} \nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\varepsilon(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \mathbf{v}(\mathbf{r}') dS', \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \times \int_{V_0} g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\varepsilon(\mathbf{r}') - 1)\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)/\partial t^2 d\mathbf{r}'. \quad (26)$$

В соотношении (25) можно сделать замену $\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla' g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Максимальная сингулярность ядра ИДУ (10) имеет тип потенциала простого слоя и понижена по сравнению с исходным ИУ. Указанная особенность является интегрируемой, поэтому к этому ИДУ можно применять кусочно-постоянные КЭ. Для ИДУ (10) также можно построить интегродифференциальный оператор, аналогичный (9). Пусть \hat{L} и есть такой оператор. Согласно МКЭ, необходимо определять стационарные значения зависящего от времени функционала [8,31]

$$\Phi(t) = (\mathbf{E}, \hat{L}\mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \mathbf{E}_{\text{inc}}) - (\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{E}) = (\mathbf{E}, \hat{L}\mathbf{E}) - 2(\mathbf{E}, \mathbf{E}_{\text{inc}}), \quad (27)$$

где скалярное произведение определено обычным образом в виде объемного интеграла от произведения функций (здесь используется пространство действительных функций).

Для этого разобьем искомый объем на конечные элементы и разложим искомое поле по полной системе векторных базисных функций, определенных на этих элементах,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 a_{ni}(t) \mathbf{V}_{ni}(\mathbf{r}). \quad (28)$$

КЭ в (28) являются объемными. Индекс $i = 1, 2, 3$ соответствует декартовым координатам x, y, z . Будем рассматривать векторные прямоугольные объемные КЭ. Наиболее просто они конструируются через скалярные КЭ $\mathbf{V}_n(\mathbf{r})$ путем умножения на соответствующий орт-вектор, например $\mathbf{V}_{n1}(\mathbf{r}) = x_0 V_n(\mathbf{r})$. Конечный объем V_0 экранированного резонатора легко дискретизируется на конечное число таких элементов. Для свободного пространства мы предполагаем, что поле отсутствовало до начала возбуждения. Тогда при любом t возбуждение занимает конечный объем. Однако с ростом времени область возбуждения может расширяться, и при одинаковых размерах ячеек число элементов N будет зависеть от времени. В этом случае для дискретизации удобно взять заведомо большую область V_0 и считать коэффициенты элементов, до которых возбуждение не дошло, нулевыми. Заметим, что в силу условий причинности в (8) выделяется именно та пространственная область интегрирования, в которой имеется возбуждение. В результате для коэффициентов разложения получается

система обыкновенных линейных ИДУ

$$a_{ni}(t) = \varepsilon_0 \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_{-\infty}^t g_{nm}^{ij}(t, t') a_{mj}(t') dt' + \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} f_{nm}^{ij}(t, t', t'') a_{mj}(t'') dt'' \right\} + c_{ni}(t). \quad (29)$$

В этих уравнениях введены следующие обозначения:

$$g_{nm}^{ij}(t, t') = \int_{\Delta V_n} \int_{\Delta V_m} \mathbf{V}_{ni}^*(\mathbf{r}) \{ \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \hat{\kappa}(\mathbf{r}', +0) \} \mathbf{V}_{mj}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}',$$

$$f_{nm}^{ij}(t, t', t'') = \int_{\Delta V_n} \int_{\Delta V_m} \mathbf{V}_{ni}^*(\mathbf{r}) \{ \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \hat{\kappa}'(\mathbf{r}', t' - t'') \} \mathbf{V}_{mj}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}',$$

$$c_{ni}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{V_0} \int_V \mathbf{V}_{ni}^*(\mathbf{r}) \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'. \quad (30)$$

Функция (30) удовлетворяет условиям $g_{nm}^{ik}(t, t') = 0$ при $t' \leq t$, $f_{nm}^{ik}(t, t', t'') = 0$ при $t'' \leq t'$, $f_{nm}^{ik}(t, t', t'') = 0$ при $t' \leq t$. Соотношения (30) следует понимать в расширенном смысле, т.е. Γ^{ee} — ядро некоего интегродифференциального оператора \hat{L}_0 , который содержит производную дельта-функции и может содержать поверхностный интеграл, получающийся интегрированием по частям исходного ИУ (8). Наличие в (7) производной дельта-функции приводит к появлению в (30) и (29) производных $\partial a_{mj}/\partial t$, а понижение порядка сингулярности приводит к появлению разложения и по функциям $\nabla \cdot \mathbf{V}_{ni}(\mathbf{r})$. Однако последние функции можно исключить, используя (23). В случае однородного диэлектрика таких разложений не возникает, поскольку внутри тела $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Для неоднородного диэлектрика без дисперсии соотношение (23) упрощается

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})} - \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \nabla \varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})}. \quad (31)$$

Таким образом, нестационарная задача электродинамики сводится к системе обыкновенных линейных ИДУ во временной области, которая может быть решена численно. Основной задачей здесь является вычисление матричных элементов и свободных членов (30). Наиболее просто аналитически они определяются для кусочно-постоянных КЭ V_n . При этом коэффициент a_{ni} определяет напряженность компоненты i электрического поля в КЭ с номером n . Для гладких КЭ более высокого порядка элементарная ячейка объема δV_n содержит несколько узлов, а коэффициенты в (28) имеют аналогичный

физический смысл как соответствующие напряженности в центральных узлах ячеек. Отметим, что в качестве нижнего временного предела во всех формулах можно взять время начала действия возбуждения t_0 . Если же в некий момент t_0 поле известно (начальные условия), то далее расчет можно производить от этого момента.

Наконец, рассмотрим вопрос о скорости распространения возмущения для сред без дисперсии. Подействуем оператором $\nabla^2 - c^{-2}\partial^2/\partial t^2$ на электрическое поле (10) при условии (24)–(26)

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - c^{-2}\partial^2/\partial t^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r}) - 1)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ &+ c^{-2}(\varepsilon(\mathbf{r}) - 1)\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/\partial t^2 \\ &+ \mu_0\partial\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)/\partial t - \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались уравнением

$$(\nabla^2 - c^{-2}\partial^2/\partial t^2)G(\mathbf{r}, t) = -\delta(t)\delta(\mathbf{r}),$$

коммутативностью операций взятия первообразной и производной по времени, операций дифференцирования по пространственным и временным координатам, а также свойствам

$$\begin{aligned} \nabla\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) \\ = \nabla \left\{ \frac{\rho_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})} - \frac{\rho_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})} + \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\nabla\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \right\} \\ = \nabla \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\nabla\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})}. \end{aligned}$$

Поэтому электрическое поле удовлетворяет волновому уравнению

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \varepsilon(\mathbf{r})c^{-2}\partial^2/\partial t^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0\partial\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)/\partial t \\ &+ \frac{\nabla\rho_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})} - \nabla \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\nabla\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})}, \end{aligned}$$

или в силу соотношения (31) и известного векторного тождества волновому уравнению в форме

$$(\nabla \times \nabla + \varepsilon(\mathbf{r})c^{-2}\partial^2/\partial t^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0\partial\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)/\partial t.$$

Решение этих уравнений есть нестационарная волна, бегущая со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon}$. И хотя поле возбуждения \mathbf{E}_{inc} распространяется со скоростью c , полное поле и его возмущения идут со скоростью v , поскольку все возмущения \mathbf{E}_{inc} гасится перед их фронтом за счет интерференции. Если $\varepsilon = \text{const}$, то решение волнового уравнения дается обратным оператором [29] в виде ФГ (5) с заменой $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0\varepsilon$, т.е. возбуждение идет со скоростью v . В этом случае для расположенного в начале координат точечного источника непосредственно из (10) можно получить, что $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$, где поле возбуждения взято при указанной замене, т.е.

представляет собой запаздывающую функцию времени аргумента $t - r/v$. Для доказательства можно заменить в (10) запаздывающую вторую производную поля по времени, согласно волновому уравнению, а затем в пространственном интеграле сделать замену переменных $\mathbf{r} = \sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{\rho}$. Указанное доказательство справедливо и для ограниченных структур, когда возбуждение не успело дойти до границ.

2. Вычисление матричных элементов

В качестве конечных элементов для однородного диэлектрика далее использованы объемные прямоугольные кусочно-постоянные КЭ $V_n(\mathbf{r})$. Выбор кусочно-постоянных элементов диктуется тем обстоятельством, что они ортогональны, а вычисление интегралов в матричных элементах для них осуществляется аналитически наиболее просто. Использование кусочно-постоянных элементов в данном случае целесообразно, поскольку оператор (9) переводит кусочно-постоянные КЭ, принадлежащие пространству L_2 разрывных функций, интегрируемых с квадратом в функции этого же пространства (пробные и весовые функции принадлежат одному гильбертову пространству). Кроме того, получаемые матричные элементы существуют. Выбор элементов более высокого порядка (более гладких, непрерывных или даже дифференцируемых) приводит к сложным интегралам и матричным схемам и целесообразен, например, при возникновении производных в случае неоднородного диэлектрика. Векторные кусочно-постоянные ортонормированные функции имеют вид

$$\mathbf{V}_{ni}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{x}_i/\sqrt{\delta V_n}, & \mathbf{r} \in \delta V_n; \\ 0, & \mathbf{r} \notin \delta V_n. \end{cases} \quad (32)$$

Здесь $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 \equiv \mathbf{y}_0$, $\mathbf{x}_3 \equiv \mathbf{z}_0$ — единичные орт-векторы декартовой системы координат; δV_n — элемент дискретизации объема. Для вычисления матричных элементов необходимо задать восприимчивость (временную дисперсию). Наиболее простые результаты получаются для однородного диэлектрика, когда восприимчивость не зависит от пространственной координаты. В общем случае можно определить частотную дисперсию (диэлектрическую проницаемость) в виде

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \int_0^\infty \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) \exp(-j\omega t) dt = 1 + \hat{\kappa}(\mathbf{r}, \omega). \quad (33)$$

Заметим, что здесь также выполняется принцип причинности $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \delta(t) + \chi(t)\kappa(\mathbf{r}, t) = 0$ при $t < 0$ (здесь κ — уже непрерывная функция времени). Это означает, что поляризация в точке \mathbf{r} определяется только мгновенным и всеми предыдущими значениями поля в этой точке. По мере удаления в прошлое эта связь ослабевает. Поэтому закон дисперсии должен задаваться в виде затухающих во времени функций,

например в виде набора экспонент. Наиболее простой такой закон для однородного диэлектрика имеет вид $\hat{\kappa}(t) = \kappa_0 \chi(t) \exp(-\alpha t)$. Ему соответствует спектральная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \kappa_0 \frac{\alpha - j\omega}{\omega^2 + \alpha^2}. \quad (34)$$

Комплексные проницаемости, определяемые законом (33), в частности проницаемость (34), удовлетворяют соотношениям Крамерса–Кронига [30]. Если же известен закон частотной дисперсии (33), то функция $\hat{\kappa}(t)$ дается обратным преобразованием Фурье.

Рассмотрим свободное пространство с однородным диэлектрическим телом с указанным законом дисперсии. Тогда $\hat{\kappa}(+0) = \kappa_0$ (необходимо брать точку $+0$), $\hat{\kappa}'_t = -\alpha \kappa_0 \chi(t) \exp(-\alpha t)$. Здесь при дифференцировании дельта-функцию учитывать не надо, поскольку она уже учтена в виде второго члена в (8), поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{\kappa_0}{4\pi c} \int_{V_0} d\mathbf{r}' \left\{ c \int_{-\infty}^{t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c} \frac{\hat{\mathbf{I}} - 3(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0) \otimes (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right. \\ & \times \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t') - \alpha \int_{-\infty}^{t'} \exp(-\alpha(t' - t'')) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'') dt'' \right] dt' \\ & + \frac{\hat{\mathbf{I}} - 3(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0) \otimes (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \right. \\ & - \alpha \int_{-\infty}^{t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c} \exp(-\alpha(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c - t')) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \left. \right] \\ & + \frac{\hat{\mathbf{I}} - (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0) \otimes (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \left[\mathbf{E}'_t(\mathbf{r}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \right. \\ & - \alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) + \alpha^2 \int_{-\infty}^{t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c} \exp(-\alpha(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)) \\ & \left. \left. \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) dt' \right] \right\} + \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

В этом соотношении коэффициенты κ_0, α отличны от нуля только в области диэлектрика и явно учтен принцип причинности путем задания пределов интегрирования во времени. Воспользовавшись соотношением $\nabla g(\mathbf{r}) = -g(\mathbf{r})\mathbf{r}_0/r$, понизим сингулярность в первом члене, добавив поверхностный интеграл и перенеся дифференцирование на квадратные скобки. Используя этот вид, можно явно определить все матричные элементы (30). Заметим, что формально интегрирование распространяется на всю бесконечную временную область введением соответствующих функций Хевисайда. Таким приемом можно также еще раз доказать и соотношения типа (3).

В случае экранированного незаполненного резонатора ФГ Γ^{ee} может быть получена в виде разложения по его полной ортогональной системе действительных пространственных соленоидальных и потенциальных векторных функций $\mathbf{E}_n(\mathbf{r}), \nabla \varphi_n(\mathbf{r})$ [25,26]

$$\begin{aligned} \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{E}_n(\mathbf{r}')}{N_n^e} [g'_n(t - t') + \delta(t - t')g_n(t - t')] \right. \\ &\left. + \chi(t - t') \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{r}) \otimes \nabla \varphi_n(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0 \lambda_n \nu_n} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $N_n^e, \lambda_n, \nu_n, \Omega_n$ — заданные коэффициенты (например, N_n^e являются нормами функций \mathbf{E}_n, Ω_n пропорциональны резонансным частотам), а временные ФГ имеют представление

$$g_n(t) = \chi(t) \frac{\sin(\Omega_n t)}{\Omega_n}.$$

Поскольку $g_n(0) = 0$, член с дельта-функцией можно опустить. Знание функций \mathbf{E}_n, φ_n также позволяет явно определить матричные элементы. ФГ замкнутого объема можно также использовать для свободного пространства. Для этого объем (например, куб) нужно взять достаточно большим, чтобы в момент t возбуждение не успело дойти до стенок резонатора. Тогда поле не чувствует этих стенок и процесс аналогичен процессу в свободном пространстве.

3. Комбинированные уравнения и алгоритмы

В этом случае на поверхности S введем векторные ортонормированные поверхностные конечные элементы, дающие аппроксимацию поверхностного тока в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_\tau, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{i=1}^2 b_{ni}(t) \mathbf{S}_{ni}(\mathbf{r}). \quad (35)$$

Индекс $i = 1, 2$ здесь соответствует двум взаимно ортогональным поверхностным векторным элементам на поверхностном дискрете ΔS_n . Наиболее просто использовать прямоугольные или треугольные кусочно-постоянные поверхностные элементы. К полю [8] необходимо теперь добавить член

$$\int_{-\infty}^t \int_S \Gamma^{ee}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}'_t, t') d\mathbf{r}'_t dt', \quad (36)$$

а вместо (29) получается система уравнений

$$a_{ni}(t) = \varepsilon_0 \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_{-\infty}^t g_{nm}^{ij}(t, t') a_{mj}(t') dt' + \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} f_{nm}^{ij}(t, t', t'') a_{mj}(t'') dt'' \right\} + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^t h_{nm}^{ik}(t, t') b_{mk}(t') dt' + e_{ni}(t). \quad (37)$$

Для нахождения дополнительных уравнений, определяющих коэффициенты, необходимо подчинить поле импедансным условиям, например

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{J}_S \times \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \quad (38)$$

Тогда имеем дополнительно к (37) уравнения

$$\rho b_{ni}(t) = \varepsilon_0 \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^t h_{nm}^{ik}(t, t') a_{mk}(t') dt' + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^t l_{nm}^{ik}(t, t') b_{mk}(t') dt' + d_{ni}(t).$$

В случае малого импеданса или идеальной проводимости ($\rho = 0$) это соотношение использовать неудобно, вместо него можно взять дополнительное условие

$$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_\tau, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = & \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \int_V \Gamma^{me}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' + \varepsilon_0 \int_{V_0} \Gamma^{me}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') \left[\hat{\kappa}(\mathbf{r}', 0) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') + \int_{-\infty}^{t'} \hat{\kappa}'_t(\mathbf{r}', t' - t'') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'') dt'' \right] d\mathbf{r}' + \int_S \Gamma^{me}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}'_\tau, t') \mathbf{J}_S(\mathbf{r}'_\tau, t') d\mathbf{r}'_\tau \right\}, \end{aligned}$$

Для свободного пространства имеется представление введенной ФГ $\Gamma^{me}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \nabla \times \hat{I}G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$. В работах [25,26] получены все четыре тензорные ФГ соответственно для экранированного резонатора и волновода в виде разложения по собственным функциям и волнам.

4. Разностная схема и численные результаты

Для решения полученных уравнений применим разностную схему четвертого порядка малости по величине шага Δt . Для этого разобьем временной интервал (t_0, t) на элементарные подынтервалы длины $\Delta t = t_k - t_{k-1}$; $k = 1, 2, 3, \dots$. Возьмем аппроксимацию

$$a_{ni}(t) = a_{ni}(t_k) + a'_{ni}(t_k)(t - t_k) + a''_{ni}(t_k)(t - t_k)^2/2 + a'''_{ni}(t_k)(t - t_k)^3/6 \quad (39)$$

в окрестности каждой точки t_k . Начальные условия зададим в виде $a_{ni}(t_0) = a'_{ni}(t_0) = a''_{ni}(t_0) = a'''_{ni}(t_0) = 0$. Производные заменим соответствующими конечными левыми разностями, например

$$\begin{aligned} a'_{ni}(t_k) &= \Delta_1 a_{ni}(t_k) = [a_{ni}(t_k) - a_{ni}(t_{k-1})]/\Delta t \\ &= [a_{nik} - a_{ni(k-1)}]/\Delta t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a''_{ni}(t_k) &= \Delta_2 a_{ni}(t_k) = \Delta_1 \Delta_1 a_{ni}(t_k) \\ &= [\Delta_1 a_{ni}(t_k) - \Delta_1 a_{ni}(t_{k-1})]/\Delta t \\ &= [a_{ni}(t_k - 2a_{ni}(t_{k-1})) + a_{ni}(t_{k-2})]/\Delta t^2. \quad (40) \end{aligned}$$

Подстановка этих соотношений и интегрирование приводят к разностной схеме

$$a_{nik} = a_{ni(k-1)} + \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^k G_{nm}^{ij} a_{mj(k-1)} + c_{nik}. \quad (41)$$

Соответствующие матричные элементы здесь имеют явное представление, но из-за громоздкого вида не приведены. Вычисление коэффициентов в (39) производится по четырехточечной схеме, однако по мере увеличения времени $t_k = k\Delta t$ в силу дисперсии количество точек в (41) растет. Если ограничиться конечным временем отклика в восприимчивости, т.е. вместо соотношений (2) рассматривать аналогичные соотношения для фильтра с конечной памятью $T = K\Delta t$ [32]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{t-T}^t \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \right\},$$

то можно ограничиться разностными схемами с фиксированным числом точек. Кроме того, на количество точек в схеме (41) влияют пространственные индексы. Коэффициенты ячеек, до которых возбуждение не дошло, можно не использовать. Если память T конечна, можно также не использовать и коэффициенты ячеек, из которых возбуждение уже ушло. Однако такой анализ усложняет алгоритм. Проще использовать область в виде куба, охватывающего расширяющийся со скоростью света шар. Для вычисления коэффициента данной ячейки с номером n следует использовать запаздывающие

на время $\tau_{nm} = |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|/c$ коэффициенты прилегающих ячеек, находящихся в зоне возбуждения, т.е. сдвигать в прошлое индекс n на величину $l = [\tau_{nm}/\Delta t]$, где скобки означают целую часть. Получение матричных элементов в (41) связано с вычислением интегралов. Во временной области для ФГ свободного пространства они сводятся к интегралам типа

$$\int_{l_{n-1}}^{l_n} \exp(-\alpha(t_n - t)) t^p dt, \quad \alpha = 0, \quad \alpha \neq 0; \quad p = 1, 2, 3.$$

Интегралы в пространственной области аналогичны вычисляемым для матричных элементов спектральных задач, решаемых методом ИУ [12–22].

В качестве численной иллюстрации метода рассмотрим излучение точечного диполя с плотностью тока

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{z}_0 \chi(t) \chi(\tau - t) \delta(\mathbf{r}) \sin(\chi(\omega_0 t)) \\ &= \begin{cases} \mathbf{z}_0 \delta(\mathbf{r}) \sin(\omega_0 t), & t_0 = 0 < t < \tau; \\ 0, & t < 0, \quad t > \tau. \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

Пусть $2a$ — некий характерный размер задачи. Тогда можно ввести следующие характерные временные параметры: Δt , $T_0 = 2\pi/\omega_0$, τ , a/c , $2a/c$, $1/\alpha$, $1/\kappa_0$. В зависимости от соотношения между ними решение будет иметь различный характер. Времена T_0 и τ определяют быстроту процесса. Ясно, что для получения приемлемой точности надо брать шаг $\Delta t \ll T_0, \tau$. Случай $\tau \gg T_0$ при $t \sim \tau$ соответствует квазимонохроматическим (квазистационарным во времени) процессам. При $a/(\Delta t c) \ll 1$ пространственным запаздыванием можно пренебречь, что соответствует квазистационарным (медленно изменяющимся) в пространстве процессам. Два последних параметра характеризуют временную дисперсию (или временное запаздывание поляризации), а также характерное время усреднения при определении поляризации $\tau_\varepsilon = 1/\kappa_0$. Действительно, $\varepsilon(0) = 1 + \kappa_0/\alpha$ и обычно порядка нескольких единиц, поэтому

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\tau_\varepsilon} \int_{t-\tau_\varepsilon}^t \exp(-\alpha(t-t')) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'.$$

Если за время τ_ε поле изменяется слабо, его можно вынести за знак интегрирования, тогда будем иметь $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\varepsilon = \varepsilon(0) = 1 + \kappa_0/\alpha$, т.е. для медленных процессов дисперсией можно пренебречь.

Рассмотрим два случая: 1) диполь находится в центре полого куба с размером ребер $2a$ и ориентацией их вдоль осей координат, который окружен однородным диэлектриком без дисперсии; 2) диполь находится в центре аналогичного диэлектрического куба, расположенного в свободном пространстве. Область решения выбиралась в виде куба с размером грани $4a$ и дискретизировалась разбиением каждой грани на $2N_0 + 1$ отрезков, при этом

задача имела размерность $3(2N_0 + 1)^3$. Возбуждающее поле идеального точечного диполя имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{Z_0 \chi(t - r/c) \chi(\tau - t)}{4\pi r} \\ &\times \left\{ (\mathbf{z}_0 - \mathbf{r}_0) \frac{\omega_0 \cos(\omega_0(t - r/c))}{c} + (\mathbf{z}_0 - 3\mathbf{r}_0) \right. \\ &\times \left. \left[\frac{\sin(\omega_0(t - r/c))}{r} + \frac{c[1 - \cos(\omega_0(t - r/c))]}{\omega_0 r^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Для исключения сингулярности в поле (43) в алгоритме сделана замена $r \rightarrow \sqrt{r^2 + \delta^2}$, где δ — размер пространственной ячейки. Тем самым мы как бы „размазали“ диполь по ячейке, введя некую эффективную конечную плотность тока. Если ток действует кратное число периодов, то после его окончания не возникают нескомпенсированные статические заряды диполя, поэтому использовано значение $\tau = T_0$.

На рис. 1–4 представлены результаты тестового моделирования в плоскости $z = 0$ возбуждения и прохождения импульса для первого (рис. 1, 2) и второго случаев (рис. 3, 4) при $\varepsilon = 4$, $N_0 = 50$ и различных моментах до достижения импульсом границы раздела (рис. 1, 3) и после (рис. 2, 4). Координаты приведены в безразмерных единицах, которые выбраны из условия $a\omega_0/c = 10$. Ему соответствует наличие границ раздела при $|x| = |y| = |z| = 10$ в этих безразмерных координатах. В рассмотренных тестовых примерах расчет произведен при относительно малых временах (до прихода в точку наблюдения отражений от граней $z = \pm a$), поэтому в целях экономии памяти размерность задачи снижена в три раза (учтена только компонента E_z).

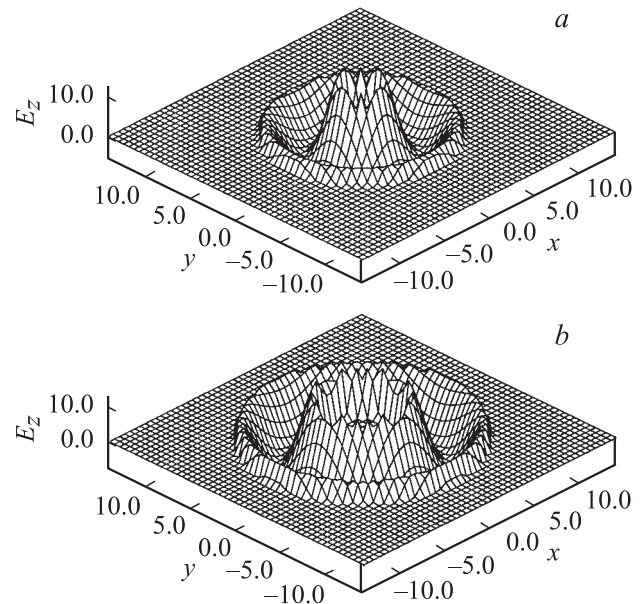


Рис. 1. Компонента E_z в плоскости $z = 0$ для диполя в полости с размером $a\omega_0/c = 10.0$ в моменты $\omega_0 t = 8.0$ (a), 10.0 (b).

При бóльших временах за счет многократных переотражений изначально сферической волны от прямоугольных граней возникает перемешивание компонент поля внутри куба. Видно, что наличие поверхностей раздела приводит к искажению сферических фронтов импульса. Наличие дисперсии для задачи 1 приведет после прохождения импульсом границы раздела к появлению в нем

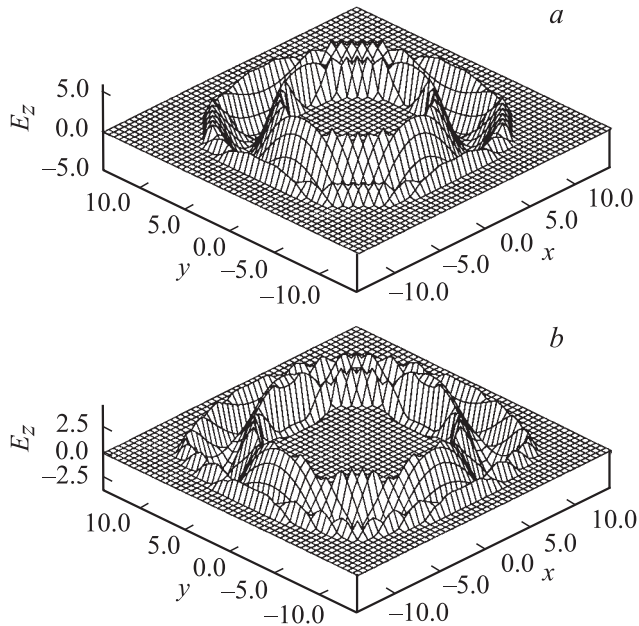


Рис. 2. Компонента E_z в плоскости $z = 0$ для диполя в полости с размером $a\omega_0/c = 10.0$ в моменты $\omega_0 t = 12.0$ (a), 14.0 (b).

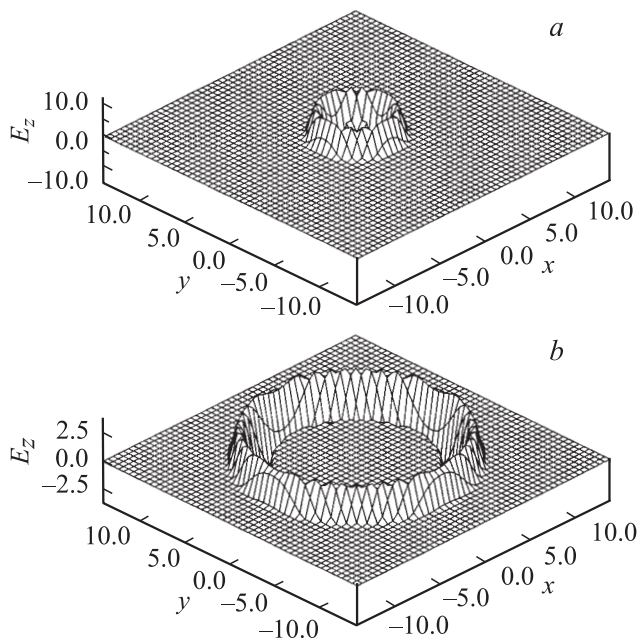


Рис. 3. Компонента E_z в плоскости $z = 0$ для диполя в диэлектрическом кубе с размером $a\omega_0/c = 10.0$ в моменты $\omega_0 t = 8.0$ (a), 20.0 (b).

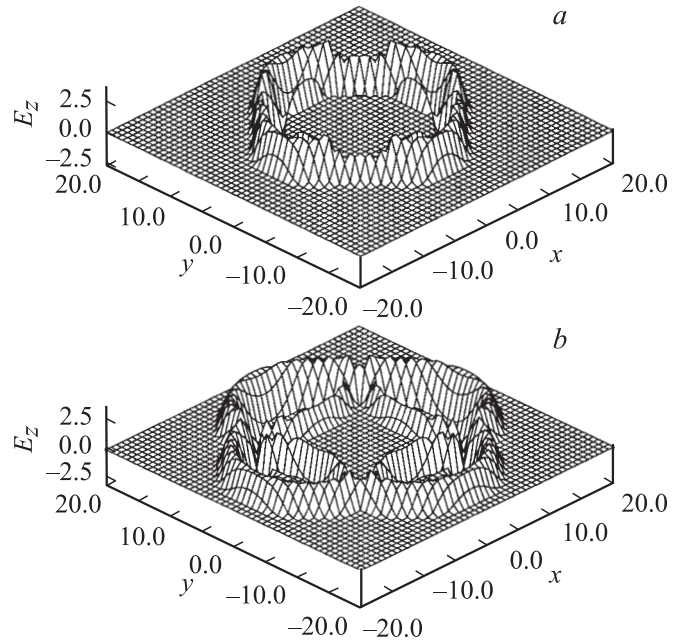


Рис. 4. Компонента E_z в плоскости $z = 0$ для диполя в диэлектрическом кубе с размером $a\omega_0/c = 10.0$ в моменты $\omega_0 t = 24.0$ (a), 28.0 (b).

предвестника и хвоста, которые будут соответственно уходить вперед и отставать по мере распространения основной части импульса, а для задачи 2 предвестник появится сразу, но после прохождения границы раздела будет изменяться лишь бесконечно длинный затухающий хвост импульса, соответствующий излучению многократных переотражений. Использованный алгоритм основан на дискретизации вышеприведенного ИДУ и решении получающейся системы разностных уравнений (41).

Заключение

Предложен новый численный метод для нестационарной электродинамики, основанный на использовании ИДУ и разложении полей и токов по конечным элементам. В отличие от МКЭ для спектральных задач, приводящих к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), данный метод приводит к системам линейных обыкновенных ИДУ во временной области для зависящих от времени коэффициентов разложения, разрешенных относительно главного члена. Для указанной системы уравнений предложена разностная схема. Рассмотрены уравнения с учетом дисперсии и без. При дисперсии число членов в разностной схеме растет по мере увеличения времени наблюдения. Преимущества алгоритма перед FDTD те же, что и у МКЭ перед конечно-разностными методами: меньшая погрешность при заданном шаге [8] и возможность учета дисперсии. Некоторым неудобством метода является наличие поверхностных источников. Для исключения последних

можно применять МКЭ в форме коллокаций (метод моментов с весовыми дельта-функциями) непосредственно к исходному сингулярному объемно-временному ИУ. Для исключения сингулярностей точки коллокаций следует брать не совпадающими с центрами КЭ. Предлагаемый подход может быть применен и к квазистационарным процессам, при этом его преимущество перед МКЭ для ИУ состоит в том, что нет необходимости решать возникающие в последнем методе плохо обусловленные СЛАУ, прямое обращение которых при большой размерности становится практически невозможным и требует применения итерационных методов.

Список литературы

- [1] *Kashiva T., Uchiya M., Suzuki K. et al. // IEEE Trans. Magn.* 2002. Vol. 338. N 2. P. 705–708.
- [2] *Celuch-Marcysiak M. // IEEE MTT-S Intern. Microwave Symposium Dig. Philadelphia, 2003. P. 1137–1140.*
- [3] *Celuch-Marcysiak M., Gwarek W.K. // IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.* 1996. Vol. 43. N 9. P. 2081–2089.
- [4] *Завадский В.Ю.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972. 558 с.
- [5] *Завадский В.Ю.* Метод сеток для волноводов. М.: Наука, 1986. 368 с.
- [6] *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
- [7] *Автоматизированное проектирование устройств СВЧ /* Под ред. В.В. Никольского. М.: Радио и связь, 1982. 272 с.
- [8] *Стренг Г., Фикс Д.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
- [9] *Coccioli R., Itoh T., Pelosi G., Silvester P.P. // IEEE AP Magazine.* 1996. Vol. 38. N 6. P. 34–48.
- [10] *Buffa A., Maday Y., Rapetty F. // IEEE Trans on Magn.* 2000. Vol. 36. Issue 4. P. 1351–1355.
- [11] *Гольдберг Л.Б., Пензяков В.В. // РиЭ.* 1982. Т. 27. № 9. С. 1735–1740.
- [12] *Давидович М.В. // Изв. вузов России. Радиоэлектроника.* СПб.: Изд-во СПбГЭТУ, 1998. Вып. 1. С. 20–28.
- [13] *Давидович М.В., Мещанов В.П., Попова Н.Ф. // РиЭ.* 1998. Т. 43. № 12. С. 1447–1453.
- [14] *Давидович М.В. // Функциональные электродинамические системы и устройства, линии передачи СВЧ.* Межвуз. науч. сб. Саратов: СГТУ, 1999. С. 29–38.
- [15] *Давидович М.В., Попова Н.Ф. // Машинное проектирование в прикладной электродинамике и электронике.* Тр. Третьего рабочего семинара. IEEE Saratov–Penza Chapter. Саратов. Изд-во СГТУ, 1999. С. 44–49.
- [16] *Davidovich M.V. // Proc. The 8th Biennial IEEE Conf. on Electromagnetic Field Computation (CEFC'98).* Tucson (Arizona), 1998. P. 344.
- [17] *Davidovich M.V. // Electronics and Radiophysics of Ultra-High Frequencies. Proc. Intern. University Conf. St. Petersburg, 1999. P. 376–379.*
- [18] *Davidovich M.V., Popova N.F. // Proc. Intern. Conf. on High Power Microwave Electronics: Measurements, Identification, Applications. (MIA-ME'99).* Novosibirsk, 1999. Vol. 2. P. 68–71.
- [19] *Давидович М.В. // Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб.* 1999. Вып. 110. С. 119–124.
- [20] *Davidovich M.V. // Proc. Intern. Conf. on Transparent Optical Networks.* Kielce, 1999. P. 181–184.
- [21] *Davidovich M.V., Popova N.F. // 1997 High Power Microwave Electronics: Measurements, Identification, Applications. Proc. IEEE.* Novosibirsk, 1997. P. 78–81.
- [22] *Davidovich M.V. // Proc. 15th Intern. Conf. on Microwaves, Radar and Wireless Communications.* Warsaw, 2004. P. 597–602.
- [23] *Борисов В.В.* Неустановившиеся поля в волноводах. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1991. 156 с.
- [24] *Михайлов В.Н., Корроза В.И., Голиков М.Н. // ЖТФ.* 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 1–8.
- [25] *Давидович М.В. // РиЭ.* 2001. Т. 46. № 10. С. 1198–1205.
- [26] *Давидович М.В. // РиЭ.* 2001. Т. 46. № 11. С. 1285–1292.
- [27] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
- [28] *Марков Г.Т., Панченко Б.А. // Изв. вузов. Радиотехника.* 1964. Т. 7. № 1. С. 34–41.
- [29] *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 548 с.
- [30] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
- [31] *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних краевых задач электродинамики. М.: Наука, 1967. 460 с.
- [32] *Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960. 448 с.