

01;03

О раскачке в нелинейных вторичных комбинационных резонансах осцилляций основной моды движущейся относительно среды заряженной капли

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 29 марта 2005 г.)

В аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости показано, что основная мода заряженной капли, обдуваемой потоком газа, при многомодовой начальной деформации равновесной формы раскачивается за счет нелинейного вторичного комбинационного резонансного взаимодействия с более высокими модами в том случае, когда сама основная мода присутствует в спектре мод, определяющих начальную деформацию. Указанное обстоятельство объясняет наблюдаемые в естественных условиях сфероидальные осцилляции большой амплитуды капель естественных жидкокапельных систем и позволяет приблизиться к пониманию закономерностей зажигания коронного разряда в окрестности капель в грозовых облаках и инициирования разряда молнии.

1. С заряженными каплями, движущимися относительно среды, приходится сталкиваться в многочисленных академических, технических и технологических приложениях (см., например, обзоры [1–3] и указанную там литературу). Так, кучевые облака, являющиеся источниками гроз, представляют собой множество заряженных капель воды, которые не падают на землю только благодаря влиянию восходящих потоков воздуха, в которых вес капли уравновешивается силой гидродинамического сопротивления. Исследование электрогидродинамической устойчивости поверхности заряженной капли в такой системе представляет интерес и в связи с исследованием физического механизма инициирования разряда молнии [4,5]. В соответствии с существующими представлениями зарождение разряда линейной молнии связано с зажиганием во внутриоблачном электрическом поле коронного разряда в окрестности крупной капли или обводненной градины, свободно падающей в грозовом облаке (см., например, [6–7], где анализируются критические условия зажигания коронного разряда в окрестности вершин нелинейно-осциллирующих облачных капель). Однако максимальные величины измеряемых в грозовых облаках собственных зарядов капель и электрических полей [8] много меньше необходимых для реализации неустойчивости поверхности капли по отношению к собственному и индуцированному зарядам [9,10] и лишь при больших амплитудах сфероидальных осцилляций могут привести к зажиганию коронного разряда у вершин капли [6–8].

Маловпечатляющие (несмотря на многочисленные попытки) успехи исследования физического механизма зажигания разряда молнии с коронного разряда в окрестности капли вероятнее всего указывают на то, что при исследовании устойчивости по отношению к поверхностному заряду движущейся относительно среды капли упускается некий важный фактор. Таким

упущенным фактором может быть взаимодействие поверхности капли с обдувающим ее потоком, который при реально фиксируемых скоростях движения капель также можно моделировать несжимаемой жидкостью. В модели идеальных жидкостей на границе раздела сред будет иметь место тангенциальный скачок поля скоростей, который приведет к реализации колебательной неустойчивости границы раздела сред, именуемой для плоской границы раздела несмешивающихся несжимаемых жидкостей неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца [11,12]. Реализация неустойчивости Кельвина–Гельмгольца приведет к качественному изменению физической картины реализации неустойчивости границы раздела сред и, в частности, к снижению критических условий реализации неустойчивости капли и по отношению к поверхностному заряду [9–10]. В связи со сказанным и сформулировано настоящее исследование особенностей нелинейного резонансного перераспределения энергии начальной деформации между модами нелинейно-осциллирующей капли в ламинарно обтекающем ее потоке газа и анализа критических условий реализации неустойчивости границы раздела сред в такой системе.

Следует отметить, что нелинейные осцилляции заряженной капли в обдуваемом ее потоке внешней среды ранее исследовались [13], но ввиду громоздкости полученных результатов они анализировались численно и до анализа закономерностей резонансного обмена энергией между модами дело не дошло. Вырожденные нелинейные резонансы в обсуждаемой системе были проанализированы в [14], где было выяснено, что в подобных резонансах энергия перекачивается только от низких мод к высоким. Перекачка энергии из высоких мод в низкие характерна для многомодовых комбинационных резонансов [15,16]. Однако для заряженной капли в окружающей ее идеальной диэлектрической несжимаемой среде наименьшая мода, которую можно было возбудить

в трехмодовых вторичных комбинационных резонансах, оказалась лишь третьей [17,18]. Возможность резонансной раскачки основной моды, представляющая основной интерес для построения механизма инициирования разряда молнии [4–6], была обнаружена при исследовании нелинейных четырехмодовых комбинационных резонансов [16]. Но сам обнаруженный в [16] в расчетах третьего порядка малости по амплитуде начальной деформации эффект для основной моды осцилляций оказался весьма слабым и не мог объяснить результатов натурных наблюдений [19,20], где были зафиксированы сферoidalные осцилляции падающих в атмосфере капель с амплитудой, превышающей половину радиуса капли.

2. Пусть идеальная несжимаемая диэлектрическая среда с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_* , занимающая бесконечный объем, движется с постоянной скоростью \mathbf{U}_0 относительно неподвижной капли радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_1 . Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ , а полный заряд капли — Q . Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальную осесимметричную деформацию конечной амплитуды, много меньшей, однако, радиуса капли. Поле скоростей течения жидкости в капле в начальный момент времени положим тождественно равным нулю и станем исследовать нелинейные осцилляции капли при $t > 0$.

Для упрощения нижеследующих расчетов сразу введем безразмерные переменные, в которых $R = \sigma = \rho_1 = 1$. Тогда в сферической системе координат r, θ, ϑ с началом в центре масс капли уравнение границы раздела сред, возмущенной осесимметричной капиллярным волновым движением, запишется в виде $r = 1 + \xi(\theta, t)$, $|\xi| \ll 1$. Движения жидкости в капле и среде будем полагать потенциальными, т. е. примем, что поля скоростей волнового движения жидкости имеют вид: в капле $\mathbf{V} = \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$, в среде $\mathbf{U} = \nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$.

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций границы раздела сред в описанной системе состоит из уравнений Лапласа для потенциалов скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$ [6–7,13–16]

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\varphi(\mathbf{r}, t) = 0$$

и граничных условий к ним

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad \nabla\varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{U}_0;$$

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial\xi}{\partial\theta};$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial\xi}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \frac{\partial\xi}{\partial\theta};$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + P_{\text{in}} + P_E - P_\sigma \\ = -\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\nabla\varphi)^2 + P_{\text{ex}}; \end{aligned}$$

$$P_E = \frac{\varepsilon_* (\nabla\Phi)^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = \text{div } \mathbf{n}; \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t).$$

$$-\frac{\varepsilon_*}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi) dS = 0; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$\int_{V_1} r^2 dr \sin\theta d\theta d\vartheta = \frac{4}{3} \pi; \quad V_1 = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$t = 0: \quad \xi(\theta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \varepsilon \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\mu);$$

$$\sum_{i \in \Xi} h_i = 1; \quad \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} = 0;$$

$$\xi_0 \approx -\varepsilon^2 \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i+1)} + O(\varepsilon^3). \quad (1)$$

Здесь ε — амплитуда начальной деформации, являющаяся малым параметром задачи; $P_i(\mu)$ — полином Лежандра i -го порядка; $\mu \equiv \cos(\theta)$; P_{in} и P_{ex} — давления в капле и среде соответственно; P_E — давление электрического поля собственного заряда капли на границу раздела сред; P_σ — лапласовское давление; \mathbf{n} — единичный вектор положительной нормали к поверхности капли; $\Phi_S(t)$ — постоянный вдоль поверхности капли электростатический потенциал; $\rho \equiv \rho_2/\rho_1$; h_i — коэффициенты, определяющие парциальный вклад i -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; Ξ — множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод, определяющих форму начальной деформации капли; ξ_0 — константа, определяемая из условия постоянства объема капли в начальный момент времени. Гидродинамические скорости считаем на много порядков меньшими скорости распространения электромагнитного сигнала в вакууме, в связи с чем уравнения Максвелла для расчета электрического поля в окрестности нелинейно осциллирующей капли сводятся к уравнениям электростатики.

Кроме приведенных граничных и начальных условий следует учесть также условие неподвижности центра масс системы, которое, согласно [21], при достаточно больших характерных линейных масштабах внешней среды выполняется автоматически, а расчет амплитуды трансляционной (первой) моды, как и более высоких мод, следует производить на основе системы граничных гидродинамических условий на границе раздела.

3. Решение сформулированной задачи в квадратичном по малому параметру ε приближении будем проводить асимптотическим методом многих масштабов, когда искомыми функциями $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$, а также функция образующей формы капли в любой момент времени $\xi(\theta, t)$ считаются зависящими не от обычного времени t , но от разных его масштабов $T_m = \varepsilon^m \cdot t$ в соответствии с наличием в колебательной системе быстро и медленно протекающих процессов. Аналитические асимптотические выражения для $\xi(\theta, t)$; $\psi(\mathbf{r}, t)$; $\varphi(\mathbf{r}, t)$; $\Phi(\mathbf{r}, t)$ будем искать в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε и рядов по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots); \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots); \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \varphi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots); \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots); \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) \cdot P_n(\mu); \\ \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) \cdot r^n \cdot P_n(\mu); \\ \varphi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} \cdot P_n(\mu); \\ \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} \cdot P_n(\mu). \end{aligned} \quad (3)$$

Производные по времени t будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2). \quad (4)$$

Подставляя разложения (2)–(4) в задачу (1) и приравнявая в каждом из уравнений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения (в нулевом, первом и втором порядках по ε) неизвестных коэффициентов разложения (2), (3): $M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots)$; $E_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots)$; $G_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots)$; $F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots)$.

Нижеследующее изложение ввиду конечности объема статьи ограничим расчетом коэффициентов $M_n^{(m)}(T_0, T_1)$, определяющих форму нелинейно-осциллирующей капли как функцию времени. Остальные коэффициенты разложений (2), (3), согласно [13], достаточно легко, но громоздко выражаются через $M_n^{(m)}(T_0, T_1)$.

4. В первом порядке малости по ε для определения неизвестных коэффициентов $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$ получается бесконечная система связанных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} M_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &\equiv 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \\ n \geq 2: \quad A_n \cdot M_{n-2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &+ B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} + \frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} \\ &+ \omega_n^{(2)} \cdot M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \\ &+ D_n \cdot M_{n+2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = 0; \end{aligned}$$

$$A_n = \frac{9}{4} We \cdot \chi(n) \frac{n^2(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)};$$

$$B_n = \frac{3}{2} \sqrt{\rho We} n \chi(n);$$

$$C_n = \frac{3}{2} \sqrt{\rho We} \cdot \chi(n) \frac{n(2n+1)}{2n+3};$$

$$D_n = \frac{9}{4} We \cdot \chi(n) \frac{n^2(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)};$$

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \chi(n) \left(n(n-1)(n+2-W) \right. \\ &\quad \left. - We \frac{9n^2((2n+1)(n^2-1)+3)}{2(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right); \end{aligned}$$

$$W = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_*}; \quad \chi(n) = \left(1 + \rho \frac{n}{n+1} \right)^{-1};$$

$$We \equiv \rho \cdot U_0^2; \quad \Phi_S^{(1)} \equiv 0. \quad (5)$$

Несложно видеть, что при $U_0 = 0$ система связанных дифференциальных уравнений (5) распадается на совокупность несвязанных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, определяющих гармонические осцилляции отдельных мод (как это и было получено ранее [17,18] для

ситуации осцилляций заряженной капли несжимаемой жидкости, покоящейся относительно несжимаемой диэлектрической среды). Таким образом, причиной появления линейного по малому параметру взаимодействия мод является наличие движения внешней среды. При этом, согласно (5), n -я мода взаимодействует с четырьмя ближайшими: с $(n-2)$ -й, $(n-1)$ -й, $(n+1)$ -й, $(n+2)$ -й. Ранее взаимодействие мод в линейном приближении по малому параметру было обнаружено в случае плоской границы раздела несмешивающихся между собой идеальных несжимаемых сред, одна из которых поступательно движется параллельно границе раздела [11,12], т.е. в ситуации, когда граница раздела способна претерпевать неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. В [10] было показано, что в случае обтекания капли потоком идеальной жидкости поверхность капли вовлекается в колебательное движение, характерное для этой неустойчивости.

Отметим также еще один эффект взаимодействия капли с обтекающим ее потоком идеальной жидкости, обнаруживаемый в линейном приближении: согласно [9], капля сплющивается вдоль потока в сфероид с эксцентриситетом, зависящим от скорости потока и величины заряда капли. Возможные осцилляции капли должны происходить в окрестности равновесной сфероидальной формы. Однако степень сфероидальности при разумных скоростях (пока течение обтекающей каплю среды можно считать ламинарным), как правило, невелика. Согласно [9], амплитуда обсуждаемой сфероидальной деформации $M_2^{(1)} = (3 \cdot We/16)$ весьма мала, и, например, при расчетах обтекания капли с $R = 100 \mu\text{m}$ потоком воздуха, когда $\rho_2 \approx 0.001 \text{ g/cm}^3$, при скоростях потока $U_0 \leq 100 \text{ cm/s}$ ею можно пренебречь при расчетах во втором порядке малости.

5. Для определения поправок второго порядка малости (для отыскания коэффициентов $M_n^{(2)}$) получим систему связанных неоднородных дифференциальных уравнений гармонического типа

$$\begin{aligned} M_0^{(2)}(T_0) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (M_n^{(1)}(T_0))^2; \\ A_n \cdot M_{n-2}^{(2)}(T_0) + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(2)}(T_0)}{\partial T_0} &+ \frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 \cdot M_n^{(2)}(T_0) \\ &+ C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(2)}(T_0)}{\partial T_0} + D_n \cdot M_{n+2}^{(2)}(T_0) \\ &= \chi(n) \cdot f_n(T_0); \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

с нулевыми начальными условиями. Функции неоднородности $f_n(T_0)$ определяются через коэффициенты $M_n^{(1)}$,

являющиеся решениями системы (5), и имеют вид

$$\begin{aligned} f_n(T_0) &= \sum_{m \in \Xi} \sum_{l \in \Xi} \left\{ G_1 \cdot M_m^{(1)}(T_0) \cdot M_l^{(1)}(T_0) \right. \\ &+ G_2 \left(\frac{M_{m-1}^{(1)}(T_0) \cdot M_l^{(1)}(T_0)}{2m-1} - \frac{M_{m+1}^{(1)}(T_0) \cdot M_l^{(1)}(T_0)}{2m+3} \right) \\ &+ G_3 \left(\frac{mM_{m-1}^{(1)}(T_0)}{2m-1} - \frac{mM_{m+1}^{(1)}(T_0)}{2m+3} \right) \\ &\times \left(\frac{lM_{l-1}^{(1)}(T_0)}{2l-1} - \frac{lM_{l+1}^{(1)}(T_0)}{2l+3} \right) \\ &+ G_4 \left[\frac{m}{l+1} \left(\frac{M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{2m+3} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{M_{m-1}^{(1)}(T_0)}{2m-1} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{l}{m+1} \left(\frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_{l+1}^{(1)}(T_0)}{2l+3} - \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_{l-1}^{(1)}(T_0)}{2l-1} \right) \right] \\ &+ G_5 \frac{\partial^2 M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0^2} M_l^{(1)}(T_0) + G_6 \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \\ &+ G_7 \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0) + G_8 \cdot M_m^{(1)}(T_0) \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \\ &+ G_9 \left(\frac{\partial M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_l^{(1)}(T_0)}{2m+3} - \frac{\partial M_{m-1}^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_l^{(1)}(T_0)}{2m-1} \right) \left. \right\}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G_1 \equiv & \left\{ K_{m,l,n} \left(2n[l(l+1)-1] + W \cdot \frac{n}{2} [l(m+1) \right. \right. \\ & \left. \left. - m(2m-2n+7) + 3] + We \frac{n(9m^2+9m-7)}{(2m-1)(2m+3)} \right) \right. \\ & + W \frac{n}{2} \alpha_{m,l,n} + We \frac{9n(n-1)}{4(2n-1)(2m+1)} \\ & \times [m(m-1)^2 K_{m-1,l,n-1} - (m+1)^2 (m+2) K_{m+1,l,n-1} \\ & \left. - (m-1) \alpha_{m-1,l,n-1} + (m+1) \alpha_{m+1,l,n-1} \right] \\ & + We \frac{9n(n+1)}{(4(2n+3)(2m+1))} [(m+1)^2 (m+2) K_{m+1,l,n+1} \\ & - m(m-1)^2 K_{m-1,l,n+1} - (m+1) \alpha_{m+1,l,n+1} \\ & \left. + (m-1) \alpha_{m-1,l,n+1} \right] - We \frac{9n}{8(2m+1)} \\ & \times \left[\frac{m(m-1)}{2m+1} K_{m-2,l,n} + \frac{(m+1)(m+2)}{2m+3} K_{m+2,l,n} \right] \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_2 &\equiv We \frac{9nm(m+1)}{4(2m+1)} \\
 &\quad \times [(m-1)(m+2)K_{m+1,l,n} - m(m+5)K_{m-1,l,n}]; \\
 G_3 &\equiv We \cdot \frac{9}{8} n[(m+1)(l+1)K_{m,l,n} + \alpha_{m,l,n}]; \\
 G_4 &\equiv \frac{4}{3} \frac{G_3}{U}; \\
 G_5 &\equiv \left[(m-n-1)K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho n}{n+1} \left((m-n+1)K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m+1} \right) \right]; \\
 G_6 &\equiv \frac{K_{m,l,n}(2m-n-2)}{2} - \frac{(n+2l)\alpha_{m,l,n}}{2ml} \\
 &\quad + \frac{\rho n}{2(n+1)} \left((n-2m-3)K_{m,l,n} + \frac{(n+2l+3)\alpha_{m,l,n}}{(m+1)(l+1)} \right); \\
 G_7 &\equiv \frac{3}{2} \sqrt{\rho We} \cdot n \left(\frac{m(4+5n+3m+mn+m^2)}{(n+1)(2m+1)} K_{m-1,l,n} \right. \\
 &\quad + \frac{(m+2)(2+n+m-mn+m^2)}{(n+1)(2m+1)} K_{m+1,l,n} \\
 &\quad + \frac{(n-1)(m+2)}{2n-1} K_{m,l,n-1} - \frac{(n+1)(m+2)}{2n+3} K_{m,l,n+1} \\
 &\quad + \frac{(m-1)\alpha_{m-1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} - \frac{(n-1)\alpha_{m,l,n-1}}{(m+1)(2n-1)} \\
 &\quad \left. + \frac{(n+1)\alpha_{m,l,n+1}}{(m+1)(2n+3)} - \frac{(n+1)\alpha_{m+1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} \right); \\
 G_8 &\equiv \sqrt{\rho We} \cdot \frac{3n}{2(n+1)(2m+1)} \\
 &\quad \times [(m+1)^2(m+2)K_{m+1,l,n} - m(m-1)^2K_{m-1,l,n} \\
 &\quad - (m+1)\alpha_{m+1,l,n} + (m-1)\alpha_{m-1,l,n}]; \\
 G_9 &\equiv \sqrt{\rho We} \cdot \frac{3}{2} nm(m+1)K_{m,l,n}; \\
 \alpha_{mln} &\equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0l0}^{n0} \cdot C_{m-1l1}^0; \\
 K_{mln} &\equiv [C_{m0l0}^{n0}]^2; \tag{8}
 \end{aligned}$$

C_{m0l0}^{n0} и C_{m-1l1}^{n0} — коэффициенты Клебша–Гордана.

Присутствие коэффициентов Клебша–Гордана обеспечивает существование лишь конечного количества отличных от тождественного нуля функций неоднородности $f_n(T_0)$. Так, при начальном возбуждении m -й моды будут отличны от нуля коэффициенты Клебша–Гордана (и функции неоднородности) с номерами от 0 до $2m+2$.

6. Проводимое рассмотрение ориентировано в основном на исследование нелинейных осцилляций крупных капель воды в грозовых облаках. Примем для определенности, что радиус капли $R = 100 \mu\text{m}$, тогда скорость ее свободного падения в облаке $U_0 = 72 \text{cm/s}$, а число

Рейнольда для нее $Re = 9.61$ [22]. Это означает, что течение воздуха в окрестности капли будет ламинарным, т.е. используемые при формулировке модели условия выполнены. Число Вебера для такой капли будет весьма малым $We \approx 0.7 \cdot 10^{-3}$. Такой же порядок малости будет иметь и безразмерная плотность ρ , входящая в определение функций неоднородности (7), (8). В системах (5), (6) коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n содержат множители числа Вебера We и их комбинации с безразмерной плотностью ρ вида $\sqrt{\rho We}$. В определение функций неоднородности (7), в коэффициенты G_j , в различных слагаемых входят множителями We, ρ и $\sqrt{\rho We}$. Из сказанного о численных величинах ρ и We ясно, что величины We, ρ и $\sqrt{\rho We}$ имеют один порядок малости (причина такого положения дел в том, что безразмерная скорость капли U_0 при принятых значениях физических величин имеет величину порядка единицы) и решения систем (5), (6) можно искать в виде асимптотических разложений по ним.

Безразмерный параметр Рэлея W , характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду, в рассматриваемой задаче может изменяться в пределах от 0 до 4. Согласно [8], собственные заряды на каплях в грозовых облаках невелики и для максимально наблюдаемых их значений величина параметра Рэлея не превышает десятых долей единицы. Тем не менее в асимптотических расчетах с параметром W будем обходиться как с величиной нулевого порядка малости.

а) Примем для определенности, что начальная деформация капли определена суперпозицией j - и k -й мод, при этом $j > k, |j-k| \geq 4$. Тогда в первом порядке малости по We, ρ и $\sqrt{\rho We}$ решения системы (5) с начальными условиями

$$T_0 = 0: \quad M_j^{(1)} = h_j; \quad M_k^{(1)} = h_k; \quad \frac{\partial M_j^{(1)}}{\partial T_0} = 0;$$

$$\frac{\partial M_k^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad M_n^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial M_n^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad n \neq j; \quad n \neq k$$

имеют вид

$$M_{(g-2)}^{(1)} = \frac{D_{g-2} \cdot h_g}{\omega_{0g}^2 - \omega_{g-2}^2} [\cos(\omega_{0g} \cdot T_0) - \cos(\omega_{g-2} \cdot T_0)];$$

$$\begin{aligned}
 M_{(g-1)}^{(1)} &= \frac{C_{g-1} \cdot h_g \cdot \omega_{0g}}{\omega_{0g}^2 - \omega_{g-1}^2} \\
 &\quad \times \left[-\frac{\omega_{0g}}{\omega_{g-1}} \sin(\omega_{g-1} T_0) + \sin(\omega_{0g} \cdot T_0) \right]; \\
 M_g^{(1)} &= h_g \cos(\omega_g T_0);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{(g+1)}^{(1)} &= \frac{B_{g+1} \cdot h_g \cdot \omega_{0g}}{\omega_{g+1}^2 - \omega_{0g}^2} \\
 &\quad \times \left[-\frac{\omega_{0g}}{\omega_{g+1}} \sin(\omega_{g+1} T_0) + \sin(\omega_{0g} \cdot T_0) \right];
 \end{aligned}$$

$$M_{(g+2)}^{(1)} = \frac{A_{g+2} \cdot h_g}{\omega_{g+2}^2 - \omega_{0g}^2} \times [\cos(\omega_{g+2} \cdot T_0) - \cos(\omega_{0g} \cdot T_0)]; \quad g = j; k, \quad (9)$$

где частоты ω_n определяются из уравнения

$$\omega_n^2 = \chi(n) \left(n(n-1)(n+2-W) - We \frac{9n^2((2n+1)(n^2-1)+3)}{2(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right), \quad (10)$$

имеющего смысл дисперсионного уравнения задачи, выписанного в линейном по We , $\sqrt{\rho We}$ и ρ приближении, но без учета взаимодействия мод. Это можно сделать, поскольку влияние взаимодействия мод на тангенциальном разрыве поля скоростей на границе раздела сред на вид дисперсионного уравнения проявится лишь в квадратичном по We , $\sqrt{\rho We}$ и ρ приближении. Частоты ω_{0n} определяются из уравнения (10) при $We = 0$.

Таким образом, при $|j-k| \geq 4$ рядом с каждой g -й модой ($g = j; k$), входящей в спектр мод, определяющих начальную деформацию, за счет гидродинамического взаимодействия на границе раздела сред, на которой имеет место скачок поля скоростей, будут возбуждены еще по четыре моды: $g-1$, $g-2$, $g+1$ и $g+2$. Однако амплитуды таких мод будут иметь первый порядок малости по малым переменным We , ρ и $\sqrt{\rho We}$. Если не задаваться условием $|j-k| \geq 4$, то в силу линейности системы (5) вид ее решений изменится незначительно: решения будут представлять собой линейные комбинации функций, входящих в (9).

б) По найденным решениям $M_n^{(1)}$ выпишем выражения для функций неоднородности (7) системы (6). Учитывая сказанное выше о порядках малости мод, определяющих начальную деформацию, и мод, возбуждаемых за счет линейного взаимодействия вследствие тангенциального скачка поля скоростей, несложно видеть, что определяющую роль в нелинейном, квадратичном по ε , взаимодействию будут играть моды, определяющие исходную деформацию равновесной формы капли. Поскольку исходной целью проводимого рассмотрения является исследование возможности резонансной раскачки основной моды за счет перекачки в нее энергии высоких мод, определяющих начальную деформацию капли, то дальнейшие рассуждения ограничим качественным анализом решения системы (6), (7) в пренебрежении взаимодействием мод за счет тангенциального разрыва поля скоростей на границе раздела сред. Бесконечная система связанных неоднородных уравнений (6), (7) в этом случае превратится в систему несвязанных неоднородных уравнений гармонического типа с нулевыми начальными условиями для всех мод, а функция неоднородности, определяемая (7), которую выпишем в уравнениях в нулевом порядке малости по We , ρ и $\sqrt{\rho We}$, существенно упростится. Полученная система в реальности будет описывать нелинейные осцилляции

неподвижной заряженной капли в среде, решение которой ранее найдено в [17–18]. Наличие обдувающего каплю потока проявится лишь в изменении частоты осцилляций капли, которая определится дисперсионным соотношением (10). В итоге получим, что в используемом приближении квадратичные по малому параметру ε поправки к образующей формы нелинейно-осциллирующей капли будут иметь вид [17,18]

$$M_n^{(2)}(T_0, T_1) = - \sum_{l,m \in \Xi} \frac{h_l h_m}{2} \left(\lambda_{lmn}^{(+)} + \lambda_{lmn}^{(-)} \right) \cos(\omega_n T_0) + \sum_{l,m \in \Xi} \frac{h_l h_m}{2} \left(\lambda_{lmn}^{(+)} \cos((\omega_l + \omega_m) T_0) + \lambda_{lmn}^{(-)} \cos((\omega_l - \omega_m) T_0) \right);$$

$$\lambda_{lmn}^{(\pm)} = (\gamma_{mln} \pm \omega_m \omega_l \eta_{mln}) / (\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2);$$

$$\gamma_{mln} = \chi_n K_{mln} \left(\omega_m^2 (n-m+1 - \rho n (n-m-1) / (n+1)) + 2n(l(l+1) - 1) + (l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3)nW/2 \right) + \chi_n \alpha_{mln} \left((1/m - n\rho / ((n+1)(m+1))) \omega_m^2 + nW/2 \right);$$

$$\eta_{mln} = (\chi_n K_{mln} (n/2 - m + 1 + \rho n (2m + 3 - n) / (2(n+1))) + (\chi_n \alpha_{mln} ((1 + n/(2l)) / m - n\rho (n + 2l + 3) / (2(m+1)(l+1)(n+1)))).$$

7. Несложно видеть, что при выполнении соотношения $\omega_n^2 = (\omega_m \pm \omega_l)^2$ знаменатели некоторых компонент решения (11) обращаются в нуль, а само выражение (11) расходится, или, иначе говоря, найденные поправки второго порядка малости становятся асимптотически непригодными. Такая ситуация в теории нелинейных осцилляций интерпретируется как резонансная и должна анализироваться отдельно, иными математическими методами [16–18]. С физической точки зрения наличие нелинейной резонансной ситуации означает, что в окрестности резонанса волна с частотой ω_n интенсивно обменивается энергией с двумя волнами с частотами ω_m и ω_l (в этом случае говорят о вторичном комбинационном резонансе) или при $m=l$ дважды взаимодействует с одной волной частоты $\omega_m = \omega_l$ (что интерпретируется как вырожденный резонанс) [16–18]. Ранее в [14] было показано, что в рассматриваемой системе при реализации вырожденного резонансного взаимодействия мод энергия перекачивается только из низших мод в более высокие. Во вторичных комбинационных резонансах энергия может переноситься в обоих направлениях: как от низких мод к высоким, так и обратно [16–18]. Единственное, что портит общую

картину в этом случае для заряженной капли, нелинейно осциллирующей в неподвижной диэлектрической среде (колебания которой анализировалась в [16–18]), так это невозможность во втором порядке малости по амплитуде осцилляций вовлечения в резонансный обмен энергиями основной моды ($n = 2$). Иначе говоря, для неподвижной заряженной капли, осциллирующей в диэлектрической среде, невозможно перекачать энергию из высоких мод в основную за счет вторичного комбинационного резонанса, поскольку соотношение $\omega_2^2 = (\omega_m \pm \omega_l)^2$ не выполняется ни для каких m и l . В случае же капли, движущейся относительно среды, частоты ее осцилляций определяются соотношением (11), т.е. дисперсионное соотношение содержит слагаемое, пропорциональное числу Вебера We , и вследствие этого появляется возможность резонансной раскачки основной моды. В самом деле введем обозначение

$$\Delta\omega_n^2 \equiv (\omega_m \pm \omega_l)^2 - \omega_n^2, \quad (12)$$

где $\Delta\omega_n^2 = \Delta\omega_n^2(m, l, n, W, We)$ и для различных значений n (для нескольких первых мод, в которые перекачивается энергия из более высоких мод) построим зависимости $\Delta\omega_n^2 = \Delta\omega_n^2(m, l)$, пересеченные плоскостью $\Delta\omega_n^2 = 0$, при фиксированных значениях параметров Рэлея W и Вебера We (рис. 1). Аналогично построим зависимости $\Delta\omega_n^2 = \Delta\omega_n^2(W, We)$ при фиксированных парах значений номеров мод m и l , определяющих начальную деформацию (рис. 2). На приведенных рисунках условия резонансного обмена энергией строго выполняются на прямых, по которым пересекаются поверхности. Зависимости $\Delta\omega_n^2 = \Delta\omega_n^2(m, l)$ для второй, третьей и четвертой мод, проиллюстрированные рис. 1, a – c , указывают на широкие возможности перекачки энергии из высоких мод в низкие. Тем не менее следует указать, что на прямых, по которым пересекаются поверхности на рис. 1, только конечное количество точек соответствует целочисленным значениям номеров мод m и l (при построении рис. 1 дискретные переменные m и l условно приняты меняющимися непрерывно). Остальные точки прямых пересечения поверхностей лишь указывают на близость к положениям точных резонансов. Но само нелинейное внутреннее резонансное взаимодействие мод малочувствительно к малым отклонениям определяющих физических параметров от значений, соответствующих положениям точных резонансов [17–18,23]. Сказанное означает, что резонансное взаимодействие мод будет иметь место и в некоторых окрестностях геометрического места точек, составляющих прямые на рис. 1 и 2, только его интенсивность (доля передаваемой резонансным образом энергии и характерное время нахождения переданной энергии в раскочиваемой низкой моде) будет несколько меньшей [17,23].

Согласно проведенным расчетам, основная мода строго резонансно взаимодействует только с третьей модой при условии, что и основная, и третья мода присутствуют в спектре мод, определяющих начальную деформацию

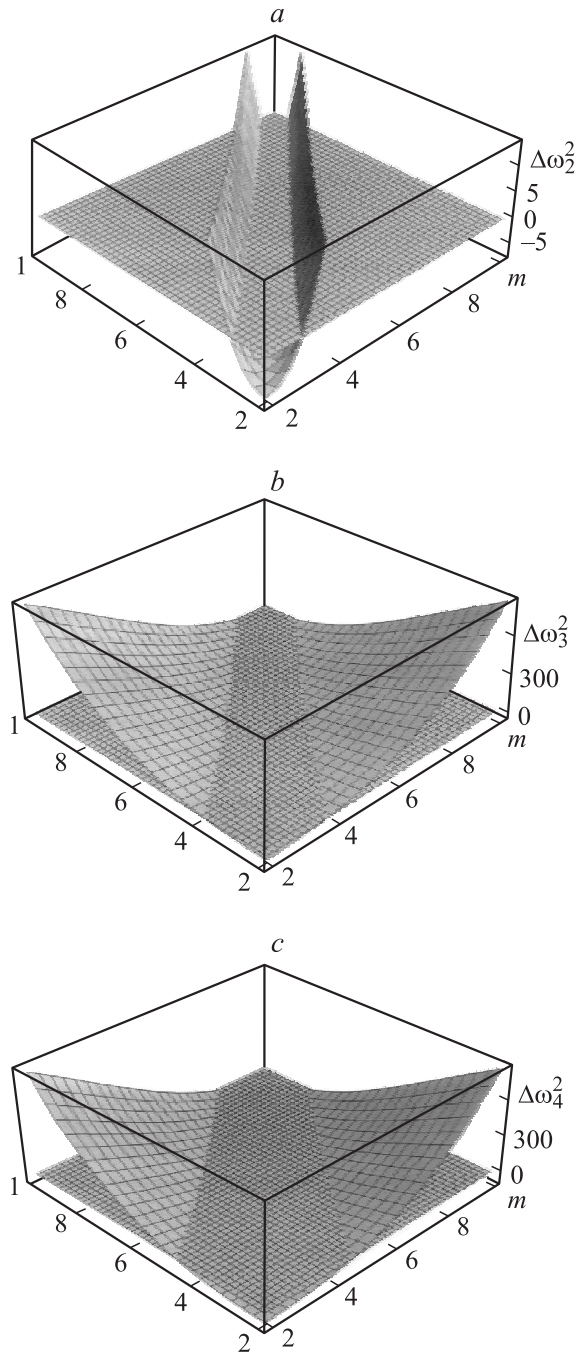


Рис. 1. Зависимость от номеров мод m и l величины квадратичной формы $\Delta\omega_n^2$, определенной соотношением (12), пересеченная плоскостью $\Delta\omega_n^{(2)} = 0$ при $W = 0.1$ и $We = 0.001$; $n = 2$ (a), 3 (b), 4 (c).

цию (именно эта ситуация проиллюстрирована рис. 2, a). Как видно из рис. 2, a, точные значения параметров Рэлея и Вебера, при которых реализуется резонансное взаимодействие, измеряются десятками доли единицы и несколько превышают принятые при модельном расчете, которые были оценены исходя из параметров облачной капли радиусом $100 \mu\text{m}$. Чтобы согласовать результаты проведенного анализа с реалиями грозово-

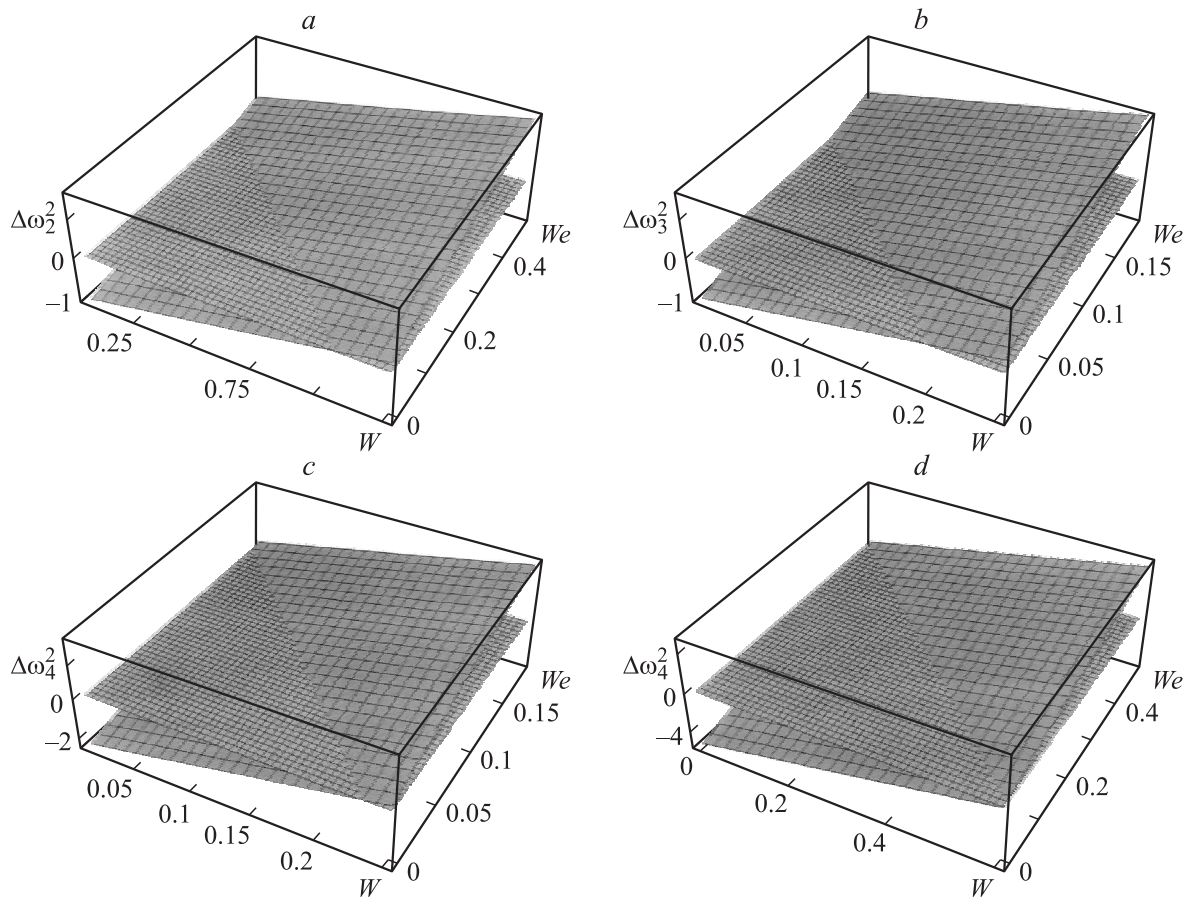


Рис. 2. Зависимость от величин параметров Рэлея W и Вебера We величины квадратичной формы $\Delta\omega_n^2$, определенной соотношением (12), пересеченная плоскостью $\Delta\omega_n^2 = 0$. *a* — $n = 2, m = 2, l = 3$; *b* — $n = 3, m = 12, l = 13$; *c* — $n = 4, m = 30, l = 31$; *d* — $n = 4, m = 6, l = 8$.

го облака можно использовать следующие аргументы: а) можно увеличить радиус капли, что приведет к увеличению скорости ее падения, величины параметра Вебера и к приближению его значения к данным рис. 1, *a*; б) можно принять во внимание слабую зависимость частоты осцилляций от величин параметров Рэлея и Вебера при малых их значениях и учесть вышесказанное о малой чувствительности резонансного взаимодействия к незначительным отклонениям определяющих физических параметров от точных резонансных значений. Можно также скомбинировать первый и второй подходы. Во всяком случае из сказанного следует, что параметры крупных капель в грозовых облаках ($W \sim 0.1, We \leq 0.5$) таковы, что в каплях возможна перекачка энергии из возбужденной третьей моды осцилляций в возбужденную вторую моду. Более конкретное и детальное исследование резонансной перекачки энергии между указанными модами требует отдельного рассмотрения. Пока же можно считать установленным факт возможности перекачки энергии из третьей моды во вторую. Энергия же третьей моды может восполняться за счет резонансной перекачки энергии из более высоких мод (рис. 1, *b*).

Расчеты показывают, что по сравнению со второй модой третья мода может резонансно обмениваться энергией уже с существенно большим количеством высоких мод: от четвертой до тринадцатой. Однако наименьшим значением параметров Рэлея и Вебера (малось зарядов капель и скоростей их движения, характеризуемых параметрами Рэлея и Вебера, является необходимым условием для согласования результатов проводимых модельных расчетов с условиями грозового облака) соответствует ее резонансное взаимодействие с двенадцатой и тринадцатой модами (рис. 2, *b*). Для четвертой моды спектр резонансно с ней связанных мод еще более расширяется (от пятой до тридцать первой), но оптимальными возможностями в смысле малости параметров Рэлея и Вебера обладает показанное на рис. 2, *c* ее взаимодействие с тридцатой и тридцать первой модами.

На рис. 2, *a–c* рассмотрены ситуации резонансного взаимодействия n -й моды с двумя соседними модами m - и l -й ($|l - m| = 1$) с более высокими, чем n , номерами. С увеличением номера n расширяются возможности разброса номеров m - и l -й мод, связанных резонансным

взаимодействием с n -й модой. Рис. 2, d иллюстрирует такую возможность для номеров $n = 4$, $m = 6$, $l = 8$.

С ростом номера n моды, принимающей энергию от более высоких m - и l -й, увеличивается и количество номеров мод m и l , связанных с n -й резонансным взаимодействием. В итоге складывается следующая возможная картина резонансного переноса энергии между модами: в основную моду энергия поступает из третьей, в третью моду энергия поступает из мод с четвертой по тринадцатую, в четвертую моду из мод с пятой по тридцать первую и т.д. Можно предположить, что в движущейся относительно среды нелинейно-осциллирующей заряженной капле существует направленный к основной моде поток энергии из спектра более высоких мод, обязанный своим существованием вторичному комбинационному резонансному взаимодействию мод. Результатом переноса энергии из высоких мод (которые регулярно возбуждаются за счет столкновения рассматриваемой крупной капли с более мелкими и медленнее движущимися в облаке капельками) в основную будет раскачка амплитуды осцилляций основной моды до наблюдаемой в натуральных условиях величины (сравнимой с радиусом капли [19–20]). Следует, однако, отметить, что одновременно в капле будет существовать встречный поток энергии из низших мод в более высокие, поддерживаемый вырожденным резонансным взаимодействием мод. Физические закономерности взаимодействия этих встречных потоков энергии в рассматриваемой колебательной системе не очевидны и должны составить предмет отдельного исследования.

Проведенное исследование положений внутренних нелинейных резонансов в заряженной капле идеальной несжимаемой жидкости, ламинарно обдуваемой потоком идеальной несжимаемой диэлектрической среды малой плотности, на нелинейной стадии осуществлено в пренебрежении взаимодействием мод на тангенциальном скачке поля скоростей на границе раздела сред, а функция неоднородности (7) выписывалась в нулевом приближении по параметрам We , ρ и $\sqrt{\rho We}$. Если отказаться от этих предположений, то в решении задачи появятся дополнительные слагаемые первого и второго порядков малости по We , ρ и $\sqrt{\rho We}$, но резонансные слагаемые в решении сохранятся. Учет взаимодействия мод на тангенциальном разрыве поля скоростей приведет к появлению квадратичных по We , ρ и $\sqrt{\rho We}$ поправок к точным положениям резонансов, но основные выводы данной работы сохранятся неизменными.

Заключение

Наличие относительного движения заряженной капли и среды приводит к существенному расширению спектра внутренних нелинейных резонансов, реализующихся в нелинейно-осциллирующей капле. В крупной заряженной капле в грозном облаке принципиально возможен резонансный перенос энергии из высоких мод осцилляций

в основную, реализующийся уже во втором порядке малости по амплитуде деформации и приводящий к раскачке сфероидальных осцилляций капли, наблюдаемых в естественных условиях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

- [1] Гонор А.Л., Ривкин В.Я. // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 17. М.: ВИНТИ, 1982. С. 98–159.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [3] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–27.
- [4] Дячук В.А., Мучник В.М. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [5] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
- [7] Ширяева С.О., Волкова М.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 36–44.
- [8] Облака и облачная атмосфера. Справочник / И.П. Мазин, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитов. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
- [9] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 41–47.
- [10] Коромыслов В.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 9. С. 21–28.
- [11] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 24–26.
- [12] Григорьев А.И., Голованов А.С. // ПЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 20. С. 13–18.
- [13] Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 23–31.
- [14] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Волкова М.В. // ЭОМ. 2004. № 4. С. 25–31.
- [15] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
- [16] Ширяева С.О., Жаров А.Н., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 10–20.
- [17] Рыбакова М.В., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 4–31.
- [18] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 19–26.
- [19] Beard K.V. // Radio Sci. 1984. Vol. 19. N 1. P. 67–74.
- [20] Beard K.V. // Rev. Geophys. 1987. Vol. 25. N 3. P. 357–370.
- [21] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.
- [22] Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. М.: Гидрометеоздат, 1983. 160 с.
- [23] Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 45–52.