

01;03

Аналитическое исследование нелинейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 29 марта 2005 г.)

Путем прямого разложения по амплитуде многомодовой начальной деформации равновесной сферической формы капли во втором порядке малости найдена форма образующей нелинейно осциллирующей заряженной капли вязкой несжимаемой электропроводной жидкости. Обнаружен ранее неизвестный в теории нелинейного взаимодействия факт постепенного (в течение нескольких периодов осцилляций) передачи энергии из изначально возбужденной моды капли маловязкой жидкости в моду, возбуждающуюся только за счет нелинейного взаимодействия. Оказалось, что при реализации неустойчивости вязкой капли с зарядом, немного превышающим критическое по Рэлею значение, независимо от вида начальной деформации капли за характерное время, определяющееся декрементами затухания изначально возбужденных мод, неустойчивая капля принимает вытянутую сфероидальную форму за счет вязкого затухания всех мод, кроме основной, а дальнейшая временная эволюция капли определяется именно основной модой. Выяснилось, что в сильновязкой капле скорость нарастания амплитуды неустойчивой основной моды не увеличивается непрерывно со временем, как предсказывается нелинейным анализом в модели идеальной жидкости, а в начале уменьшается до некоторого мало отличающегося от нуля значения, определяющегося степенью закритичности заряда и вязкостью жидкости, затем некоторое время остается неизменно малой (так что амплитуда неустойчивой моды практически не меняется со временем) и лишь потом начинает возрастать.

1. Исследования нелинейных осцилляций заряженных капель начались около двух десятилетий назад, их библиография насчитывает уже более полусотни работ, но все проведенные к настоящему времени аналитические исследования выполнены лишь в приближении идеальной жидкости [1–4]. Проведенные исследования нелинейных осцилляций капель вязкой жидкости выполнены лишь численными методами (см., например, [5,6]), что существенно ограничивает как гносеологическую, так и прогностическую их ценность (независимо от степени их корректности и использованных численных методов). Очевидная причина такого положения — значительная громоздкость аналитических расчетов нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости. Тем не менее результаты анализа временной эволюции деформированной в начальный момент времени капли вязкой жидкости, проведенного в [4] в линейном по амплитуде начальной деформации приближении, дают основания полагать, что нелинейные осцилляции заряженной капли вязкой жидкости вполне доступны для аналитического расчета в рамках асимптотических методов. Этой проблеме и посвящено настоящее рассмотрение.

2. Пусть имеется сферическая капля радиуса r_0 идеально проводящей несжимаемой вязкой электропроводной жидкости с плотностью ρ , коэффициентами кинематической вязкости ν и поверхностного натяжения σ , несущая электрический заряд Q . Поле скоростей течения жидкости в капле обозначим $\mathbf{U}(r, \vartheta, t)$, поле давлений — $p(r, \vartheta, t)$, потенциалы электрического поля в окрестности капли и на ее поверхности обозначим $\phi(r, \vartheta, t)$ и $\phi_s(t)$ соответственно. Уравнение поверхности капли, совершающей осесимметричные колебания в лю-

бой момент времени t , запишем в сферической системе координат r, ϑ, φ в виде

$$F(r, \vartheta, t) \equiv r - r_0 - \xi(\vartheta, t) = 0. \quad (1)$$

Начальную деформацию капли зададим в виде суперпозиции мод

$$t = 0 : \quad \xi(\vartheta) = \varepsilon \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu);$$

$$\sum_{m \in \Omega} h_m = 1; \quad \mu \equiv \cos \vartheta; \quad (2)$$

где ε — малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения; $P_m(\mu)$ — полином Лежандра порядка m ; Ω — множество индексов мод, суперпозиция которых определяет начальную деформацию равновесной сферической формы капли.

Математическая формулировка задачи о расчете нелинейных осесимметричных капиллярных колебаний такой капли, форма которой в начальный момент времени определяется (1), (2), имеет вид

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad \text{div} \mathbf{U} = 0; \quad \Delta \phi = 0;$$

$$t = 0 : \quad \mathbf{U} = 0; \quad r \rightarrow 0 : \quad \mathbf{U} < \infty;$$

$$r \rightarrow +\infty : \quad \nabla \phi \rightarrow 0; \quad r = r_0 + \xi(\vartheta, t) : \quad \phi = \phi_s(t);$$

$$r = r_0 + \xi(\vartheta, t) : \quad \partial_t F + (\mathbf{U} \cdot \nabla) F = 0;$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0;$$

$$-p + 2\rho\nu\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{U} - \frac{1}{8\pi} (\nabla\phi)^2 + \sigma\operatorname{div}\mathbf{n} = 0;$$

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla\phi dS = -4\pi Q;$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi | r = r_0 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\int_V r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{3} r_0^3;$$

$$V = \{r, \vartheta, \varphi | 0 \leq r \leq r_0 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\int_V \mathbf{r} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = 0, \quad (3)$$

∂_t означает частную производную по переменной t ; $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} — орты касательной и внешней нормали к свободной поверхности капли, определяемой соотношением (1).

3. Выписанная система уравнений является нелинейной, и ее решение будем искать методом прямого разложения по малому параметру ε , для чего все искомые величины представим в виде асимптотических разложений по ε

$$\xi(\vartheta, t) = \varepsilon\xi^{(1)}(\vartheta, t) + \varepsilon^2\xi^{(2)}(\vartheta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\mathbf{U}(r, \vartheta, t) = \varepsilon U_r^{(1)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_r + \varepsilon^2 U_r^{(2)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_r + \varepsilon U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_\vartheta + \varepsilon^2 U_\vartheta^{(2)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_\vartheta + O(\varepsilon^3);$$

$$p(r, \vartheta, t) = p^{(0)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon p^{(1)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon^2 p^{(2)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\phi(r, \vartheta, t) = \phi^{(0)}(r, t) + \varepsilon\phi^{(1)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon^2\phi^{(2)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\phi_S(t) = \phi_S^{(0)}(t) + \varepsilon\phi_S^{(1)}(t) + \varepsilon^2\phi_S^{(2)}(t) + O(\varepsilon^3), \quad (4)$$

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta$ — орты сферической системы координат.

Подставляя данные разложения в выписанную систему уравнений и приравнивая коэффициенты при различных степенях малого параметра ε , разделим исходную нелинейную задачу на совокупность связанных между собой линейных неоднородных задач.

а) В нулевом порядке малости получим задачу

$$\Delta\phi^{(0)} = 0; \quad r \rightarrow +\infty: \quad \nabla\phi^{(0)} \rightarrow 0;$$

$$r = r_0: \quad \phi^{(0)} = \phi_S^{(0)}(t);$$

$$-p^{(0)} - p_Q^{(0)} + p_\sigma^{(0)} = 0; \quad \int_{-1}^1 r_0^2 \partial_r \phi^{(0)} d(\cos \vartheta) = -2Q;$$

решение которой имеет вид

$$\phi^{(0)} = \frac{Q}{r}; \quad \phi_S^{(0)} = \frac{Q}{r_0}; \quad p^{(0)} + \frac{Q^2}{8\pi r_0^4} = \frac{2\sigma}{r_0}. \quad (5)$$

б) Собирая слагаемые, содержащие малый параметр в первой степени и учитывая векторное тождество

$$\Delta\mathbf{U} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{U}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{U}), \quad (6)$$

выделим задачу первого порядка малости

$$\partial_t U_r^{(1)} = -\frac{1}{\rho} \partial_r p^{(1)} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta} U_r^{(1)} + \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta)}{r^2} \partial_\vartheta U_r^{(1)} - \frac{1}{r} \partial_{r\vartheta} U_\vartheta^{(1)} - \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta)}{r} \partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta} U_\vartheta^{(1)} - \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta)}{r^2} U_\vartheta^{(1)} \right);$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(1)} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \partial_\vartheta p^{(1)} + \nu \left(\partial_{rr} U_\vartheta^{(1)} + \frac{2}{r} \partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r} \partial_{r\vartheta} U_r^{(1)} \right);$$

$$\partial_r U_r^{(1)} + \frac{2}{r} U_r^{(1)} + \frac{1}{r} \partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} + \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta)}{r} U_\vartheta^{(1)} = 0;$$

$$t = 0: \quad \mathbf{U}^{(1)} = 0; \quad \xi^{(1)} = \varepsilon \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu);$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{U}^{(1)} < \infty;$$

$$\Delta\phi^{(1)} = 0; \quad r \rightarrow +\infty: \quad \nabla\phi^{(1)} \rightarrow 0;$$

$$r = r_0: \quad \phi^{(1)} + \xi^{(1)} \partial_r \phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t);$$

$$\int_{-1}^1 \left(r_0 \partial_r \phi^{(1)} + \xi^{(1)} (r_0 \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2\partial_r \phi^{(0)}) \right) d(\mu) = 0;$$

$$\int_{-1}^1 \xi^{(1)} d(\mu) = 0; \quad \int_{-1}^1 \xi^{(1)} P_1(\mu) d(\mu) = 0;$$

$$\partial_r \xi^{(1)} = U_r^{(1)}; \quad \partial_r U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r} \partial_\vartheta U_r^{(1)} - \frac{1}{r} U_\vartheta^{(1)} = 0;$$

$$-p^{(1)} + 2\rho\nu \partial_r U_r^{(1)} - \frac{1}{4\pi} \partial_r \phi^{(0)} (\partial_r \phi^{(1)} + \xi^{(1)} \partial_{rr} \phi^{(0)})$$

$$- \frac{\sigma}{r_0^2} (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} = 0, \quad (7)$$

где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Решение системы (7) с учетом (5) можно представить в виде [4]

$$\xi^{(1)}(\vartheta, t) = \sum_{n \in \Omega} \xi_n^{(1)}(t) P_n(\mu);$$

$$U_r^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n \in \Omega} U_{rn}^{(1)}(r, t) P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n \in \Omega} U_{\vartheta n}^{(1)}(r, t) \partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$p^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n \in \Omega} p_n^{(1)}(r, t) P_n(\mu);$$

$$\phi^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n \in \Omega} \phi_n^{(1)}(r, t) P_n(\mu); \quad (8)$$

где

$$\xi_n^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{\xi n}^{(j)} (S_n^{(j)}) \exp(S_n^{(j)} t);$$

$$\phi_n^{(1)}(r, t) = \frac{Q}{r_0^2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} \xi_n^{(1)}(t);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(a_n(S_n^{(j)}) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} + b_n(S_n^{(j)}) \frac{1}{r} \frac{j_n(\chi_n^{(j)} r)}{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)} \right) \exp(S_n^{(j)} t);$$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(a_n(S_n^{(j)}) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} + b_n(S_n^{(j)}) \left(\frac{1}{r} \frac{j_n(\chi_n^{(j)} r)}{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)} + \frac{\chi_n^{(j)}}{n+1} \frac{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r)}{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)} \right) \right) \frac{\exp(S_n^{(j)} t)}{n};$$

$$a_{\xi n}(S_n^{(j)}) = \left(S_n^{(j)} + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{r_0^2} + 2(n-1)^2(n+1) \frac{\nu}{\eta_n(1, \chi_n^{(j)}) r_0^2} \right) \frac{h_n}{\partial_{S_n^{(j)}} D_n(S_n^{(j)})};$$

$$a_n(S_n^{(j)}) = \left((2(n^2-1) + (r_0 \chi_n^{(j)})^2) \frac{1}{2 \chi_n^{(j)} r_0} \frac{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)} - 1 \right) \times \frac{h_n}{\eta_n(1, \chi_n^{(j)})} \frac{\omega_n^2}{\partial_{S_n^{(j)}} D_n(S_n^{(j)})};$$

$$b_n(S_n^{(j)}) = 2(n^2-1) \times \left(1 - \frac{2}{\chi_n^{(j)} r_0} \frac{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)} \right)^{-1} \frac{h_n \omega_n^2 \nu}{r_0 S_n^{(j)} \partial_{S_n^{(j)}} D_n(S_n^{(j)})};$$

$$\chi_n^{(j)} = \sqrt{\frac{S_n^{(j)}}{\nu}};$$

$$\partial_{S_n^{(j)}} D_n(S_n^{(j)}) = 2S_n^{(j)} + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{r_0^2} + (n-1)^2(n+1) \frac{\nu}{r_0^2} \left(2 + \frac{(2n+1)\chi_n^{(j)} r_0}{2} \frac{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)} + \frac{(\chi_n^{(j)} r_0)^2}{2} \left(1 - \left(\frac{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)} \right)^2 \right) \right) \frac{1}{\eta_n(1, \chi_n^{(j)})};$$

$$D_n(S_n^{(j)}) = (S_n^{(j)})^2 + 2(n-1)(2n+1) \frac{S_n^{(j)}}{r_0^2} + 2(n-1)^2(n+1) \frac{S_n^{(j)} \nu}{\eta_n(1, \chi_n^{(j)}) r_0^2} + \omega_n^2;$$

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho r_0^3} n(n-1)(n+2-W); \quad W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma r_0^3};$$

$$\eta_n(\tau, \chi_n^{(j)}) = \tau - \frac{r_0 \chi_n^{(j)}}{2} \frac{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)},$$

$S_n^{(j)}$ — корень дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(j)}) = 0$, а $j_n(\chi_n^{(j)} r_0)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода порядка n .

в) Во втором порядке малости получим задачу

$$\partial_t U_r^{(2)} + U_r^{(1)} \partial_r U_r^{(1)} + \frac{1}{r} U_{\vartheta}^{(1)} \partial_{\vartheta} U_r^{(1)} - \frac{1}{r} (U_{\vartheta}^{(1)})^2 = -\frac{1}{\rho} \partial_r p^{(2)} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta} U_r^{(2)} + \frac{\text{ctg}(\vartheta)}{r^2} \partial_{\vartheta} U_r^{(2)} - \frac{1}{r} \partial_{r\vartheta} U_{\vartheta}^{(2)} - \frac{\text{ctg}(\vartheta)}{r} \partial_r U_{\vartheta}^{(2)} - \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta} U_{\vartheta}^{(2)} - \frac{\text{ctg}(\vartheta)}{r^2} U_{\vartheta}^{(2)} \right);$$

$$\partial_t U_{\vartheta}^{(2)} + U_r^{(1)} \partial_r U_{\vartheta}^{(1)} + \frac{1}{r} U_{\vartheta}^{(1)} \partial_{\vartheta} U_{\vartheta}^{(1)} + \frac{1}{r} U_r^{(1)} U_{\vartheta}^{(1)} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \partial_{\vartheta} p^{(2)} + \nu \left(\partial_{rr} U_{\vartheta}^{(2)} + \frac{2}{r} \partial_r U_{\vartheta}^{(2)} - \frac{1}{r} \partial_{r\vartheta} U_r^{(2)} \right);$$

$$\partial_r U_r^{(2)} + \frac{2}{r} U_r^{(2)} + \frac{1}{r} \partial_{\vartheta} U_{\vartheta}^{(2)} + \frac{\text{ctg}(\vartheta)}{r} U_{\vartheta}^{(2)} = 0.$$

$$t = 0: \quad \mathbf{U}^{(2)} = 0;$$

$$\xi^{(2)} = -\frac{1}{r_0} \sum_{m \in \Omega} \frac{h_m^2}{2m+1} P_0(\mu) - \frac{9}{r_0} \sum_{m \in \Omega} \frac{(m+1)h_m h_{m+1}}{(2m+1)(2m+3)} P_1(\mu);$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{U}^{(2)} < \infty;$$

$$\Delta \phi^{(2)} = 0; \quad r \rightarrow +\infty: \quad \nabla \phi^{(2)} \rightarrow 0;$$

$$r = r_0: \quad \phi^{(2)} + \xi^{(2)} \partial_r \phi^{(0)} + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \partial_{rr} \phi^{(0)} + \xi^{(1)} \partial_r \phi^{(1)} = \phi_s^{(2)}(t);$$

$$\int_{-1}^1 \left[r_0^2 \partial_r \phi^{(2)} + r_0 \xi^{(1)} (r_0 \partial_{rr} \phi^{(1)} + 2 \partial_r \phi^{(1)}) + r_0 \xi^{(2)} (r_0 \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2 \partial_r \phi^{(0)}) + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{1}{2} r_0^2 \partial_{rrr} \phi^{(0)} + 2 r_0 \partial_{rr} \phi^{(0)} + \partial_r \phi^{(0)} \right) - \partial_{\vartheta} \xi^{(1)} \partial_{\vartheta} \phi^{(1)} \right] d(\mu) = 0;$$

$$\int_{-1}^1 (r_0 \xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2) d(\mu) = 0;$$

$$\int_{-1}^1 (2 r_0 \xi^{(2)} + 3 (\xi^{(1)})^2) P_1(\mu) d(\mu) = 0;$$

$$-\partial_r \xi^{(2)} + U_r^{(2)} + \partial_r U_r^{(1)} \xi^{(1)} - \frac{1}{r_0} U_{\vartheta}^{(1)} \partial_{\vartheta} \xi^{(1)} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r_0} \partial_\vartheta U_r^{(2)} + \partial_r U_\vartheta^{(2)} - \frac{1}{r_0} U_\vartheta^{(2)} + \left(\frac{1}{r_0} \partial_{r\vartheta} U_r^{(1)} \right. \\
& - \frac{1}{r_0^2} \partial_\vartheta U_r^{(1)} + \partial_{rr} U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r_0} \partial_r U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r_0^2} U_\vartheta^{(1)} \Big) \xi^{(1)} \\
& - 2 \left(\frac{1}{r_0^2} \partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r_0^2} U_r^{(1)} - \frac{1}{r_0} \partial_r U_r^{(1)} \right) \partial_\vartheta \xi^{(1)} = 0; \\
& - p^{(2)} - \frac{\sigma}{r_0^2} (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(2)} + \frac{2\sigma}{r_0^3} \xi^{(1)} (1 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} \\
& - \frac{1}{8\pi} \left[2\xi^{(2)} \partial_{rr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(0)} + (\xi^{(1)})^2 ((\partial_{rr} \phi^{(0)})^2 \right. \\
& + \partial_{rrr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(0)}) + \frac{1}{r_0^2} (\partial_\vartheta \phi^{(1)})^2 + (\partial_r \phi^{(1)})^2 \\
& + 2\partial_r \phi^{(2)} \partial_r \phi^{(0)} + 2\xi^{(1)} (\partial_{rr} \phi^{(0)} \partial_r \phi^{(1)} + \partial_{rr} \phi^{(1)} \partial_r \phi^{(0)}) \Big] \\
& + 2\rho v \partial_r U_r^{(2)} - (\partial_r p^{(1)} - 2\rho v \partial_{rr} U_r^{(1)}) \xi^{(1)} \\
& - 2\rho v \left(\frac{1}{r_0^2} \partial_\vartheta U_r^{(1)} + \frac{1}{r_0} \partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r_0^2} U_\vartheta^{(1)} \right) \partial_\vartheta \xi^{(1)} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Подставим в систему (9) решения (5) и (8) задач нулевого и первого порядков малости и получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно величин $U_r^{(2)}$, $U_\vartheta^{(2)}$, $p^{(2)}$, $\xi^{(2)}$, $\phi^{(2)}$.

Для решения полученной системы выполним преобразования Лапласа по времени

$$\begin{aligned}
f(S) &= \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-St) dt = \mathfrak{J}[f(t)]; \\
f &= \{U_r^{(2)}; U_\vartheta^{(2)}; p^{(2)}; \xi^{(2)}; \phi^{(2)}\}.
\end{aligned}$$

Изображения Лапласа величин второго порядка малости разложим в ряды по полиномам Лежандра (в силу осесимметричности задачи) и по их первым производным по полярному углу [4,7]

$$\begin{aligned}
U_r^{(2)}(r, \vartheta, S) &= \sum_{n=0}^{+\infty} U_{rn}^{(2)}(r, S) P_n(\mu); \\
U_\vartheta^{(2)}(r, \vartheta, S) &= \sum_{n=1}^{+\infty} U_{\vartheta n}^{(2)}(r, S) \partial_\vartheta P_n(\mu); \\
\xi^{(2)}(\vartheta, S) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n^{(2)}(S) P_n(\mu); \\
\phi^{(2)}(r, \vartheta, S) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^{(2)}(r, S) P_n(\mu); \\
p^{(2)}(r, \vartheta, S) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n^{(2)}(r, S) P_n(\mu).
\end{aligned} \tag{10}$$

Учтем, что в первом порядке малости проекции поля скоростей жидкости на орты сферической системы коор-

динат связаны уравнением неразрывности

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r, t) = \frac{r}{n(n+1)} \left(\partial_r U_{rn}^{(1)}(r, t) + \frac{2}{r} U_{rn}^{(1)}(r, t) \right).$$

Тогда система (9) примет вид

$$\begin{aligned}
SU_{rn}^{(2)}(r, S) &= \sum_{k,m \in \Omega} \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)m(m+1)} r \mathfrak{J} \\
&\times [\partial_r U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\
&+ \sum_{k,m \in \Omega} \left(K_{kmn} + \frac{(k^2 + k - 4)\alpha_{kmn}}{k(k+1)m(m+1)} \right) \\
&\times \mathfrak{J} [U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\
&+ \sum_{k,m \in \Omega} \frac{2(m-1)(m+2)\alpha_{kmn}}{k(k+1)m(m+1)} \frac{1}{r} \mathfrak{J} [U_{rk}^{(1)}(r, t) U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\
&= -\frac{1}{\rho} \partial_r p_n^{(2)}(r, S) + n(n+1) \frac{\nu}{r} \left(\partial_r U_{\vartheta n}^{(2)}(r, S) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{r} U_{\vartheta n}^{(2)}(r, S) - \frac{1}{r} U_{rn}^{(2)}(r, S) \right); \quad n \geq 0;
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
SU_{\vartheta n}^{(2)}(r, S) &+ \sum_{k,m \in \Omega} \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} r \mathfrak{J} [U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\
&+ \sum_{k,m \in \Omega} \frac{\alpha_{kmn}}{2k(k+1)m(m+1)} r \mathfrak{J} [\partial_r U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\
&+ \sum_{k,m \in \Omega} \frac{2}{m(m+1)} \left(2\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) \\
&\times \mathfrak{J} [U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\
&+ \sum_{k,m \in \Omega} \frac{2}{m(m+1)} \left(\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) \frac{1}{r} \mathfrak{J} \\
&\times [U_{rk}^{(1)}(r, t) U_{rm}^{(1)}(r, t)] = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} p_n^{(2)}(r, S) \\
&+ \nu \left(\partial_{rr} U_{\vartheta n}^{(2)}(r, S) + \frac{2}{r} \partial_r U_{\vartheta n}^{(2)}(r, S) - \frac{1}{r} \partial_r U_{rn}^{(2)}(r, S) \right); \\
&n \geq 1;
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\partial_r U_{rn}^{(2)}(r, S) + \frac{2}{r} U_{rn}^{(2)}(r, S) - \frac{n(n+1)}{r} U_{\vartheta n}^{(2)}(r, S) &= 0; \\
n &\geq 0;
\end{aligned} \tag{13}$$

$$r \rightarrow 0: \quad U_{rn}^{(2)} < \infty; \quad U_{\vartheta n}^{(2)} < \infty; \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{rr} \phi_n^{(2)}(r, S) + \frac{2}{r} \partial_r \phi_n^{(2)}(r, S) - n(n+1) \phi_n^{(2)}(r, S) &= 0; \\
n &\geq 0;
\end{aligned} \tag{15}$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \partial_r \phi_n^{(2)}(r, S) \rightarrow 0; \quad \phi_n^{(2)}(r, S) \rightarrow 0; \tag{16}$$

$$r = r_0 : \phi_n^{(2)}(r, S) - \frac{Q}{r_0^2} \xi_n^{(2)}(S) - \frac{Q}{r_0^3} \sum_{k,m \in \Omega} m K_{kmn} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] = \phi_S^{(2)}(S) \delta_{n0};$$

$$n \geq 0; \tag{17}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[r_0^2 \partial_r \phi_n^{(2)}(r, S) + \frac{Q}{r_0^2} \sum_{k,m \in \Omega} m(m+1) K_{kmn} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] - \frac{Q}{r_0^2} \sum_{k,m \in \Omega} \alpha_{kmn} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] \right] P_n(\mu) d(\mu) = 0; \tag{18}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(r_0 \xi_n^{(2)}(S) + \sum_{k,m \in \Omega} K_{kmn} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] \right) P_n(\mu) d(\mu) = 0; \tag{19}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(2r_0 \xi_n^{(2)}(S) + 3 \sum_{k,m \in \Omega} K_{kmn} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] \right) P_n(\mu) P_1(\mu) d(\mu) = 0; \tag{20}$$

$$-S \xi_n^{(2)}(S) - \frac{1}{r_0} \sum_{m \in \Omega} \frac{h_m^2}{2m+1} \delta_{n0} - \frac{9}{r_0} \times \sum_{m \in \Omega} \frac{(m+1)h_m h_{m+1}}{(2m+1)(2m+3)} \delta_{n1} + U_{rn}^{(2)}(r, S) + \sum_{k,m \in \Omega} \left(K_{kmn} - \frac{\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \right) \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] - \sum_{k,m \in \Omega} \frac{2\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \frac{1}{r_0} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) U_{rm}^{(1)}(r, t)] = 0;$$

$$n \geq 0; \tag{21}$$

$$\frac{1}{r_0} U_{rn}^{(2)}(r, S) + \partial_r U_{\partial n}^{(2)}(r, S) - \frac{1}{r_0} U_{\partial n}^{(2)}(r, S) + \sum_{k,m \in \Omega} \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} r_0 \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \partial_{rrr} U_{rm}^{(1)}(r, t)] + \sum_{k,m \in \Omega} \frac{3\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r, t)] + \sum_{k,m \in \Omega} \left(\Gamma_{kmn} + 2\Gamma_{mkn} - \frac{2\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} - \frac{2\Lambda_{kmn}}{m(m+1)} \right) \times \frac{1}{r_0} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)]$$

$$+ \sum_{k,m \in \Omega} \left(\frac{2\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} - \Gamma_{kmn} - 2\Gamma_{mkn} - \frac{4\Lambda_{kmn}}{m(m+1)} \right) \times \frac{1}{r_0^2} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) U_{rm}^{(1)}(r, t)] = 0; \quad n \geq 1; \tag{22}$$

$$- p_n^{(2)}(r, S) + \frac{\sigma}{r_0^2} (n-1)(n+2) \xi_n^{(2)}(S) - \frac{2\sigma}{r_0^3} \sum_{k,m \in \Omega} K_{kmn} (k(k+1) - 1) \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{2Q}{r_0^2} \partial_r \phi_n^{(2)}(r, S) + \frac{4Q^2}{r_0^5} \xi_n^{(2)}(S) - \frac{Q^2}{r_0^6} \sum_{k,m \in \Omega} \alpha_{kmn} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] - \frac{Q^2}{r_0^6} \sum_{k,m \in \Omega} (10 + (k+1)(m+1) - 2(m+1)(m+4)) \times K_{kmn} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] \right] + 2\rho\nu \partial_r U_{rn}^{(2)}(r, S) + 2\rho\nu \sum_{k,m \in \Omega} \left(K_{kmn} - \frac{\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \right) \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r, t)] - \sum_{k,m \in \Omega} K_{kmn} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \partial_r p_m^{(1)}(r, t)] - 2\rho\nu \frac{1}{r_0} \sum_{k,m \in \Omega} \frac{2\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] + 2\rho\nu \frac{1}{r_0^2} \sum_{k,m \in \Omega} \left(\frac{2\alpha_{kmn}}{m(m+1)} - \alpha_{kmn} \right) \times \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) U_{rm}^{(1)}(r, t)] = 0; \quad n \geq 0; \tag{23}$$

где коэффициенты K_{kmn} , α_{kmn} , Γ_{kmn} , Λ_{kmn} определены соотношениями

$$\alpha_{kmn} = -C_{k0m0}^{n0} \cdot C_{k(-1)m1}^{n0} \sqrt{k(k+1)m(m+1)};$$

$$K_{kmn} = (C_{k0m0}^{n0})^2; \quad \Gamma_{kmn} = \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{\alpha_{nmk}}{(2k+1)};$$

$$\Gamma_{kmn} + \Gamma_{mkn} = K_{kmn};$$

$$\Lambda_{kmn} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(-\frac{m^2}{2m+1} \alpha_{nkm} + \sum_{j=1}^{[m/2]} \alpha_{n,k,m-2j} \right);$$

$$\Lambda_{kmn} + \Lambda_{mkn} = \alpha_{kmn};$$

C_{k0m0}^{n0} , $C_{k(-1)m1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана.
 г) Решение системы (11)–(23) начнем с уравнений (19) и (20), откуда найдем выражение для коэффициентов $\xi_0^{(2)}(t)$ и $\xi_1^{(2)}(t)$.

$$\xi_0^{(2)}(t) = -\frac{1}{r_0} \sum_{m \in \Omega} \frac{1}{2m+1} (\xi_m^{(1)}(t))^2;$$

$$\xi_1^{(2)}(t) = -\frac{9}{r_0} \sum_{m \in \Omega} \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} \xi_m^{(1)}(t) \xi_{m+1}^{(1)}(t). \tag{24}$$

Из системы уравнений (15)–(18) найдем потенциал поверхности капли и потенциал электростатического поля в окрестности капли

$$\phi_S^{(2)}(t) = \frac{Q}{r_0^3} \sum_{m \in \Omega} \frac{m-1}{2m+1} (\xi_m^{(1)}(t))^2; \quad (25)$$

$$\phi_n^{(2)}(r, S) = 0; \quad n = 0;$$

$$\begin{aligned} \phi_n^{(2)}(r, S) &= \frac{Q}{r_0^2} \left(\xi_n^{(2)}(S) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{r_0} \sum_{k, m \in \Omega} m K_{km} \mathfrak{J}[\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1}; \\ &n \geq 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Из уравнения неразрывности (13) выразим проекцию скорости $U_{\partial n}^{(2)}(r, S)$

$$U_{\partial n}^{(2)}(r, S) = \frac{1}{n(n+1)} (r \partial_r U_{rn}^{(2)}(r, S) + 2U_{rn}^{(2)}(r, S)) \quad (27)$$

и подставим в (12), откуда получим

$$\begin{aligned} p_n^{(2)}(r, S) &= -\frac{\rho S}{n(n+1)} (r^2 \partial_r U_{rn}^{(2)}(r, S) + 2r U_{rn}^{(2)}(r, S)) \\ &+ \frac{\rho v}{n(n+1)} (r^2 \partial_{rrr} U_{rn}^{(2)}(r, S) + 6r \partial_{rr} U_{rn}^{(2)}(r, S) \\ &+ 6\partial_r U_{rn}^{(2)}(r, S)) - \rho v \partial_r U_{rn}^{(2)}(r, S) \\ &- \sum_{k, m \in \Omega} \frac{\rho \Gamma_{kmn}}{m(m+1)} r^2 \mathfrak{J}[U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\ &- \sum_{k, m \in \Omega} \frac{\rho \alpha_{kmn}}{2k(k+1)m(m+1)} r^2 \mathfrak{J}[\partial_r U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\ &- \sum_{k, m \in \Omega} \frac{2\rho}{m(m+1)} \left(2\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) r \\ &\times \mathfrak{J}[U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\ &- \sum_{k, m \in \Omega} \frac{2\rho}{m(m+1)} \left(\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) \\ &\times \mathfrak{J}[U_{rk}^{(1)}(r, t) U_{rm}^{(1)}(r, t)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Наконец подставляя выражения для $U_{\partial n}^{(2)}(r, S)$ и $p_n^{(2)}(r, S)$ в уравнение (11), получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка для отыскания функции $U_{rn}^{(2)}(r, S)$

$$\begin{aligned} &\left(\partial_{rr} + \frac{4}{r} \partial_r - \frac{(n-1)(n+2)}{r^2} \right) \\ &\times \left(\partial_{rr} + \frac{4}{r} \partial_r - \frac{(n-1)(n+2)}{r^2} - \frac{S}{v} \right) U_{rn}^{(2)}(r, S) \\ &= \frac{n(n+1)}{v} \sum_{k, m \in \Omega} f_{kmn}(r, S); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{kmn}(r, S) &= \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} \mathfrak{J}[U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_{rrr} U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\ &+ \frac{1}{m(m+1)} \left(\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) \mathfrak{J}[\partial_r U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\ &+ \frac{2}{m(m+1)} \left(3\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) \frac{1}{r} \mathfrak{J}[U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\ &+ \frac{4}{m(m+1)} \left(\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) \frac{1}{r} \mathfrak{J}[\partial_r U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] \\ &+ \left(\frac{6\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} + \frac{2\Gamma_{mkn}}{k(k+1)} - K_{kmn} - \frac{(k^2+k-10)\alpha_{kmn}}{k(k+1)m(m+1)} \right) \\ &\times \frac{1}{r^2} \mathfrak{J}[U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] - \frac{2\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \frac{(m-1)(m+2)}{m(m+1)} \\ &\times \frac{1}{r^3} \mathfrak{J}[U_{rk}^{(1)}(r, t) U_{rm}^{(1)}(r, t)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Однородное уравнение (29) имеет четыре линейно независимых решения [8]:

$$U_{rn}^{(2)}(r, S) = r^{n-1}; \quad U_{rn}^{(2)}(r, S) = \frac{1}{r^{n+2}};$$

$$U_{rn}^{(2)}(r, S) = \frac{1}{r} j_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{v}} r \right); \quad U_{rn}^{(2)}(r, S) = \frac{1}{r} y_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{v}} r \right), \quad (30)$$

где $j_n(z)$ и $y_n(z)$ — модифицированные сферические функции Бесселя первого и второго родов.

Определитель Вронского системы (30) записывается компактно

$$\begin{aligned} W \left(r^{n-1}, \frac{1}{r^{n+2}}, \frac{1}{r} j_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{v}} r \right), \frac{1}{r} y_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{v}} r \right) \right) \\ = (-1)^n \frac{(2n+1) S^{3/2}}{r^8 v^{3/2}}, \end{aligned}$$

а частное решение уравнения (29) можно выписать в виде

$$\begin{aligned} U_{rn}^{(2)(*)}(r, S) &= -\frac{1}{(2n+1) S} v r^{n-1} \int_0^r \frac{f(\tau)}{\tau^{n-2}} d\tau \\ &+ \frac{1}{(2n+1) S} \frac{v}{r^{n+2}} \int_0^r \tau^{n+3} f(\tau) d\tau \\ &+ (-1)^n \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{S}} \frac{1}{r} j_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{v}} r \right) \int_0^r \tau^3 y_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{v}} \tau \right) f(\tau) d\tau \\ &- (-1)^n \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{S}} \frac{1}{r} y_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{v}} r \right) \int_0^r \tau^3 j_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{v}} \tau \right) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, решение уравнения (29) с учетом условий ограниченности (14) будет иметь вид

$$U_{rn}^{(2)}(r, S) = A_n(S)r^{n-1} + B_n(S) \frac{1}{r} j_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r \right) + U_{rn}^{(2)*}(r, S), \quad (31)$$

где $A_n(S), B_n(S)$ — произвольные постоянные.

Подставляя (31) в (27) и (28), используя рекуррентное соотношение [8]

$$\partial_\chi j_n(\chi) = j_{n+1}(\chi) + \frac{n}{\chi} j_n(\chi); \quad \chi \equiv \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r, \quad (32)$$

найдем функции $U_{\partial n}^{(2)}(r, S)$ и $p_n^{(2)}(r, S)$

$$U_{\partial n}^{(2)}(r, S) = \frac{A_n(S)}{n} r^{n-1} + \frac{B_n(S)}{n(n+1)} \frac{1}{r} \left((n+1) j_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r \right) + \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r j_{n+1} \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r \right) \right) + \frac{1}{n(n+1)} (r \partial_r U_{rn}^{(2)*}(r, S) + 2U_{rn}^{(2)*}(r, S)); \quad (33)$$

$$p_n^{(2)}(r, S) = -A_n(S) \frac{S\rho}{n} r^n - \frac{\rho S}{n(n+1)} (r^2 \partial_r U_{rn}^{(2)*}(r, S) + 2r U_{rn}^{(2)*}(r, S)) + \frac{\rho \nu}{n(n+1)} \left(r^2 \partial_{rrr} U_{rn}^{(2)*}(r, S) + 6r \partial_{rr} U_{rn}^{(2)*}(r, S) + 6\partial_r U_{rn}^{(2)*}(r, S) \right) - \rho \nu \partial_r U_{rn}^{(2)*}(r, S) - \sum_{k,m \in \Omega} \frac{\rho \Gamma_{kmn}}{m(m+1)} r^2 \mathfrak{J} [U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r, t)] - \sum_{k,m \in \Omega} \frac{\rho \alpha_{kmn}}{2k(k+1)m(m+1)} r^2 \mathfrak{J} [\partial_r U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] - \sum_{k,m \in \Omega} \frac{2\rho}{m(m+1)} \left(2\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) \times r \mathfrak{J} [U_{rk}^{(1)}(r, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r, t)] - \sum_{k,m \in \Omega} \frac{2\rho}{m(m+1)} \times \left(\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) \mathfrak{J} [U_{rk}^{(1)}(r, t) U_{rm}^{(1)}(r, t)]. \quad (34)$$

д) Подставляя выражения (31)–(33) в граничные условия (21)–(23) и учитывая (26), (32) и рекуррентное соотношение [6]

$$\partial_\chi j_n(\chi) = j_{n-1}(\chi) - \frac{n+1}{\chi} j_n(\chi),$$

перепишем граничные условия (21)–(23) в виде

$$A_n(S)r_0^n + B_n(S)j_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r_0 \right) - Sr_0 \xi_n^{(2)}(S) = \sum_{m \in \Omega} \frac{h_m}{2m+1} \left(h_m \delta_{n0} + \frac{9(m+1)}{2m+3} h_{m+1} \delta_{n1} \right) - r_0 U_{rn}^{(2)*}(r_0, S) - \sum_{k,m \in \Omega} \left(K_{kmn} - \frac{\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \right) \times r_0 \mathfrak{J} [\xi_k^{(1)}(t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r_0, t)] + \sum_{k,m \in \Omega} \frac{2\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \times \mathfrak{J} [\xi_k^{(1)}(t) U_{rm}^{(1)}(r_0, t)]; \quad n \geq 0; \quad (35)$$

$$2 \frac{n-1}{n} A_n(S)r_0^n + \frac{B_n(S)}{n(n+1)} \left(\left(2(n^2-1) + \frac{S}{\nu} r_0^2 \right) \times j_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r_0 \right) - 2 \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r_0 j_{n+1} \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r_0 \right) \right) = -\frac{r_0}{n(n+1)} (r_0^2 \partial_{rr} U_{rn}^{(2)*}(r_0, S) + 2r_0 \partial_r U_{rn}^{(2)*}(r_0, S) + (n-1)(n+2)U_{rn}^{(2)*}(r_0, S)) - \sum_{k,m \in \Omega} \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} \times r_0^2 \mathfrak{J} [\xi_k^{(1)}(t) (r_0 \partial_{rrr} U_{rm}^{(1)}(r_0, t) + 3\partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r_0, t))] - \sum_{k,m \in \Omega} \left(\Gamma_{kmn} + 2\Gamma_{mkn} - \frac{2\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} - \frac{2\Lambda_{kmn}}{m(m+1)} \right) \times r_0 \mathfrak{J} [\xi_k^{(1)}(t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r_0, t)] - \sum_{k,m \in \Omega} \left(\frac{2\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} - \Gamma_{kmn} - 2\Gamma_{mkn} - \frac{4\Lambda_{kmn}}{m(m+1)} \right) \mathfrak{J} [\xi_k^{(1)}(t) U_{rm}^{(1)}(r_0, t)]; \quad n \geq 1; \quad (36)$$

$$A_n(S)r_0^n \left(\frac{S}{n} + \frac{2\nu}{r_0^2} (n-1) \right) + \frac{2\nu}{r_0^2} B_n(S) \left((n-1)j_n \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r_0 \right) + r_0 \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} j_{n+1} \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\nu}} r_0 \right) \right) + \frac{r_0 \omega_n^2}{n} \xi_n^{(2)}(S) = -\frac{Sr_0}{n(n+1)} \left(r_0 \partial_r U_{rn}^{(2)*}(r_0, S) + 2U_{rn}^{(2)*}(r_0, S) \right) + \frac{\nu}{n(n+1)} (r_0^2 \partial_{rrr} U_{rn}^{(2)*}(r_0, S) + 6r_0 \partial_{rr} U_{rn}^{(2)*}(r_0, S) - 3(n-1)(n+2) \partial_r U_{rn}^{(2)*}(r_0, S)) - \sum_{k,m \in \Omega} \frac{r_0^2}{m(m+1)} \mathfrak{J} \left[\Gamma_{kmn} U_{rk}^{(1)}(r_0, t) \partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r_0, t) + \frac{\alpha_{kmn}}{2k(k+1)} \partial_r U_{rk}^{(1)}(r_0, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r_0, t) \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k,m \in \Omega} \frac{2}{m(m+1)} \left\{ \left(2\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) r_0 \tilde{\mathfrak{J}} \right. \\
& \times [U_{rk}^{(1)}(r_0, t) \partial_r U_{rm}^{(1)}(r_0, t)] + \left(\Gamma_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{k(k+1)} \right) \\
& \times \tilde{\mathfrak{J}} [U_{rk}^{(1)}(r_0, t) U_{rm}^{(1)}(r_0, t)] \left. \right\} + \frac{\sigma}{\rho r_0^3} \\
& \times \sum_{k,m \in \Omega} \left\{ 2K_{kmn} (k(k+1) - 1) + \frac{W}{2} \left((m(2n - 2m - 7) \right. \right. \\
& \left. \left. + k(m+1) + 3) K_{kmn} + \alpha_{kmn} \right) \right\} \tilde{\mathfrak{J}} [\xi_k^{(1)}(t) \xi_m^{(1)}(t)] - 2\nu \\
& \times \sum_{k,m \in \Omega} \tilde{\mathfrak{J}} \left[\xi_k^{(1)}(t) \left(\left(K_{kmn} - \frac{\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \right) \partial_{rr} U_{rm}^{(1)}(r_0, t) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{r_0} \frac{2\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \partial_r U_{rm}^{(1)}(r_0, t) \right) \right] - \sum_{k,m \in \Omega} \tilde{\mathfrak{J}} \left[\xi_k^{(1)}(t) \right. \\
& \times \left(\frac{2\nu}{r_0^2} \left(\frac{2\alpha_{kmn}}{m(m+1)} - \alpha_{kmn} \right) U_{rm}^{(1)}(r_0, t) \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\rho} K_{kmn} \partial_r p_m^{(1)}(r_0, t) \right) \right]; \quad n \geq 1. \quad (37)
\end{aligned}$$

Система уравнений (35)–(37) представляет собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно величин $A_n(S)$, $B_n(S)$, $\xi_n^{(2)}(S)$. Подставляя в эту систему решение задачи первого порядка малости (8), после громоздких вычислений найдем выражение для коэффициента $\xi_n^{(2)}(S)$ в виде

$$\begin{aligned}
\xi_n^{(2)}(S) &= \sum_{k,m \in \Omega} \sum_{l,g=1}^{+\infty} \frac{\xi_{kmn}^{lg}(S, S_k^{(l)}, S_m^{(g)})}{(S - S_k^{(l)} - S_m^{(g)}) D_n(S)}; \\
& \quad n \geq 2; \quad (38) \\
\xi_{kmn}^{lg}(S, S_k^{(l)}, S_m^{(g)}) &= \int_0^{r_0} \left\{ \left((\chi r_0)^2 + (n-1)(3n+1) \right. \right. \\
& + (n^2 - 1) \frac{\eta_n(2n-1, \chi)}{\eta_n(1, \chi)} \left. \right) \frac{2n(n+1)}{(2n+1)r_0\chi^2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-2} \\
& - \left((\chi r_0)^2 + 2(n+1)(n(n-3) - 1) + \frac{2(n+1)}{\eta_n(1, \chi)} \right. \\
& \times \left. \left(n(2n^2 + n - 1) + 1 - n(n+2) \frac{r_0\chi}{2} \frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)} \right) \right) \\
& \times \frac{n}{(2n+1)r_0\chi^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+3} - n(n+1) \frac{j_n(\chi r_0)}{\eta_n(1, \chi)} \\
& \times \left(2(\chi r_0)^2 + 4n(n-1)(n+2) - \chi r_0((\chi r_0)^2 \right. \\
& \left. + 2(n-1)(2n+1)) \frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)} \right) \frac{(-1)^n}{\chi r_0^3} r^3 y_n(\chi r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n(n+1)}{\eta_n(1, \chi)} \left(\left((n+1)(\chi r_0)^2 + 4n(n-1)(n+2) \right. \right. \\
& \left. \left. - \chi r_0((\chi r_0)^2 + 2(n-1)(2n+1)) \frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)} \right) y_n(\chi r_0) \right. \\
& \left. - (n-1)(\chi r_0)^2 \frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)} y_{n+1}(\chi r_0) \right) \frac{(-1)^n}{\chi r_0^3} r^3 j_n(\chi r) \left. \right\} \\
& \times f_{kmn}^{lg}(r, S_k^{(l)}, S_m^{(g)}) dr + \left(\frac{\eta_n(n, \chi)}{\eta_n(1, \chi)} 2n(n+1) \right. \\
& \times \left(\frac{\Lambda_{kmn} + (m-2)\Gamma_{kmn}}{m} - (m-2)K_{kmn} \right) \\
& \left. - \frac{(D_n(S) - \omega_n^2) r_0^2}{v^2 \chi^2} \left(\frac{\alpha_{kmn}}{m} - (m-1)K_{kmn} \right) \right) \frac{\nu}{r_0^4} \\
& \times a_{\xi k}(S_k^{(l)}) (a_m(S_m^{(g)}) r_0 + b_m(S_m^{(g)})) + \left(\frac{4(m-1)\alpha_{kmn}}{m} \right. \\
& \left. - ((\chi_m^{(g)} r_0)^2 + 2(m-2)(m-1)) K_{kmn} \right) \frac{n\nu}{r_0^3} a_{\xi k}(S_k^{(l)}) \\
& \times a_m(S_m^{(g)}) + \left(((\chi_m^{(g)} r_0)^2 + 2(m^2 - 1)) \frac{2\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \right. \\
& \left. - 2((\chi_m^{(g)} r_0)^2 + (m-2)(m-1)) K_{kmn} - \frac{\eta_n(n, \chi)}{\eta_n(1, \chi)} \right. \\
& \times \left. \frac{(n+1)(m-2)}{m(m+1)} (\chi_m^{(g)} r_0)^2 \Gamma_{kmn} \right) \frac{n\nu}{r_0^4} a_{\xi k}(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) \\
& + \frac{n\sigma}{2r_0^4 \rho} \left(\left(4(k^2 + k - 1) + (3 + k(m+1)) \right. \right. \\
& \left. \left. + m(2n - 2m - 7) \right) W \right) K_{kmn} + W \alpha_{kmn} \left. \right) a_{\xi k}(S_k^{(l)}) \\
& \times a_{\xi m}(S_m^{(g)}) + \left(\frac{\eta_n(n, \chi)}{\eta_n(1, \chi)} \left(2 \left(\frac{\Lambda_{kmn}}{m(m+1)} - K_{kmn} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - ((\chi_m^{(g)} r_0)^2 + 4) \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} \right) n(n+1) \right. \\
& \left. - \frac{(D_n(S) - \omega_n^2) r_0^2}{v^2 \chi^2} \left(\frac{\alpha_{kmn}}{m(m+1)} - K_{kmn} \right) \right. \\
& \left. + 4n \left(2K_{kmn} - \frac{\alpha_{kmn}}{m(m+1)} \right) \right) a_{\xi k}(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) \frac{\nu \chi_m^{(g)}}{r_0^3} \\
& \times \frac{j_{m+1}(\chi_m^{(g)} r_0)}{j_m(\chi_m^{(g)} r_0)} - \left(K_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{km} \right) \frac{n}{2r_0} a_k(S_k^{(l)}) a_m(S_m^{(g)}) \\
& - \left(K_{kmn} + \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} (\chi_m^{(g)} r_0)^2 + \frac{\alpha_{kmn}}{km} \right) \frac{n}{r_0^2} a_k(S_k^{(l)}) \\
& \times b_m(S_m^{(g)}) - \left(\frac{1}{2} \left(K_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{km} \right) + \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} (\chi_m^{(g)} r_0)^2 \right) \\
& \times \frac{n}{r_0^3} b_k(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) - \frac{n}{r_0^2} \frac{\alpha_{kmn} \chi_m^{(g)}}{km(m+1)} b_m(S_m^{(g)}) \left(r_0 a_k(S_k^{(l)}) \right. \\
& \left. + b_k(S_k^{(l)}) \left(1 + \frac{r_0 \chi_k^{(l)}}{2(k+1)} \frac{j_{k+1}(\chi_k^{(l)} r_0)}{j_k(\chi_k^{(l)} r_0)} \right) \right) \frac{j_{m+1}(\chi_m^{(g)} r_0)}{j_m(\chi_m^{(g)} r_0)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{kmn}^{lg}(r, S_k^{(l)}, S_m^{(g)}) &= \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} (\chi_m^{(g)})^3 a_k(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) \\
 &\times \frac{r^{k-2}}{r_0^{k-1}} \frac{j_{m+1}(\chi_m^{(g)} r)}{j_m(\chi_m^{(g)} r_0)} + \frac{(m+k)k\Gamma_{kmn} + \alpha_{kmn}}{km(m+1)} (\chi_m^{(g)})^2 \\
 &\times b_m(S_m^{(g)}) \left(a_k(S_k^{(l)}) \frac{r^{k-3}}{r_0^{k-1}} + b_k(S_k^{(l)}) \frac{1}{r^3} \frac{j_k(\chi_k^{(l)} r)}{j_k(\chi_k^{(l)} r_0)} \right) \\
 &\times \frac{j_m(\chi_m^{(g)} r)}{j_m(\chi_m^{(g)} r_0)} + \left(\frac{\Gamma_{kmn}(\chi_m^{(g)})^2}{m(m+1)} + \frac{m(m+1)\Gamma_{mkn} + \alpha_{kmn}}{k(k+1)m(m+1)} \right) \\
 &\times (\chi_k^{(l)})^2 \chi_m^{(g)} b_k(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) \frac{1}{r^2} \frac{j_k(\chi_k^{(l)} r)}{j_k(\chi_k^{(l)} r_0)} \frac{j_{m+1}(\chi_m^{(g)} r)}{j_m(\chi_m^{(g)} r_0)}.
 \end{aligned}$$

Из выражения (38) видно, что оно имеет устранимую особую точку $S = 0$ и бесконечное счетное число особых точек, которые определяются из условий $D_n(S) = 0$ и $S - S_k^{(l)} - S_m^{(g)} = 0$ и являются простыми полюсами. Кроме того, выражение (38) при $S \rightarrow \infty$ стремится к нулю, что позволяет в формуле обратного преобразования Лапласа воспользоваться леммой Жордана для левой полуплоскости и теоремой о вычетах. В итоге формула обращения примет вид

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(S) \exp(S \cdot t) dS \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \text{res}(F(S_n^{(j)}) \exp(S_n^{(j)} t)), \quad (39)
 \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем корням уравнений $D_n(S) = 0$ и $S - S_k^{(l)} - S_m^{(g)} = 0$.

Применяя формулу (39) для вычисления коэффициента $\xi_n^{(2)}(S)$, найдем

$$\begin{aligned}
 \xi_n^{(2)}(t) &= \sum_{k,m \in \Omega} \sum_{l,g,j=1}^{+\infty} \frac{\xi_{kmn}^{lg}(S_n^{(j)}, S_k^{(l)}, S_m^{(g)})}{(S_n^{(l)} - S_k^{(l)} - S_m^{(g)}) \partial_{S_n^{(j)}} D_n(S_n^{(j)})} \\
 &\times \exp(S_n^{(j)} t) + \sum_{k,m \in \Omega} \sum_{l,g=1}^{+\infty} \frac{\xi_{kmn}^{lg}(S_k^{(l)} + S_m^{(g)}, S_k^{(l)}, S_m^{(g)})}{D_n(S_k^{(l)} + S_m^{(g)})} \\
 &\times \exp((S_k^{(l)} + S_m^{(g)}) t); \quad n \geq 2, \quad (40)
 \end{aligned}$$

где $S_n^{(j)}$ — корень дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(j)}) = 0$.

Подставляя выражения (40) и (24) в (10), найдем явный вид коэффициента $\xi^{(2)}(\vartheta, t)$. Подставляя найденное таким образом выражение для $\xi^{(2)}(\vartheta, t)$, а также выражение для коэффициента $\xi^{(1)}(\vartheta, t)$, которое определяется выражением (8), в (4) несложно найти явный вид функции $\xi(\vartheta, t)$ и определить форму образующей нелинейно осесимметрично осциллирующей капли вязкой несжимаемой электропроводной жидкости как функцию

времени и полярного угла

$$\begin{aligned}
 r(\vartheta, t) &= r_0 + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{\xi n}(S_n^{(j)}) \exp(S_n^{(j)} t) P_n(\mu) \\
 &- \frac{\varepsilon^2}{r_0} \sum_{m \in \Omega} \sum_{l,g=1}^{+\infty} \frac{a_{\xi m}(S_m^{(l)}) a_{\xi m}(S_m^{(g)})}{2m+1} \exp((S_m^{(l)} + S_m^{(g)}) t) \\
 &\times P_0(\mu) - \frac{9\varepsilon^2}{r_0} \sum_{m \in \Omega} \sum_{l,g=1}^{+\infty} \frac{(m+1) a_{\xi m}(S_m^{(l)}) a_{\xi m+1}(S_{m+1}^{(g)})}{(2m+1)(2m+3)} \\
 &\times \exp((S_m^{(l)} + S_{m+1}^{(g)}) t) P_1(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k,m \in \Omega} \\
 &\times \left\{ \sum_{l,g,j=1}^{+\infty} \frac{\xi_{kmn}^{lg}(S_n^{(j)}, S_k^{(l)}, S_m^{(g)})}{(S_n^{(j)} - S_k^{(l)} - S_m^{(g)}) \partial_{S_n^{(j)}} D_n(S_n^{(j)})} \exp(S_n^{(j)} t) \right. \\
 &\left. + \sum_{l,g=1}^{+\infty} \frac{\xi_{kmn}^{lg}(S_k^{(l)} + S_m^{(g)}, S_k^{(l)}, S_m^{(g)})}{D_n(S_k^{(l)} + S_m^{(g)})} \exp((S_k^{(l)} + S_m^{(g)}) t) \right\} P_n(\mu). \quad (41)
 \end{aligned}$$

Переходя в выражении (41) к пределу идеальной жидкости (используя асимптотическое представление модифицированных сферических функций при больших значениях аргумента при $\nu \rightarrow 0$), несложно прийти к выражению для образующей нелинейно осциллирующей заряженной капли идеальной жидкости, найденному в [9].

4. Рассмотрим случай сильно вязкой жидкости, когда $(\nu \cdot \rho^{1/2} / (r_0 \sigma))^{1/2} \geq 1$ (такому критерию удовлетворяют, например, капли воды с характерными линейными размерами, меньшими $0.1 \mu\text{m}$ [10]). Тогда в выражениях для асимптотического представления модифицированных сферических функций Бесселя первого и второго родов при малых значениях аргумента [8]

$$\begin{aligned}
 j_n(\chi) &= \frac{\chi^n}{(2n+1)!!} \left(1 + \frac{\chi^2/2}{1!(2n+3)} \right. \\
 &\left. + \frac{(\chi^2/2)^2}{2!(2n+3)(2n+5)} + \dots \right); \quad \chi \rightarrow 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_n(\chi) &= \frac{(2n-1)!!}{(-1)^n \chi^{n+1}} \left(1 + \frac{\chi^2/2}{1!(1-2n)} \right. \\
 &\left. + \frac{(\chi^2/2)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} + \dots \right); \quad \chi \rightarrow 0; \quad (42)
 \end{aligned}$$

можно ограничиться несколькими первыми слагаемыми. В итоге получим

$$\begin{aligned}
 a_{\xi n}(S_n^{(j)}) &\cong h_n \\
 &- \frac{3(2n(2n(n+2)+3)+3)}{2(n-1)(2n+1)(2n+5)(2n(n+2)+3)} \frac{r_0^2 h_n S_n^{(j)}}{\nu};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n(S_n^{(j)}) &\cong -\frac{(n+1)(2n+3)}{(2n(n+2)+3)} \frac{h_n \omega_n^2}{S_n^{(j)}} \\
&+ \frac{(4n+3)(2n(n+2)(4n^2+6n+5)+9)}{2(n-1)(2n+1)(2n+5)(2n(n+2)+3)^2} \frac{r_0^2 h_n \omega_n^2}{\nu}; \\
b_n(S_n^{(j)}) &\cong \frac{(n+1)(2n+3)}{(2n(n+2)+3)} \frac{r_0 h_n \omega_n^2}{S_n^{(j)}} \\
&- \frac{(n+1) \left(2n \left(4n(n(3n+11)+14) + 35 \right) + 21 \right)}{(n-1)(2n+1)(2n+5)(2n(n+2)+3)^2} \\
&\times \frac{r_0^3 h_n \omega_n^2}{\nu}; \\
D_n(S_n^{(j)}) &\cong \frac{3 \left(2n(2n(n+2)+3) + 3 \right)}{(2n+1)^2(2n+5)} \\
&\times \left((S_n^{(j)})^2 + 2S_n^{(j)} \frac{\tau_n \nu}{r_0^2} + \tau_n^2 \beta_n \omega_n^2 \right); \\
\tau_n &= \frac{(2n+1)(2n+5)(n-1)(2n^2+4n+3)}{3(4n^3+8n^2+6n+3)}; \\
\beta_n &= \frac{3(4n^3+8n^2+6n+3)}{(2n+5)(n-1)^2(2n^2+4n+3)^2}. \quad (43)
\end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение $D_n(S_n^{(j)}) = 0$ теперь имеет всего два корня [4]:

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)} &= -\tau_n \frac{\nu}{r_0^2} + \tau_n \frac{\nu}{r_0^2} \sqrt{1 - \beta_n \frac{r_0^4 \omega_n^2}{\nu^2}}; \\
S_n^{(2)} &= -\tau_n \frac{\nu}{r_0^2} - \tau_n \frac{\nu}{r_0^2} \sqrt{1 - \beta_n \frac{r_0^4 \omega_n^2}{\nu^2}}. \quad (44)
\end{aligned}$$

Если вязкость жидкости будет настолько большой, что будет выполнено соотношение $\nu^2 \gg \beta_n r_0^4 \omega_n^2$, тогда корни (44) можно записать в виде [4]

$$S_n^{(1)} \cong -\tau_n \beta_n \frac{r_0^2 \omega_n^2}{2\nu}; \quad S_n^{(2)} \cong -2\tau_n \frac{\nu}{r_0^2}. \quad (45)$$

Несложно видеть, что $|S_n^{(1)}| \ll |S_n^{(2)}|$, поэтому в выражении (40) слагаемые, содержащие второй корень $S_n^{(2)}$, будут быстро затухать со временем. Временная эволюция деформированной в начальный момент времени капли определится слагаемыми, содержащими первый корень $S_n^{(1)}$. Тогда из (40) с учетом выписанных выше разложений для коэффициентов $a_{\xi n}(S_n^{(j)})$, $a_n(S_n^{(j)})$,

$b_n(S_n^{(j)})$ несложно получить

$$\begin{aligned}
\xi_n^{(2)}(t) &= \sum_{k,m \in \Omega} \left\{ \exp \left(-(\tau_k \beta_k \omega_k^2 + \tau_m \beta_m \omega_m^2) \frac{r_0^2}{2\nu} t \right) \right. \\
&- \exp \left(-\tau_n \beta_n \omega_n^2 \frac{r_0^2}{2\nu} t \right) \left. \right\} \frac{2n+1}{(n-1)(2n(n+2)+3)} \\
&\times \frac{h_k h_m}{\tau_n \beta_n \omega_n^2 - \tau_k \beta_k \omega_k^2 - \tau_m \beta_m \omega_m^2} \\
&\times \left\{ \frac{n\sigma}{\rho r_0^4} K_{kmn} \left(2(k(k+1)-1) + (3+k(m+1)) \right. \right. \\
&- m(7+2m-2n) \left. \frac{W}{2} \right) + \frac{W}{2} \frac{n\sigma}{\rho r_0^4} \alpha_{kmn} \\
&- \left(K_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{km} \right) \frac{n\omega_k^2 (2k+1)(m-1)(m+1)(2m+3)}{2r_0 (k-1)(2k(k+2)+3)(2m+1)} \\
&- \frac{1}{2kmr_0} \left(km \left(6(2k+1)(m-1) \right. \right. \\
&+ \left. \left. (20m - k(k(2k+3)(2m+1) - 2(16m+5)) + 7) \right) n \right. \\
&+ \left. 2(7m + k(6(m+3) - k(2k+3)(2m+1)) + 11) n^2 \right. \\
&- \left. 4(2k+1)(m-1)n^3 \right) K_{kmn} \\
&+ \left. \left(3(2m+1)n(2n+1) - 2k^3(2m+1)n(2n+1) \right. \right. \\
&+ \left. \left. 2k(2n(m+2+2(m-1)n-3n^2)+9) \right. \right. \\
&- \left. \left. 3k^2(n(2n(2m+4n+5)+2m-3)-12) \right) \alpha_{kmn} \right. \\
&+ \left. 6k(2k+1)n \frac{(n+1)(m(m(2m-1)-4)\Gamma_{kmn} + 3\Lambda_{kmn})\omega_m^2}{((2k+1)(m-1)(2m(m+2)+3)(2n+1))} \right\}; \\
&n \geq 2. \quad (46)
\end{aligned}$$

Выражения (24) с учетом (8) в данном приближении можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\xi_0^2(t) &= -\frac{1}{r_0} \sum_{m \in \Omega} \frac{h_m}{2m+1} \exp \left(-\tau_m \beta_m \frac{r_0^2 \omega_m^2}{\nu} t \right); \\
\xi_1^{(2)}(t) &= -\frac{9}{r_0} \sum_{m \in \Omega} \frac{(m+1)h_m h_{m+1}}{(2m+1)(2m+3)} \exp \left(-\tau_m \beta_m \frac{r_0^2 \omega_m^2}{2\nu} t \right) \\
&\times \exp \left(-\tau_{m+1} \beta_{m+1} \frac{r_0^2 \omega_{m+1}^2}{2\nu} t \right).
\end{aligned}$$

Интересно, что точность асимптотического выражения (46) зависит от величины параметра W : с приближением W к критическому по Рэлею значению точность (46) увеличивается. Это обстоятельство связано

Минимальные количества корней дисперсионного уравнения, учет которых необходим для обеспечения удовлетворительной сходимости ряда, определяющего нелинейную поправку к профилю капли $\xi_n^{(2)}(t)$ при $k = m = 2$ и различных значениях безразмерной вязкости капли ν , параметра Рэлея W и номера нелинейно возбуждаемой моды n

ν	$n = 2$				$n = 4$			
	$W = 0$	$W = 2$	$W = 3$	$W = 3.5$	$W = 0$	$W = 2$	$W = 3$	$W = 3.5$
0.02	16	12	9	6	48	28	22	18
0.03	10	8	7	5	30	18	12	10
0.05	8	6	5	4	16	10	8	6
0.07	6	5	4	3	12	8	6	4
0.1	4	4	3	3	10	6	4	4
0.2	3	3	3	3	6	4	3	3
0.5	3	3	3	2	4	3	2	2
1.5	2	2	2	2	3	2	2	2
2.0	2	1	1	1	3	2	1	1

с тем, что (46) справедливо только в том случае, когда $\nu^2 \gg \beta_n r_0^4 \omega_n^2$ (см. (44)), при приближении же величины W к критическому значению быстро уменьшается ω_n^2 . Сказанное делает актуальным использование соотношения (46) при исследовании физических закономерностей реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду, когда W мало отличается от критического значения, особенно если учесть, что, как и выражения (40), (41), соотношение (46) справедливо и для закритических значений собственного заряда капли: $W > 4$.

5. Численные расчеты по выражению (40) в безразмерных переменных, в которых $\rho = \sigma = r_0 = 1$, указывают на различную сходимость рядов по набору корней дисперсионного уравнения для различных значений вязкости жидкости ν , параметра Рэлея W и номера моды n , возбужденной во втором порядке малости. В частности, при малых вязкостях корни дисперсионного уравнения $D_n(S) = 0$ располагаются плотно один к другому, поэтому суммирование нужно проводить по большому набору корней дисперсионного уравнения (см. таблицу). При больших вязкостях жидкости, согласно сказанному выше в разделе 4, можно ограничиться двумя или даже одним корнем дисперсионного уравнения. Из таблицы видно также, что увеличение параметра Рэлея W приводит к улучшению сходимости ряда (40).

Сравнение численных значений коэффициентов $\xi_n^{(2)}(t)$ для случая маловязкой жидкости, когда безразмерная вязкость мала ($\nu \cdot \rho^{1/2} / (r_0 \sigma)^{1/2} \leq 0.01$ (такому критерию удовлетворяют, например, капли воды с $r_0 \geq 100 \mu\text{m}$) и для идеальной жидкости [9], указывает, что в маловязкой жидкости значения коэффициента $\xi_n^{(2)}(t)$ могут заметно превышать соответствующее значение для идеальной жидкости (рис. 1). Из этого факта следует, что малая вязкость способствует усилению нелинейного взаимодействия мод. Это обстоятельство, по-видимому, связано с тем, что в маловязкой жидкости доля энергии, перекачиваемой за счет нелинейного взаимодействия из моды, определяющей начальную деформацию, в нелинейно с ней взаимодействующие, передается

не одноразово, в начальный момент времени, как было в идеальной жидкости, но этот процесс занимает конечный интервал времени: амплитуды нелинейно возбуждающихся мод вначале в течение нескольких периодов осцилляций растут и только затем начинают экспоненциально затухать за счет вязкой диссипации энергии (рис. 1, *a*). В маловязких жидкостях затухание осцилляций происходит колебательным образом (рис. 1, *a, b*), а в сильновязких аperiodически (рис. 2). Многоразовая (в течение нескольких периодов осцилляций) передача энергии из изначально возбужденной моды в нелинейно с ней взаимодействующую имеет место только для маловязких жидкостей, уже в жидкостях с умеренной вязкостью (рис. 1, *b*), а тем более в сильновязких жидкостях (рис. 2) такая передача энергии реализуется так же, как и в идеальной жидкости — одноразово.

Характерный веретенообразный вид огибающей осциллирующей кривой на рис. 1, *a* объясняется следующими факторами: а) энергия в нелинейно возбуждаемую во втором порядке малости моду перекачивается из моды, определяющей начальную деформацию; б) амплитуда начальной деформации экспоненциально убывает со временем за счет вязкой диссипации, а следовательно, убывает и доля энергии, передаваемой в моду, возбуждаемую за счет нелинейного взаимодействия; в) амплитуда нелинейно возбуждаемой во втором порядке малости моды также экспоненциально затухает со временем. Если построить график суммарной амплитуды первого и второго порядков малости, то она будет просто экспоненциально убывать со временем, как это видно из рис. 3. Тем не менее обнаруженный факт постепенной раскачки нелинейно возбуждаемых мод позволяет судить о реальных физических закономерностях нелинейного взаимодействия мод осциллирующей капли с отличной от нуля вязкостью.

Для вязкой жидкости при $W < 4$, когда основная мода, а следовательно, и вся капля устойчивы по отношению к собственному заряду, выражения (40), (41), (46) определяют временной закон возвращения формы капли к равновесной сферической (рис. 4, *a*). Из (40),

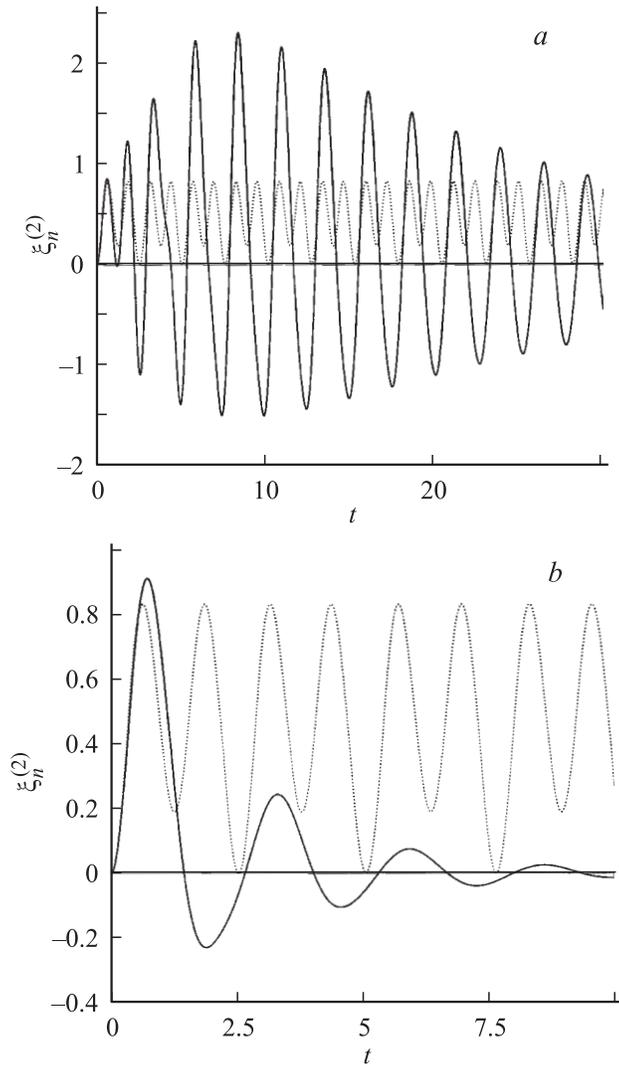


Рис. 1. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_n^{(2)}$ для основной моды от безразмерного времени t , построенные для одномодовой начальной деформации при $k = m = 2$, $n = 2$, $W = 1$; $\nu = 0.01$ (a), 0.1 (b). Сплошная кривая построена по выражению (40); пунктир — по выражению, справедливому для идеальной жидкости.

(41), (46) видно, что амплитуды мод, определяющих начальную деформацию, равно как и амплитуды нелинейно возбужденных мод, убывают экспоненциально со временем. Причем показатели экспонент быстро растут с увеличением номера моды.

При $4 < W < 5$, когда основная мода ($n = 2$) теряет устойчивость, а все более высокие моды ее сохраняют, картина временной эволюции формы капли усложняется. Показатели экспонент, в которые входит квадрат частоты основной моды, меняют свой знак, поскольку его при $4 < W < 5$ меняет квадрат частоты ω_2^2 , и соответствующее слагаемое начинает экспоненциально со временем возрастать, тогда как остальные компоненты выражений (40), (41), (46) продолжают уменьшаться со временем (рис. 4, b). По прошествии некоторого

интервала времени исходная деформация капли исчезнет, а ее форма определится растущей со временем основной модой, т.е. капля будет эволюционировать к фигуре, близкой к вытянутому сфероиду. Удлинение заряженной капли электропроводной жидкости за счет увеличения амплитуды основной моды будет либо ограничено началом полевой эмиссии зарядов при достаточном увеличении напряженности поля собственного заряда на ее вершинах вследствие увеличения кривизны вершин связанного с вытягиванием капли (как это

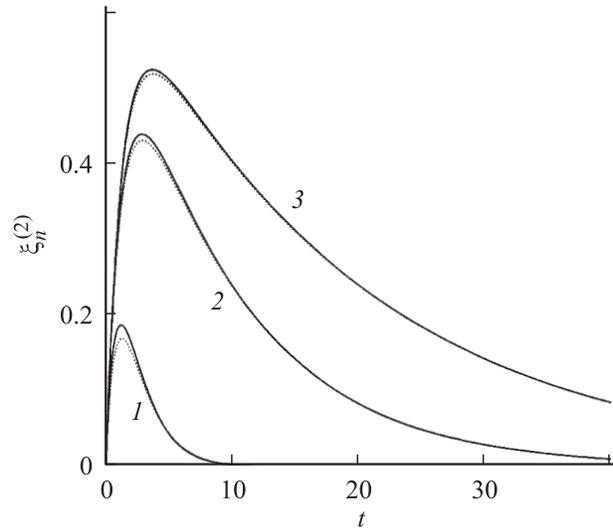


Рис. 2. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_n^{(2)}$ от безразмерного времени t , построенные при $k = m = 2$, $n = 4$, $h_2 = 1$, $\nu = 1$ и различных значениях параметра W . $W = 3$ (1), 3.8 (2), 3.9 (3). Сплошные кривые построены по выражению (40), пунктир — по асимптотическому выражению (46).

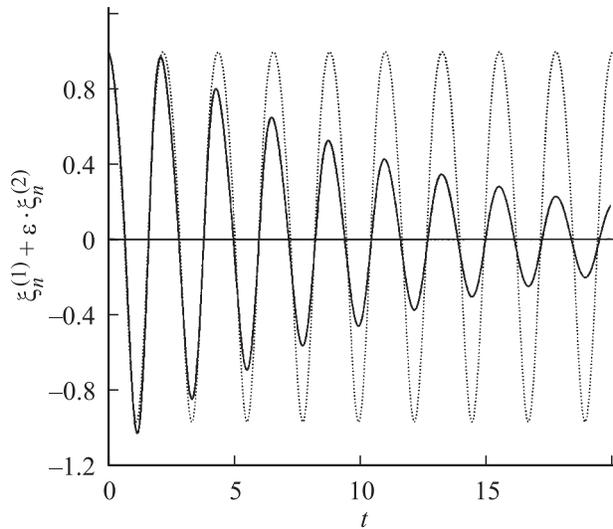


Рис. 3. Зависимости линейной суперпозиции решений первого и второго порядков малости $\xi_n^{(1)} + \epsilon \cdot \xi_n^{(2)}$ для безразмерной амплитуды основной моды от безразмерного времени t , построенные при $k = m = 2$, $n = 2$, $W = 1$, $\nu = 0.02$, $\epsilon = 0.3$. Кривые — то же, что и на рис. 1.

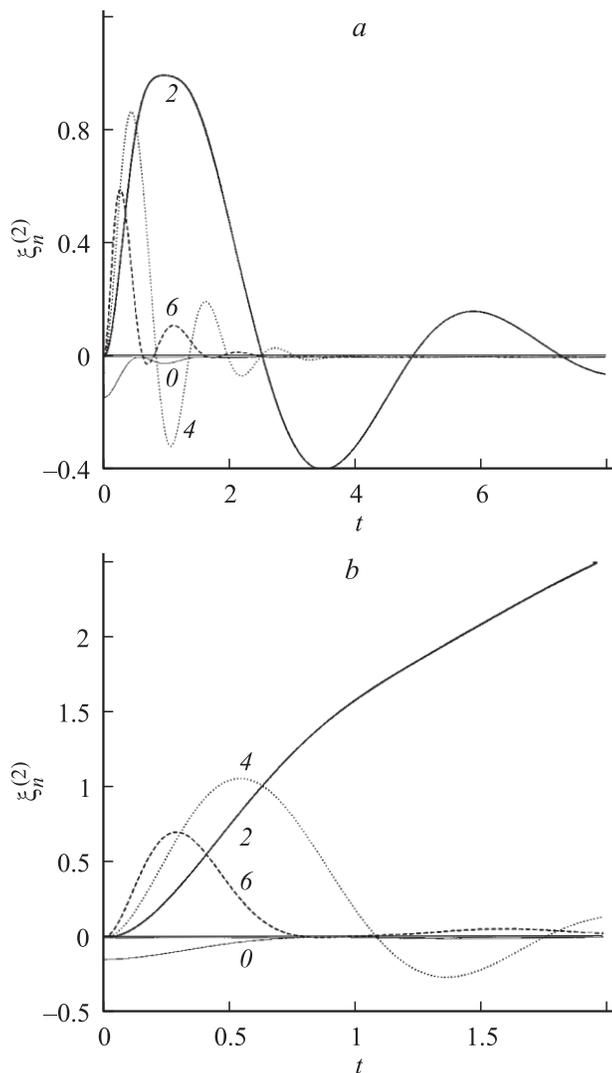


Рис. 4. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_n^{(2)}$ от безразмерного времени t , построенные при $k = m = 3$, $h_3 = 1$, $\nu = 0.1$ и различных n . Номер у кривой совпадает с номером нелинейно возбуждающейся моды n : a — $W = 3$, b — 4.01 .

было описано ранее в [10]), либо приведет к делению капли на две части сравнимых размеров [11]. Эффект реализации неустойчивости основной моды будет иметь место независимо от того, входила ли основная мода в спектр мод, определивших начальную деформацию, поскольку во втором порядке малости основная мода за счет нелинейного взаимодействия возбуждается всегда при любом виде начальной деформации [3,12,13].

Для капли сильновязкой жидкости (когда безразмерная вязкость велика ($\nu \cdot \rho^{1/2}/(r_0\sigma)^{1/2} \geq 1$) затухание нелинейно возбужденных мод, устойчивых по отношению к собственному заряду, имеет аperiодический характер (рис. 2 и 5). Если же основная мода сильновязкой капли неустойчива, а остальные возбужденные моды устойчивы по отношению к имеющемуся на капле заряду (рис. 5), то, согласно сказанному выше, амплитуда основной моды будет нарастать со временем, а капля вы-

тягиваться в сфероид, но в отличие от капли идеальной жидкости достаточно медленно и не с увеличивающейся по мере увеличения эксцентриситета скоростью [14], а с уменьшающейся, как это видно из рис. 5 и 6. Детальный анализ показывает, что в силу влияния вязкости жидкости скорость роста неустойчивой основной моды, определенная в начальный момент времени величиной инкремента (степенью за критичности параметра Рэлея ΔW для основной моды), в течение некоторого интервала времени, длительность которого определяется величиной ΔW , убывает до весьма малой величины, сохраняет эту величину в течение промежутка времени,

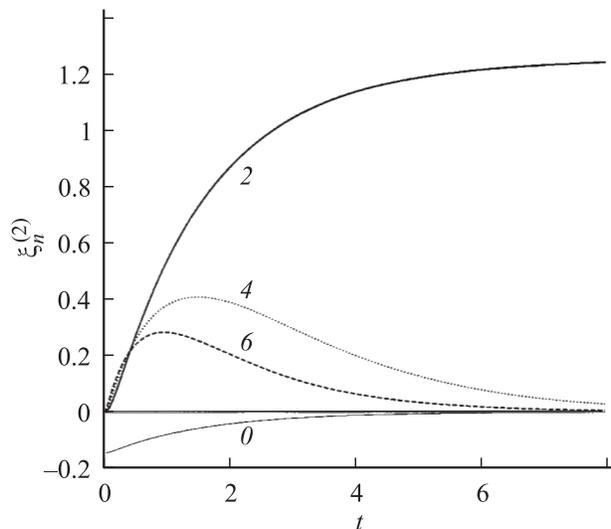


Рис. 5. Те же зависимости, что и на рис. 4, b , но построенные при $\nu = 1$.

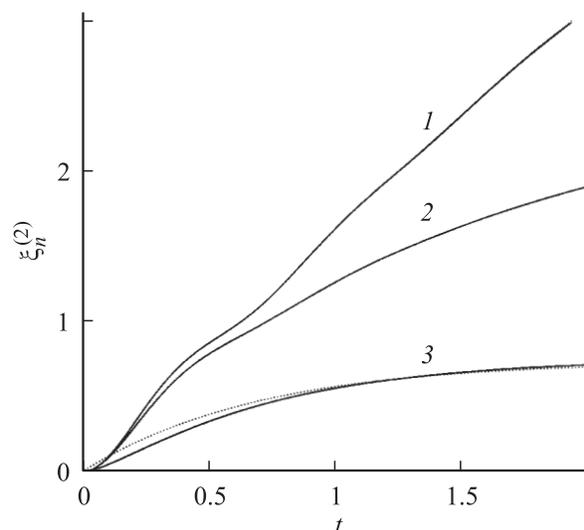


Рис. 6. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_2^{(2)}$ для основной моды от безразмерного времени t , построенные при $k = m = 4$, $n = 2$, $W = 4.01$ и различных вязкостях жидкости ν . Номера у кривых соответствуют различным вязкостям: $\nu = 0.05$ (1), 0.1 (2), 1 (3). Сплошные кривые построены по выражению (40), пунктир — при $\nu = 1$ по выражению (46).

обратно пропорционального ΔW , и только потом начинает расти по закону, близкому к экспоненциальному, с инкрементом, обратно пропорциональным вязкости жидкости. При малых закритичности параметра Рэлея ($\Delta W \sim 0.001$) на кривой временной эволюции неустойчивой основной моды образуется „плато“ (рис. 5, 6), на котором амплитуда основной моды практически не меняется. С физической точки зрения сказанное (и проиллюстрированное рис. 5, 6) означает, что неустойчивая капля сильновязкой жидкости с указанными значениями ΔW и ν быстро (за время порядка периода осцилляций основной моды незаряженной капли T_2) приобретает сфероидальную деформацию $\sim \varepsilon$, остается в таком состоянии в течение интервала времени $\sim 10T_2$, и только потом продолжает удлиняться с нарастающей скоростью. Напомним, что для капли идеальной жидкости временная зависимость амплитуды сфероидальной деформации неустойчивой капли была более крутой, чем экспоненциальная [14]. Учет малой вязкости капли, проведенный в [15], приводил лишь к количественным, а не качественным изменениям в физической картине временной эволюции неустойчивой капли.

Если же величина параметра W будет лежать в диапазоне $5 < W < 6$, то неустойчивой будет и третья мода ($n = 3$). Но приведет ли ее неустойчивость к деформации сфероидальной формы, будет зависеть от того, присутствует ли третья мода в спектре мод, определяющих начальную деформацию, или в спектре мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия. Если третьей моды нет ни в одном из упомянутых наборов мод, то, согласно (46), она не повлияет на форму капли (если, конечно, абстрагироваться от осцилляций исчезающе малой амплитуды тепловой природы, всегда существующих в капле в силу теплового движения молекул).

Заключение

Нелинейные осцилляции капель вязких жидкостей можно аналитически исследовать классическими асимптотическими методами. В пределе большой вязкости получающиеся аналитические выражения достаточно компактны. Анализ закономерностей временной эволюции нелинейно возбуждающихся мод показал, что в случае маловязкой жидкости передача энергии в нелинейно возбуждающуюся моду из моды, определяющей начальную деформацию, происходит не единоразово, как это имеет место в модели идеальной или сильновязкой жидкости, но в течение нескольких периодов осцилляций. Такой механизм передачи энергии в нелинейно возбуждающуюся моду обеспечивает получение ею большей энергии и ранее известен не был. При реализации неустойчивости сильновязкой капли ($(\nu \cdot \rho^{1/2} / (r_0 \sigma)^{1/2}) \geq 1$) с зарядом, незначительно превышающим критический для основной моды, временной закон нарастания сфероидальной деформации существенно отличается от предсказанного ранее для идеальной или маловязкой жидкости.

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ (№ МК-2946-2004-1) и РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

- [1] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [2] Feng Z.C. // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [3] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.
- [4] Жаров А.Н., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 1. С. 22–31.
- [5] Basaran O.A. // J. Fluid Mech., 1992. Vol. 241. P. 169–198.
- [6] Becker E., Hiller W.J., Kowalewski T.A. // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 258. P. 191–216.
- [7] Chandrasekhar S. // Proc. London Math. Soc. 1959. Vol. 3. N 9. P. 141–149.
- [8] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [9] Ширяева С.О. // Изв. РАН МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
- [10] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 10. С. 1–7.
- [11] Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ПЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 19. С. 16–23.
- [12] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
- [13] Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 23–31.
- [14] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.
- [15] Ширяева С.О. // ПЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 4. С. 5–8.