Журнал технической физики, 2005, том 75, вып. 12

01;12

Нестационарные движения электронов двойного плазменного слоя в самосогласованном электрическом поле пространственного заряда

© В.А. Федоров

Открытое акционерное общество
„Радиотехнический институт им. академика А.Л. Минца“,
125083 Москва, Россия
e-mail: f_v99@mail.ru

(Поступило в Редакцию 15 декабря 2004 г.)

Исследованы нестационарные одномерные движения электронов двойного плазменного слоя под действием самосогласованного электрического поля пространственного заряда и силы трения. Получены аналитические решения нелинейной системы уравнений гидродинамики плазмы для электронов. Найдены изменения напряженности электрического поля, скорости и концентрации электронов в зависимости от времени и расстояния. Определены динамические характеристики некоторых видов движений электронов плазмы, имеющих различный тип симметрии.

1. Исследования динамики потоков заряженных частиц представляют большой интерес в связи с теоретическими и техническими приложениями, возникающими при построении теории различных радиофизических устройств, при формировании, инжекции и транспортировке пучков электронов или ионов в плазме и в вакууме и т.д. [1,2]. Часто эти исследования проводят применительно к двойным плазменным слоям, которые являются фундаментальными структурами плазмы и встречаются как в лабораторных условиях (плазмозаполненные приборы, плазменные зонды), так и в космосе (зоны полярных сияний, активные эксперименты с инжекцией заряженных частиц в ионосфере) [3,4]. Как правило, настоящие структуры состоят из двух частично разделенных в пространстве слоев электрических зарядов разного знака, имеющих неодинаковую концентрацию частиц. Это приводит к тому, что плазма становится заряженной, а потоки заряженных частиц не скомпенсированными по объемному заряду. Причем обычно двойные плазменные слои изучают либо в стационарном состоянии, когда заданы граничные условия, а ищут токи заряженных частиц [5], либо в равновесии, когда задают распределение электрического потенциала, а определяют поведение системы, условия ее устойчивости и т.д. [6].

В данной работе изучаются одномерные движения электронов двойного плазменного слоя, в котором к моменту времени $t = 0$ электроны и ионы полностью разделены в пространстве и имеют общую границу, а их суммарный электрический заряд равен нулю. При этом ионы считаются покоящимися для $t \geq 0$. Решение задачи будет проводиться на интервале времени $0 \leq t \leq t_r$, где t_r — момент времени, когда скорость электронов в какой-нибудь точке пространства становится равной нулю или когда фронт потока электронов достигает границы слоя. Первое ограничение связано с тем, что при $t > t_r$ могут возникнуть обратные токи электронов, а следовательно, пересечение траекторий частиц, что сделает применение гидродинамики несправедливым. Второе ограничение говорит о том, что движение электронов должно происходить в пределах объема, занимаемого двойным плазменным слоем. Если $t > t_r$, то при достижении фронтом потока электронов границы слоя необходимо исключать из рассмотрения электроны, которые покидают его объем и перестают вносить вклад в напряженность электрического поля, возникающего в слое. Это обстоятельство не позволяет получить аналитические решения задачи.

Рассмотрим двойной плазменный слой объемом $V = V_e + V_i$, где V_e, V_i — объемы, занимаемые электронами и ионами в момент времени $t = 0$, которые ограничены координатами $0 \leq R < \Delta$ и $\Delta \leq R \leq R_c$. Таким образом, 0, R_c и Δ есть расстояния от начала координат левой и правой границ двойного плазменного слоя и границы между V_e и V_i соответственно. Следовательно, электроны в процессе движения могут располагаться на отрезке $0 \leq R \leq R_c$, а ионы находятся в покое на отрезке $\Delta \leq R \leq R_c$. Пусть величины зарядов электронов Q_e и ионов Q_i в объемах V_e и V_i таковы, что

$$Q_e + Q_i = 0. \tag{1}$$

Здесь Q_e, Q_i — непрерывные функции в V_e, V_i:

$$Q_e = \int\limits_{V_e} en_e dV_e, \quad Q_i = \int\limits_{V_i} |e| n_i dV_i; \tag{2}$$

e — заряд электрона; n_e, n_i — концентрация электронов и ионов плазмы.

Принимая во внимание одномерность движения и выражения (2), равенство (1) представим в виде

$$\int\limits_0^{\Delta} en_e(R,0)R^k dR - \int\limits_{\Delta}^{R_c} en_i(R,0)R^k dR = 0, \tag{3}$$

где $k = 0, 1, 2$ для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно.

2. Для исследования динамики электронов с учетом сделанных выше приближений, воспользуемся системой уравнений одножидкостной гидродинамики холодной плазмы с силой трения, которая пропорциональна скорости движения [7]. Пренебрегая тепловыми эффектами, данную систему в одномерном случае запишем в виде

$$\frac{\partial V_e}{\partial t} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial R} + \nu_e V_e = \frac{e}{m_e} E, \tag{4}$$

$$\frac{1}{R^k} \frac{\partial}{\partial R} (R^k E) = 4\pi e(n_e - n_i), \tag{5}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi e n_e V_e. \tag{6}$$

Здесь $E(R,t) = E_e(R,t) + E_i(R,0)$ — напряженность электрического поля, создаваемого электронами и ионами; $V_e(R,t)$ — скорость электронов; R — радиус точки пространства; m_e — масса электрона; $\nu_e = \text{const}$ — частота столкновений электронов с нейтральными частицами.

Чтобы система уравнений (4)–(6) стала замкнутой, дополним ее начальными и граничными условиями [8]. В качестве начальных условий для $t = 0$ зададим

$$V_{e,i}(R_*, 0) = 0, \quad n_{e,i}(R_*, 0) = n^0_{e,i} f_{e,i}(R_*, 0), \tag{7}$$

$$E(R_*, 0) = \frac{4\pi}{R^k_*} \int\limits_0^{R_*} \left[e n^0_e f_e(R_*, 0) - \chi\, e n^0_i f_i(R_*, 0)\right] R^k_* dR_*, \tag{8}$$

где $0 \le R_* \le R_c$; $n^0_e = n^0_i = \text{const}$ — невозмущенные концентрации электронов и ионов плазмы; $f_{e,i}(R,0) \ge 1$ — функции, задающие $n_{e,i}(R,0)$; $\chi = 0$, если $0 \le R < \Delta$, и $\chi = 1$, если $\Delta \le R \le R_c$.

Граничные условия на внешних границах V_e, V_i, которые неподвижны, имеют вид

$$V_e(0,t) = 0, \quad n_e(0,t) = n^0_e f_e(0,0),$$

$$V_i(R_c,t) = 0, \quad n_i(R_c,t) = n^0_i f_i(R_c,0), \tag{9}$$

$$E(0,t) = 0, \qquad E(R_c,t) = 0. \tag{10}$$

Граничные условия для электронов на подвижной границе V_e и ее положение в пространстве определяются из решения системы уравнений (4)–(6).

Интегрируя (5) по объему V в пределах от 0 до R, где координатой R обозначено конечное положение подвижной границы объема V_e, имеющей при $t = 0$ координату R_*, с использованием теоремы Гаусса получим

$$E(R,t) = \frac{m_e}{e} \frac{\omega_0^2}{P(k) n^0_e} \left[\Psi_e(R,t) - \chi\, \Psi_i(R,0)\right] \frac{1}{R^k}. \tag{11}$$

Здесь $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n^0_e / m_e$, $P(k) = 1,\ 2\pi,\ 4\pi$ для плоской, цилиндрической и сферической симметрии; $\Psi_e(R,t) = P(k) \int\limits_0^R n_e(R,t) R^k dR$, $\Psi_i(R,t) = \chi P(k) \int\limits_\Delta^R n_i(R,0) R^k dR$ — функции массовой переменной Лагранжа [9], которые в данном случае определяют число электронов и ионов, а также величины их зарядов $q_e = e\Psi_e$, $q_i = |e|\Psi_i$ в объемах $V_e(0,R)$ и $V_i(\Delta,R)$.

Положим, что траектории различных элементов объемов не пересекаются, тогда число электронов в объеме V_e, задаваемом координатами $[0, R_*(0)]$ и $[0, R(t)]$, где $R_*(0), R(t)$ — начальное и конечное положения подвижной границы объема, не меняется с течением времени, поэтому можно написать следующее равенство [9]:

$$\int\limits_0^R n_e(R,t) R^k dR = \int\limits_0^{R_*} n_e(R_*,0) R^k_* dR_*. \tag{12}$$

Таким образом, учитывая (12), выражение (11) представим в виде

$$E(R_*, R) = \frac{m_e}{e}\left[C(R_*) - \chi\omega_0^2 \int\limits_\Delta^R f_i(R_*,0) R^k_* dR_*\right] \frac{1}{R^k}, \tag{13}$$

где $C(R_*) = \omega_0^2 \int\limits_0^{R_*} f_e(R_*,0) R^k_* dR_*$.

Подставляя (13) в уравнение (4), имеем

$$\frac{\partial V_e}{\partial t} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial R} + \nu_e V_e = \left[C(R_*) - \chi\omega_0^2 \int\limits_\Delta^R f_i(R_*,0) R^k_* dR_*\right] \frac{1}{R^k}. \tag{14}$$

Переходя к субстанциональной производной в (14), найдем

$$\frac{d^2R}{dt^2} + \nu_e \frac{dR}{dt} = \left[C(R_*) - \chi\omega_0^2 \int\limits_\Delta^R f_i(R_*,0) R^k_* dR_*\right] \frac{1}{R^k}. \tag{15}$$

Записывая (5) в переменных Лагранжа, получим уравнение для определения $n_e(R_*,t)$

$$n_e(R_*,t) = \chi n_i(R_*,0) + \frac{1}{4\pi e}\left(k\frac{E}{R} + \frac{\partial E}{\partial R} + \frac{\partial E}{\partial R_*} \frac{1}{\partial R/\partial R_*}\right). \tag{16}$$

3. Пусть $k = 0$, $n_i(R_*,0) = n^0_i$, т.е. $f_i(R_*,0) = 1$. В данном случае движение электронов с плоской симметрией происходит при $R < \Delta$ на фоне нейтральных частиц, а при $\Delta \le R \le R_c$ — на фоне нейтральных частиц и однородном фоне ионов плазмы.

а) Если $R < \Delta$, то решения системы уравнений (4)–(6), исходя из (13)–(16), даются выражениями

$$E(R_*) = \frac{m_e}{e} C(R_*), \tag{17}$$

$$R(R_*,t) = R_* + \frac{C(R_*)}{\nu_e^2}\left[\nu_e t - 1 + \exp(-\nu_e t)\right], \tag{18}$$

$$V_e(R_*, t) = \frac{C(R_*)}{\nu_e}\left[1 - \exp(-\nu_e t)\right], \tag{19}$$

$$n_e(R_*, t) = \frac{n_e^0 f_e(R_*, 0)}{1 + \frac{\omega_0^2}{\nu_e^2}\{\nu_e t - [1 - \exp(-\nu_e t)]\} f_e(R_*, 0)}. \tag{20}$$

Отметим, что в выражениях (17)–(20) содержатся значения констант интегрирования, которые были найдены с учетом начальных условий.

Из рассмотрения (17)–(20) видно, что $E(R_*) = \mathrm{const}\big|_R$ в силу плоской симметрии и начальных условий и $E(R_*) = \mathrm{const}\big|_t$ в силу того, что $\partial q_e/\partial t = 0$, где q_e — заряд электронов в объеме, ограниченном координатами $0 \le R \le R_*$ (см. (12)). При этом $E(R_*)$ соответствует напряженности заряженной бесконечной проводящей плоскости. Пусть для частиц, движущихся на отрезке $0 < R < \Delta$, выполнено $\nu_e t \gg 1$, тогда $R(R_*, t) \approx R_* + [C(R_*)/\nu_e]t$, $V_e(R_*, t) \to C(R_*)/\nu_e = \mathrm{const}\big|_t$, $n_e(R_*, t) \approx n_e^0 \nu_e/\omega_0^2 t$, а время их движения на данном отрезке оценим, используя выражение (18), где примем $R(R_*, t) \le \Delta$. Таким образом, имеем

$$t(R_*, \Delta) \le \frac{\nu_e R_*}{C(R_*)}\left(\frac{\Delta}{R_*} - 1\right). \tag{21}$$

Положив $f_e(R_*, 0) = \mu = \mathrm{const}$ (равномерное распределение $n_e(R_*, 0)$), из (21) получим

$$t(R_*, \Delta) \le \frac{\nu_e}{\mu\omega_0^2}\left(\frac{\Delta}{R_*} - 1\right). \tag{22}$$

В случае $\nu_e \to 0$ выражения (17)–(20) переходят в решения системы уравнений (4)–(6), определяющие движение электронов в вакууме [10].

б) Если $\Delta \le R \le R_c$ и $\nu_e < 2\omega_0$ (слабое сопротивление), то, учитывая (13)–(16), получим решения системы уравнений (4)–(6), которые имеют вид

$$E(R_*, t) = -\frac{m_e}{e}\,\omega_0^2 \exp\left(-\nu_e \frac{t}{2}\right)\left(G_1 \sin\Omega t + G_2 \cos\Omega t\right), \tag{23}$$

$$R(R_*, t) = \Delta + \frac{C(R_*)}{\omega_0^2} + \exp\left(-\nu_e \frac{t}{2}\right)\left(G_1 \sin\Omega t + G_2 \cos\Omega t\right), \tag{24}$$

$$V_e(R_*, t) = \exp\left(-\nu_e \frac{t}{2}\right)\left(G_3 \sin\Omega t + G_4 \cos\Omega t\right), \tag{25}$$

$$n_e(R_*, t) = \frac{n_e^0 f_e(R_*, 0)}{f_e(R_*, 0) + \exp\left(-\nu_e \frac{t}{2}\right)\left(G_1' \sin\Omega t + G_2' \cos\Omega t\right)}. \tag{26}$$

Здесь $\Omega = (4\pi e^2 n_i^0/m_e - \nu_e^2/4)^{1/2} = (\omega_0^2 - \nu_e^2/4)^{1/2}$, а G_1, G_2, G_3, G_4 являются функциями от R_*. Штрих в (26) означает дифференцирование по R_*. Из выражений (23)–(26) видно, что в случае $\nu_e t \gg 1$ колебания электронов затухают, а именно $E(R_*, t) \to 0$, $R(R_*, t) \to \Delta + C(R_*)/\omega_0^2$, $V_e(R_*, t) \to 0$, $n_e(R_*, t) \to n_e^0$, т. е. частицы стремятся к состоянию покоя. При этом они не должны покидать объем плазменного слоя, что выполняется, если $R(R_*, t) \to \Delta + C(R_*)/\omega_0^2 \le R_c$. Полагая $f_e(R_*, 0) = \mu$, имеем $R(R_*, t) \to \Delta + \mu R_* \le R_c$. Отсюда получим, что $\mu \le (R_c - \Delta)/R_*$, а принимая $R_* = \Delta$ (начальная координата фронта потока электронов), найдем максимальное значение $n_e(R_*, 0) = n_e^0\mu = n_e^0(R_c/\Delta - 1)$, для которого частицы на фронте потока не выйдут за R_c, т. е. $R(R_*, t) \le R_c$. Заметим, что определение констант G_1, G_2, G_3, G_4 связано с необходимостью использования выражений (17)–(20), задающих „начальные условия" решениям (23)–(26) в точке $R(R_*, t) = \Delta$. Чтобы в явном виде выразить G_1, G_2, G_3, G_4 при движении частиц в области $\Delta \le R \le R_c$, нужно каждой частице с координатой R_* из области $0 < R < \Delta$ найти соответствующие $t(R_*, \Delta)$ и $V_e(R_*, \Delta)$. Однако в общем случае сделать это невозможно, так как приходится решать нелинейные уравнения. Поэтому константы G_1, G_2, G_3, G_4 в (23)–(26) остались неопределенными.

в) Если $\Delta \le R \le R_c$ и $\nu_e > 2\omega_0$ (сильное сопротивление), то решения системы уравнений (2)–(4) с использованием (13)–(16) даются выражениями

$$E(R_*, t) = -\frac{m_e}{e}\omega_0^2 \exp\left(-\nu_e \frac{t}{2}\right) \times \left[G_5 \exp(\xi t) + G_6 \exp(-\xi t)\right], \tag{27}$$

$$R(R_*, t) = \Delta + \frac{C(R_*)}{\omega_0^2} + \exp\left(-\nu_e \frac{t}{2}\right)\left[G_5 \exp(\xi t) + G_6 \exp(-\xi t)\right], \tag{28}$$

$$V_e(R_*, t) = \xi \exp\left(-\nu_e \frac{t}{2}\right)\left[G_7 \exp(\xi t) - G_8 \exp(-\xi t)\right], \tag{29}$$

$$n_e(R_*, t) = \frac{n_e^0 f_e(R_*, 0)}{f_e(R_*, 0) + \exp\left(-\nu_e \frac{t}{2}\right)\left[G_5' \exp(\xi t) + G_6' \exp(-\xi t)\right]}, \tag{30}$$

где $\xi = (\nu_e^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$.

Выражения (27)–(30) определяют апериодическое движение частиц, стремящихся к своим положениям покоя, не испытывая колебаний. Если $\nu_e t \gg 1$, $\nu_e^2/\omega_0^2 \gg 1$, $R(R_*, t) \le R_c$, то из (27)–(30) имеем

$$E(R_*, t) \approx -(m_e/e)\omega_0^2 G_5 \exp\left[-\nu_e t/(\nu_e^2/\omega_0^2)\right],$$

$$R(R_*, t) \approx \Delta + C(R_*)/\omega_0^2 + G_5 \exp\left[-\nu_e t/(\nu_e^2/\omega_0^2)\right],$$

$$V_e(R_*) \approx \xi G_7 \exp\left[-\nu_e t/(\nu_e^2/\omega_0^2)\right],$$

$$n_e(R_*) \approx n_e^0 f_e(R_*, 0)/\left\{f_e(R_*, 0) + G_5' \exp[-\nu_e t/(\nu_e^2/\omega_0^2)]\right\}.$$

Отметим, что в решениях (27)–(30) константы G_5, G_6, G_7, G_8 не могут быть записаны в явном виде в общем случае.

Исследуем характер движения частиц на фронте электронного потока. Подставляя в формулы (27)–(30) выражения

$$C(\Delta) = \omega_0^2 f_e(\Delta, 0)\Delta,$$
$$G_5 = -(1 + \nu_e/2\xi) f_e(\Delta, 0)\Delta/2,$$
$$G_6 = -(1 - \nu_e/2\xi) f_e(\Delta, 0)\Delta/2,$$
$$G_7 = (1 - \nu_e/2\xi)G_5, \qquad G_8 = (1 + \nu_e/2\xi)G_6,$$
$$G_5' = -(1 + \nu_e/2\xi) f_e(\Delta, 0)/2,$$
$$G_6' = -(1 - \nu_e/2\xi) f_e(\Delta, 0)/2,$$

найденные для $R_* = \Delta$, $V_e(\Delta, 0) = 0$, получим

$$E(\Delta, t) = \frac{f_e(\Delta, 0)\Delta}{2}\frac{m_e}{e}\omega_0^2 \exp\Big(-\nu_e \frac{t}{2}\Big) \times \Big[\Big(1 + \frac{\nu_e}{2\xi}\Big)\exp(\xi t) + \Big(1 - \frac{\nu_e}{2\xi}\Big)\exp(-\xi t)\Big], \tag{31}$$

$$R(\Delta, t) = \Delta + f_e(\Delta, 0)\Delta\Big\{1 - \frac{1}{2}\exp\Big(-\nu_e \frac{t}{2}\Big) \times \Big[\Big(1 + \frac{\nu_e}{2\xi}\Big)\exp(\xi t) + \Big(1 - \frac{\nu_e}{2\xi}\Big)\exp(-\xi t)\Big]\Big\}, \tag{32}$$

$$V_e(\Delta, t) = -\frac{f_e(\Delta, 0)\Delta}{2}\Big(1 - \frac{\nu_e^2}{4\xi^2}\Big)\xi \exp\Big(-\nu_e \frac{t}{2}\Big) \times \big[\exp(\xi t) - \exp(-\xi t)\big], \tag{33}$$

$$n_e(\Delta, t) = \frac{n_e^0}{1 - \frac{1}{2}\exp\big(-\nu_e\frac{t}{2}\big)\big[\big(1+\frac{\nu_e}{2\xi}\big)\exp(\xi t) + \big(1-\frac{\nu_e}{2\xi}\big)\exp(-\xi t)\big]}. \tag{34}$$

Если $\nu_e t \gg 1$, $\nu_e^2/\omega_0^2 \gg 1$, то из (31)–(34) имеем

$$E(\Delta, t) \approx (m_e/e)\omega_0^2 f_e(\Delta, 0)\Delta \exp\big[-\nu_e t/(\nu_e^2/\omega_0^2)\big],$$
$$R(\Delta, t) \approx \Delta + f_e(\Delta, 0)\Delta\big\{1 - \exp\big[-\nu_e t/(\nu_e^2/\omega_0^2)\big]\big\},$$
$$V_e(\Delta, t) \approx \big[\omega_e^2 f_e(\Delta, 0)\Delta/\nu_e\big]\exp\big[-\nu_e t/(\nu_e^2/\omega_0^2)\big],$$
$$n_e(\Delta, t) \approx n_e^0/\big\{1 - \exp\big[-\nu_e t/(\nu_e^2/\omega_0^2)\big]\big\}.$$

Полагая в (32) $R(\Delta, t) = R_c$, найдем время достижения правой границы R_c фронтом потока электронов или время t_r (см. раздел 1)

$$t(\Delta, R_c) \approx -\frac{\nu_e}{\omega_0^2}\ln\Big[\frac{1}{f_e(\Delta, 0)}\Big(\frac{R_c}{\Delta} - 1\Big)\Big] \equiv t_r. \tag{35}$$

Пусть в (35) имеем $(R_c/\Delta - 1)/f_e(\Delta, 0) \approx 1$, тогда $t_r \to \infty$. Отсюда следует, что в данном случае электроны не могут достичь границы R_c. Рассмотрение (33) показывает, что если $t \ge 0$, то $V_e(\Delta, t) \ge 0$, т.е. знак скорости частиц на фронте потока не меняется. Скорость принимает свое максимальное значение, когда

$$t\big(V_{e\max}(\Delta)\big) = \frac{1}{2\xi}\ln\left(\frac{1 + 2\frac{\xi}{\nu_e}}{1 - 2\frac{\xi}{\nu_e}}\right). \tag{36}$$

Если $\nu_e^2/\omega_0^2 \gg 1$ из (36) имеем $t\big(V_{e\max}(\Delta)\big) \approx \approx (2/\nu_e)\ln(\nu_e/\omega_0)$. Для этого значения $t\big(V_{e\max}(\Delta)\big)$ из выражения (33) найдем

$$V_{e\max}(\Delta) \approx f_e(\Delta, 0)\Delta\frac{\omega_0^2}{\nu_e}. \tag{37}$$

В случае $f_e(R_*, 0) = \mu$ из (35) и (37) получим $t(\Delta, R_c) \approx -(\nu_e/\omega_0^2)\ln[1 - (R_c - \Delta)/\mu\Delta]$ и $V_{e\max}(\Delta) \approx \approx \mu\Delta\omega_0^2/\nu_e$ соответственно.

4. Уравнение (14) можно привести к уравнению Абеля второго рода [11]

$$V_e\frac{\partial V_e}{\partial R} + \nu_e V_e = \Big[C(R_*) - \chi\omega_0^2\int\limits_{\Delta}^{R} f_i(R_*, 0)R_*^k dR_*\Big]\frac{1}{R^k}. \tag{38}$$

Если $\nu_e = 0$, то решение уравнения (38) запишем следующим образом:

$$V_e(R_*, R) = \sqrt{2\int\limits_{R_*}^{R}\Big[C(R_*) - \chi\omega_0^2\int\limits_{\Delta}^{R} f_i(R_*, 0)R_*^k dR_*\Big]\frac{dR}{R^k}}. \tag{39}$$

Учитывая, что $V_e = dR/dt$, где R — зависящая от времени координата фиксированной частицы среды, из (39) получим

$$t(R_*, R) = \pm\int\limits_{R_*}^{R}\frac{dR}{\sqrt{2\int\limits_{R_*}^{R}\Big[C(R_*) - \chi\omega_0^2\int\limits_{\Delta}^{R} f_i(R_*)R_*^k dR_*\Big]\frac{dR}{R^k}}}. \tag{40}$$

Записывая уравнение (5) в переменных Лагранжа и используя выражения (13), (40), определим $n_e(R_*, R)$

$$n_e(R_*, R) = \chi n_i^0 + \frac{1}{4\pi e}\Big(k\frac{E}{R} + \frac{\partial E}{\partial R} - \frac{\partial E}{\partial R_*}\frac{\partial t/\partial R}{\partial t/\partial R_*}\Big). \tag{41}$$

Положим, например, $k = 2$ (варианты $k = 0$, 1 могут быть рассмотрены аналогичным образом). Пусть $n_i(R_*, 0) = n_i^0$, т.е. $f_i(R_*, 0) = 1$. В данном случае движение электронов со сферической симметрией происходит при $R < \Delta$ в вакууме, а при $\Delta \le R \le R_c$ — на однородном фоне ионов плазмы.

а) Если $R < \Delta$, то решения системы (4)–(6), исходя из (13), (39)–(41), имеют вид

$$E(R_*, R) = \frac{m_e}{e}\frac{C(R_*)}{R^2}, \tag{42}$$

$$V_e(R_*, R) = \sqrt{\frac{2C(R_*)}{R_*}\Big(1 - \frac{R_*}{R}\Big)}, \tag{43}$$

$$t(R_*, R) = \sqrt{\frac{R_*^3}{2C(R_*)}}\left(\frac{R}{R_*}\sqrt{1 - \frac{R_*}{R}} - \mathrm{Arth}\sqrt{1 - \frac{R_*}{R}}\right), \tag{44}$$

$$n_e(R_*, R) = n_e^0 \frac{R_*^3}{R^3}$$

$$\times \frac{f_e(R_*, 0)}{1 - \frac{3}{2}\left[1 - \frac{\omega_0^2 f_e(R_*, 0) R_*^3}{3C(R_*)}\right]\left(1 - \frac{R_*}{R}\sqrt{\frac{R}{R - R_*}}\,\mathrm{Arth}\sqrt{1 - \frac{R_*}{R}}\right)}. \qquad (45)$$

Из рассмотрения (42) видно, что $E(R_*, R) \sim 1/R^2$ в силу того, что имеет место сферическая симметрия электронного потока. Так как в выражении (43) $V_e(R_*, R) > 0$, поэтому движение электронов происходит без пересечения траекторий частиц. При $R_*/R \ll 1$ из (43), (44) имеем $V_e(R_*) \approx \sqrt{2C(R_*)/R_*} = \mathrm{const}\big|_R$, $t(R_*, R) \approx (R/R_*)\sqrt{R_*^3/2C(R_*)}$ соответственно, т. е. скорость движения не зависит от расстояния, а время растет с расстоянием линейно. Если $f_e(R_*, 0) = \mu$, то $V_e(R_*) \sim R_*$. Отсюда следует, что в случае задания равномерного распределения $n_e(R_*, R)$ частицы не обгоняют друг друга. Положив в (43) $R = \Delta$, получим формулу, определяющую величину скорости, с которой частица с начальной координатой R_* попадает на слой ионов плазмы или отрезок $(R_c - \Delta)$

$$V_e(R_*, \Delta) = \sqrt{\frac{2C(R_*)}{R_*}\left(1 - \frac{R_*}{\Delta}\right)}. \qquad (46)$$

Выражение (46) является „начальным условием" при определении величины $V_e(R_*, R)$ для частиц, которые начинают движение на фоне ионов. Рассмотрение (45) показывает, что в данном случае концентрация электронов при движении в вакууме падает как $n_e(R_*, R) \sim 1/R^3$.

б) Если $\Delta \le R \le R_c$, то решения системы (2)–(4), исходя из (13), (39)–(40), запишем следующим образом:

$$E(R_*, R) = \frac{m_e}{e}\frac{\omega_0^2}{3}\left\{\left[1 + \frac{3C(R_*)}{\omega_0^2\Delta^3}\right]\frac{\Delta^3}{R^2} - R\right\}, \qquad (47)$$

$$V_e(R_*, R) = \omega_0 R_*$$

$$\times \sqrt{\frac{2}{3}\left[\frac{3C(R_*)}{\omega_0^2 R_*^3} + \frac{\Delta^3}{R_*^3}\right]\left(1 - \frac{R_*}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{R^2}{R_*^2}\right)}, \qquad (48)$$

$$t(R_*, R) = \pm\frac{1}{\omega_0 R_*}$$

$$\times \int\limits_{R_*}^{R} \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{3}\left[\frac{3C(R_*)}{\omega_0^2 R_*^3} + \frac{\Delta^3}{R_*^3}\right]\left(1 - \frac{R_*}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{R^2}{R_*^2}\right)}}. \qquad (49)$$

Интеграл в выражении (49) можно привести к эллиптическому интегралу 3-го рода [12], который не представим в виде элементарных функций (при значениях $k = 0$, 1 данное замечание снимается). Чтобы получить аналитическое выражение $t(R_*, R)$, рассмотрим интеграл в (49) в двух случаях: $R_*/R \approx 1$ и $R_*/R \ll 1$. Пусть $R_*/R \approx 1$, тогда $R/R_* \approx 1$, $R_*/\Delta \approx 1$. Таким образом, из (49) найдем

$$t(R_*, R) \approx \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{\omega_0^2 R_*^3}{2C(R_*)}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}. \qquad (50)$$

Если $R_*/R \ll 1$, то $R/R_* \gg 1$, поэтому из (49) найдем

$$t(R_*, R) \approx \frac{\sqrt{3}}{\omega_0}\,\mathrm{arcSin}\left\{\frac{\frac{R}{R_*}}{\sqrt{2\left[\frac{3C(R_*)}{\omega_0^2 R_*^3} + \frac{\Delta^3}{R_*^3}\right]}}\right\}, \qquad (51)$$

где было учтено, что $\sqrt{2[3C(R_*)/\omega_0^2 R_*^3 + \Delta^3/R_*^3]} \gg 1$.

Полагая в (51) $R_* = \Delta$, а $R = R_*$, получим время движения фронта электронов до границы R_c (ср. (35))

$$t(\Delta, R_c) \approx \frac{\sqrt{3}}{\omega_0}\,\mathrm{arcSin}\left\{\frac{\frac{R_c}{\Delta}}{\sqrt{2[f_e(\Delta, 0) + 1]}}\right\} \equiv t_r. \qquad (52)$$

В дальнейшем электроны фронта покидают объем слоя, но движения вне слоя не рассматриваются. Заметим, что если $f_e(R_*, 0) = 1$, $R_c/\Delta = 2$, то $t_r \equiv \pi\sqrt{3}/2\omega_0$.

Для определения $n_e(R_*, R)$ примем сначала $R_*/R \approx 1$, тогда $t(R_*, R)$ выражается формулой (50). Подставляя (47) и (50) в (41), имеем

$$n_e(R_*, R) \approx n_e^0 f_e(R_*, 0). \qquad (53)$$

Данный результат объясняется тем, что условие $R_*/R \approx 1$ относится к частицам, начальное местоположение которых близко к координате Δ, т. е. $R_*/\Delta \approx 1$. При этом время для них $t(R_*, R) \approx 0$ (см. (50)). Фактически же настоящие приближения применимы лишь к частице на фронте электронного потока, имеющей координату $R_* = \Delta$ и начинающей движение на отрезке $(R_c - \Delta)$. Поэтому $n_e(R_*, R)$ соответствует начальному распределению. Если $R_*/R \ll 1$, то $t(R_*, R)$ выражается формулой (51). Подставляя (47) и (51) в (41), получим

$$n_e(R_*, R) = n_e^0 \frac{R_*^3}{R^3}\frac{2}{3}\left[\frac{3C(R_*)}{\omega_0^2 R_*^3} + \frac{\Delta^3}{R_*^3} - 1\right]. \qquad (54)$$

Чтобы рассмотреть динамику электронов двойного плазменного слоя в случае конкретного начального распределения электронов, положим в формулах (42)–(45), а также в формулах (47), (48), (50), (51), (53), (54), например, $f_e(R_*, 0) = \mu$.

Если $R < \Delta$, то решения системы (4)–(6), исходя из (42)–(45), имеют вид

$$E(R_*, R) = \mu\,\frac{m_e}{e}\frac{\omega_0^2}{3}\frac{R_*^3}{R^2}, \qquad (55)$$

$$V_e(R_*, R) = \omega_0 R_* \sqrt{\frac{2}{3}\mu\left(1 - \frac{R_*}{R}\right)}, \qquad (56)$$

$$t(R_*, R) = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{3}{2\mu}}\left(\frac{R}{R_*}\sqrt{1 - \frac{R_*}{R}} - \mathrm{Arth}\sqrt{1 - \frac{R_*}{R}}\right), \qquad (57)$$

$$n_e(R_*, R) = \mu\, n_e^0 \frac{R_*^3}{R^3}. \qquad (58)$$

Отметим, что формулы (55)–(58) были получены также в работе [10].

Если $\Delta \le R \le R_c$, то решения системы (2)–(4), исходя из (47), (48), (50), (51), (53), (54), запишем следующим образом:

$$E(R_*, R) = \frac{m_e}{e}\frac{\omega_0^2}{3}\left[\left(1 + \mu\frac{R_*^3}{\Delta^3}\right)\frac{\Delta^3}{R^2} - R\right], \qquad (59)$$

$$V_e(R_*, R) = \omega_0 R_* \sqrt{\frac{2}{3}\left(\mu + \frac{\Delta^3}{R_*^2}\right)\left(1 - \frac{R_*}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{R^2}{R_*^2}\right)}, \qquad (60)$$

$$t(R_*, R) \approx \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{6}{\mu}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}, \quad R_*/R \approx 1, \qquad (61)$$

$$n_e(R_*, R) \approx \mu\, n_e^0, \quad R_*/R \approx 1, \qquad (62)$$

$$t(R_*, R) \approx \frac{\sqrt{3}}{\omega_0}\,\mathrm{arcSin}\left[\frac{\frac{R}{R_*}}{\sqrt{2\left(\mu + \frac{\Delta^3}{R_*^3}\right)}}\right], \quad R_*/R \ll 1, \qquad (63)$$

$$n_e(R_*, R) \approx n_e^0\frac{R_*^3}{R^3}\frac{2}{3}\left(\mu + \frac{\Delta^3}{R_*^3}\right), \quad R_*/R \ll 1. \qquad (64)$$

5. В заключение обсудим условия, в которых справедливы упрощающие предположения, принятые при постановке задачи.

а) Использование гидродинамического приближения холодной плазмы для электронов предполагает, что не учитываются тепловые скорости. Это возможно, когда направленная скорость электронов плазмы, приобретенная в электрическом поле, намного превышает их тепловые скорости, т.е.

$$\left|\frac{V_e(R_*, t), V_e(R_*, R)}{V_{eT}}\right| \gg 1, \qquad (65)$$

где V_{eT} — тепловая скорость электронов плазмы.

Пусть $k = 0$. В этом случае для определения условий выполнения неравенства (65) можно воспользоваться формулами (19), (37), выражающими $V_e(R_*, t)$, в которых найдены константы интегрирования. Если выбрать, например, формулу (37) и подставить ее в (64), то получим условие, связывающее параметры среды n_e^0, ν_e, V_{eT} и геометрический фактор Δ, когда данное неравенство будет справедливо. Таким образом, из (65) имеем

$$\frac{\omega_0^2}{\nu_e}\frac{\Delta}{V_{eT}} \gg 1. \qquad (66)$$

Аналогичные оценки можно сделать для значения $k = 2$.

б) При постановке задачи было пренебрежено движением ионов, т.е. считалось, что ионы обладают бесконечно большой массой ($m_i \to \infty$). Данное приближение ограничивает время рассмотрения процессов в системе и справедливо в случае, если имеет место неравенство

$$t \ll T_i \approx \frac{1}{\omega_{0i}}, \qquad (67)$$

где $\omega_{0i}^2 = 4\pi e^2 n_i^0/m_i$.

в) Применяемый метод решения не допускает, чтобы определяемые решениями тректории различных элементов объемов электронов пересекались, что может вызвать появление ударных волн, разрывы плотности среды и т.д. Условие непересекаемости траекторий различных элементов объемов электронов выполнено, если $\partial R/\partial R_* > 0$, тогда $n_e(R_*)/(\partial R/\partial R_*) > 0$. Если $n_e(R_*) = n_e^0$, то достаточным условием непересекаемости различных элементов объемов электронов является $|(dV_e(R_*, 0)/d(R_*))/\omega_0| < 1$, т.е. распределение по R_* начальной скорости $V_e(R_*, 0)$ должно быть достаточно однородным [10].

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 167 с.

[2] *Искусственные* пучки частиц в космической плазме / Под ред. Б.М. Гранналя. М.: Мир, 1985. 456 с.

[3] *Eliezer S., Hora H.* // Phys. Rep. 1989. Vol. 172. N 6 (whole issue). P. 339–407.

[4] *Block L.P.* Phys. of Hot Plasma in the Magnetosphere / Ed. B. Hultquist, L. Stenflo. New York; London: Plenum Press, 1975. P. 229–250.

[5] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1929. Vol. 33. P. 954–989.

[6] *Bernstein I.B., Green J.M., Kruskal M.D.* // Phys. Rev. 1957. Vol. 108. P. 546–550.

[7] *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1970. 208 с.

[8] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.

[9] *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.

[10] *Федоров В.А.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 1. С. 103–109.

[11] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

[12] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.