

01;03;05

## Стохастическая теория прерывистого режима плавления ультратонкой пленки смазки

© А.В. Хоменко, Я.А. Ляшенко

Сумский государственный университет,  
40007 Сумы, Украина  
e-mail: khom@phe.sumdu.edu.ua

(Поступило в Редакцию 4 октября 2004 г.)

В рамках модели Лоренца исследуется плавление ультратонкой пленки смазки в процессе трения между атомарно плоскими поверхностями. Введены аддитивные шумы сдвиговых напряжений и деформации, а также температуры пленки и построена фазовая диаграмма, где интенсивность шума этой температуры и температура поверхностей трения определяют области жидкостного, сухого и прерывистого трения. Найдены условия, при которых последнее отвечает режиму перемежаемости, присущему явлению самоорганизуемой критичности. Самоподобное распределение напряжений представляется при учете их нелинейности релаксации и дробных обратных связей в системе Лоренца и обеспечивается флуктуациями температуры. Такая дробная схема используется для построения фазовой диаграммы, определяющей различные режимы трения. Исследование соответствующего дробного уравнения Фоккера–Планка показывает, что прерывистый режим трения отвечает процессу субдиффузии.

### Введение

В последние годы проблемы трения скольжения гладких твердых поверхностей при наличии тонкой пленки смазки между ними привлекают повышенное внимание [1]. Это обусловлено тем, что потребность в слаботрущихся деталях растет в таких высокотехнологических компонентах, как компьютерные запоминающие устройства, миниатюрные двигатели, аэрокосмические приборы. Значительно продвинулись в понимании физики трения позволило экспериментальное исследование атомарно-плоских поверхностей слюды, разделенных ультратонким слоем органической смазки, которая при определенных условиях проявляла свойства твердого тела [2]. В частности, наблюдалось присущее сухому трению прерывистое движение (stick-slip) [3–6], которое является основной причиной разрушения и изнашивания трущихся деталей. Такой граничный режим реализуется, если пленка смазочного материала имеет менее четырех молекулярных слоев и объясняется как затвердевание, обусловленное сжатием стенок. Последующее скачкообразное плавление происходит, когда сдвиговое напряжение превышает критическое значение за счет эффекта „плавления, вызванного сдвигом“.

Таким образом, молекулярные тонкие пленки испытывают фазовые переходы между твердоподобными и жидкоподобными фазами [2,7], причем свойства последних невозможно описать, даже качественно, в терминах, приемлемых для свойств жидкости, занимающей большой объем, таких, например, как вязкость. Эти пленки характеризуются пределом текучести, который является характеристикой разрушения в твердых телах, а их времена молекулярной диффузии и релаксации могут более чем на десять порядков превышать значения

соответствующих времен для объемной жидкости или даже пленок, которые только немного толще.

Исследование влияния шума на процесс трения скольжения также имеет фундаментальное и практическое значение, поскольку в конкретных экспериментальных ситуациях флуктуации изменяют фрикционное поведение критическим образом, например, обеспечивая условия для уменьшения трения [1,8,9]. В частности, тепловой шум, проявляющийся в любых экспериментах, может переводить ультратонкую пленку смазки из устойчивого твердоподобного состояния в жидкоподобное и таким образом преобразовывать сухое трение в жидкостное или прерывистый (stick-slip) режим. Поэтому в последнее время значительное внимание уделялось исследованию влияния шума и случайных примесей в граничной области на статическое и динамическое трение [10–12]. Показано, что периодические поверхности характеризуются меньшим коэффициентом трения в процессе скольжения, чем непериодические.

В работах [13,14] развит подход, согласно которому переход ультратонкой пленки смазки из твердоподобного в жидкоподобное состояние происходит в результате термодинамического и сдвигового плавления. Проведено совокупное аналитическое описание этих процессов в результате самоорганизации полей сдвиговых напряжений и деформации, а также температуры пленки смазки с учетом аддитивных шумов указанных величин (раздел 1). Однако при этом остался в стороне вопрос о возможности возникновения в системе режима самоорганизуемой критичности (СОК) [15]. Предлагаемая работа посвящена выяснению условий его реализации в рамках модели Лоренца, отвечающей полемому представлению вязкоупругой среды [16].

Такой режим соответствует случаю, при котором распределение напряжений имеет степенной вид с дробным

показателем. Поэтому в разделе 2 проведено обобщение системы Лоренца, позволяющее в согласии с экспериментальными данными [2] описать прерывистое плавление пленки смазки и, как следствие, соответствующий режим трения. По аналогии с [14] построена фазовая диаграмма, определяющая также изменение областей жидкостного, прерывистого и сухого трения в зависимости от дробного показателя в модифицированной системе Лоренца. Согласно разделу 3, данное обобщение позволяет представить поведение системы в рамках неаддитивной термодинамики [17]. Такое представление достигается при использовании дробной системы Лоренца, где роль параметра порядка играют напряжения, сопряженное поле сводится к неаддитивной сложности (complexity), а внутренняя энергия является управляющим параметром. В результате оказывается, что распределение напряжений, присущее СОК, обеспечивается флуктуациями энергии. Это распределение представляет, с одной стороны, решение нелинейного уравнения Фоккера–Планка, описывающего поведение неаддитивной системы [17], а с другой — отвечает дробному уравнению Фоккера–Планка для полетов Леви [18]. Сопоставление решений указанных уравнений приводит к установлению связи между показателем в распределении напряжений (характеристическим показателем мультипликативного шума), фрактальной размерностью фазового пространства, числом уравнений, необходимых для представления самосогласованного поведения системы в режиме СОК, динамическим показателем и параметром неаддитивности Цаллиса. Показано, что прерывистый режим трения представляет процесс субдиффузии.

## 1. Основные уравнения и влияние шума

В предыдущей работе [13] на основе реологического описания вязкоупругой среды, обладающей теплопроводностью, была получена система кинетических уравнений, которые определяют взаимно согласованное поведение сдвиговых напряжений  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$ , а также температуры  $T$  в ультратонкой пленке смазки в процессе трения между атомарно-плоскими слюдяными поверхностями. Запишем эти уравнения, используя единицы измерения:

$$\sigma_s = \left( \frac{\rho c_v \eta_0 T_c}{\tau_T} \right)^{1/2},$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{G_0} \equiv \left( \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_T} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho c_v T_c \tau_\varepsilon}{\eta_0} \right)^{1/2}, \quad T_c \quad (1)$$

для переменных  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$  соответственно, где  $\rho$  — плотность масла,  $c_v$  — удельная теплоемкость,  $T_c$  — критическая температура,  $\eta_0 \equiv \eta(T = 2T_c)$  — характерное значение сдвиговой вязкости,  $\tau_T \equiv \rho l^2 c_v / \kappa$  — время теплопроводности,  $l$  — длина теплопроводности,  $\kappa$  —

коэффициент теплопроводности,  $\tau_\varepsilon$  — время релаксации деформации,  $G_0 \equiv \eta_0 / \tau_\varepsilon$ :

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + g \varepsilon, \quad (2)$$

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + (T - 1)\sigma, \quad (3)$$

$$\tau_T \dot{T} = (T_e - T) - \sigma \varepsilon + \sigma^2. \quad (4)$$

Здесь введены время релаксации напряжений  $\tau_\sigma$ , температура  $T_e$  атомарно-плоских слюдяных поверхностей трения и постоянная  $g = G/G_0 < 1$ , где  $G$  — модуль сдвига смазки. Уравнение (2) сводится к соотношению типа Максвелла для описания вязкоупругой среды путем замены  $\varepsilon/\tau_\sigma$  на  $\partial\varepsilon/\partial t$ . Выражение (3) имеет вид соответствующего уравнения Кельвина–Фойгта [13,19], которое учитывает зависимость сдвиговой вязкости от безразмерной температуры  $\eta = \eta_0/(T - 1)$ . Уравнение (4) представляет собой выражение для теплопроводности, которое описывает передачу тепла от поверхностей трения к пленке смазки, эффект диссипативного разогрева вязкой жидкости, текущей под действием напряжений, и обратимый механокалорический эффект в линейном приближении. Эти уравнения формально совпадают с синергетической системой Лоренца [20,21], в которой сдвиговые напряжения играют роль параметра порядка, сопряженное поле сводится к сдвиговой деформации, а температура представляет управляющий параметр. Известно, что эта система используется для описания как фазовых термодинамических, так и кинетических превращений.

В работе [13] плавление ультратонкой пленки смазки в процессе трения между атомарно-плоскими поверхностями слюды представлено как результат спонтанного появления сдвиговых напряжений, вызванного нагревом поверхностей трения выше критического значения  $T_{c0} = 1 + g^{-1}$ . Исходной причиной процесса самоорганизации является положительная обратная связь  $T$  и  $\sigma$  с  $\varepsilon$  (см. (3)), обусловленная температурной зависимостью сдвиговой вязкости, приводящей к ее расходимости. С другой стороны, отрицательная обратная связь  $\sigma$  и  $\varepsilon$  с  $T$  в (4) играет важную роль, поскольку она обеспечивает устойчивость системы.

Согласно такому подходу, смазка представляет очень вязкую жидкость, которая ведет себя подобно аморфному твердому телу: имеет большую эффективную вязкость и все еще характеризуется пределом текучести [2,19]. Ее твердоподобное состояние соответствует сдвиговым напряжениям  $\sigma = 0$ , поскольку уравнение (2), описывающее упругие свойства в стационарном состоянии  $\dot{\sigma} = 0$ , выпадает из рассмотрения. Уравнение (3), содержащее вязкие напряжения, сводится к закону Дебая, представляющему быструю релаксацию сдвиговой деформации в течение микроскопического времени  $\tau_\varepsilon \approx a/c \sim 10^{-12}$  s, где  $a \sim 1$  nm — постоянная решетка, или межмолекулярное расстояние, и  $c \sim 10^3$  m/s — скорость звука. При этом уравнение теплопроводности (4) принимает вид простейшего выражения для релаксации температуры, которое не содержит

слагаемых, представляющих диссипативный разогрев и механокалорический эффект вязкой жидкости.

При ненулевых значениях напряжений  $\sigma$  уравнения (2)–(4) описывают указанные выше свойства, присущие жидкоподобному состоянию смазки. Более того, в соответствии с [6] в отсутствие деформации сдвига тепловое среднеквадратичное отклонение молекул (атомов) определяется равенством  $\langle u^2 \rangle = T/Ga$ . Среднее значение смещения за счет сдвига находится из соотношения  $\langle u^2 \rangle = \sigma^2 a^2 / G^2$ . Полное среднеквадратичное смещение представляет сумму этих выражений при условии, что тепловые флуктуации и напряжения независимы. Это означает, что плавление смазки вызывается как нагреванием, так и влиянием напряжений, создаваемых твердыми поверхностями при трении. Последнее согласуется с рассмотрением неустойчивости твердopodobного состояния в рамках представлений о сдвиговом динамическом плавлении при отсутствии тепловых флуктуаций. Таким образом, флуктуации деформации, связанные с напряжениями, и тепловые флуктуации следует рассматривать независимо. Будем предполагать, что пленка смазки становится более жидкоподобной и сила трения уменьшается с ростом температуры за счет уменьшения энергии активации скачков молекул. Кроме того, сила трения уменьшается с увеличением относительной скорости движения контактирующих поверхностей  $V = l \partial \varepsilon / \partial t$ , поскольку последнее приводит к росту сдвиговых напряжений согласно соотношению максвелловского типа между напряжениями и деформацией  $\varepsilon$ :  $\partial \sigma / \partial t = -\sigma / \tau_\sigma + G \partial \varepsilon / \partial t$ .

Уравнения Лоренца (2)–(4) имеют макроскопический характер, благодаря чему напряжения  $\sigma$  и деформация  $\varepsilon$ , а также температура  $T$  представляют величины, усредненные по физически малому объему. На расстояниях порядка длины теплопроводности проявляются флуктуации, для учета которых введем в правые части (2)–(4) стохастические слагаемые в виде аддитивных шумов  $I_\sigma^{1/2} \xi$ ,  $I_\varepsilon^{1/2} \xi$ ,  $I_T^{1/2} \xi$  (здесь интенсивности  $I_\sigma$ ,  $I_\varepsilon$ ,  $I_T$  измерены в единицах  $\sigma_s^2$ ,  $\varepsilon_s^2 \tau_\varepsilon^{-2}$ ,  $(T_c \kappa / l)^2$  соответственно;  $\xi(t)$  —  $\delta$ -коррелированная стохастическая функция) [14,22]. Согласно экспериментальным данным для органических смазочных материалов [2], время релаксации напряжений при нормальном давлении составляет  $\tau_\sigma \sim 10^{-10}$  с и возрастает на несколько порядков при высоких давлениях. Поскольку ультратонкая пленка смазки имеет менее четырех молекулярных слоев, температура релаксирует к значению  $T_e$  в течение времени, удовлетворяющего условию  $\tau_T \ll \tau_\sigma$ . Тогда в рамках адиабатического приближения  $\tau_\sigma \gg \tau_\varepsilon$ ,  $\tau_T$  [20,21] уравнения (2)–(4) приводят к уравнению Ланжевена [14]

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = f(\sigma) + \sqrt{I(\sigma)} \xi(t), \quad f \equiv -\frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad (5)$$

где сила  $f$  задается синергетическим потенциалом

$$V = \frac{1}{2} (1-g) \sigma^2 + g \left( 1 - \frac{T_e}{2} \right) \ln(1 + \sigma^2), \quad (6)$$

а эффективная интенсивность шума выражается равенством

$$I(\sigma) \equiv I_\sigma + (I_\varepsilon + I_T \sigma^2) g^2 d^2(\sigma), \quad (7)$$

следующим из свойства аддитивности дисперсий гауссовых случайных величин [22]. Стационарное распределение решений уравнения (5)

$$P(\sigma) = Z^{-1} \exp\{-U(\sigma)\} \quad (8)$$

определяется нормировочной постоянной  $Z$  и эффективным потенциалом

$$U(\sigma) = \ln I(\sigma) - \int_0^\sigma \frac{f(\sigma')}{I(\sigma')} d\sigma', \quad f \equiv -\frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad (9)$$

где  $V$  — синергетический потенциал (6) и  $I(\sigma)$  — интенсивность шума (7) [23].

Уравнение, определяющее положение максимумов функции распределения  $P(\sigma)$ , имеет вид

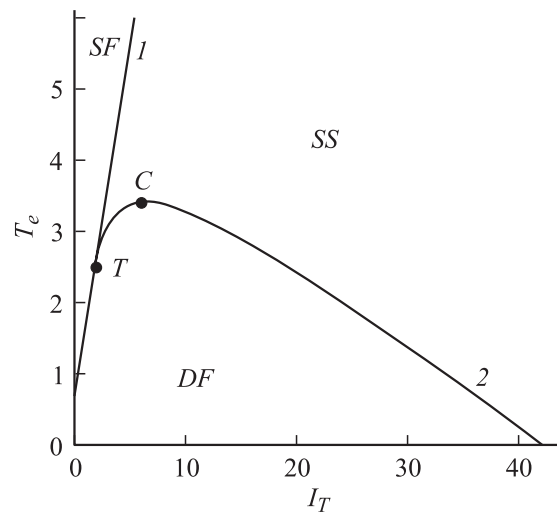
$$(1-g)x^3 + g(2-T_e)x^2 - 2g^2 I_T x + 4g^2(I_T - I_\varepsilon) = 0, \quad x \equiv 1 + \sigma^2. \quad (10)$$

Таким образом, распределение  $P(\sigma)$  не зависит от интенсивности шума  $I_\sigma$  напряжений  $\sigma$  и задается температурой поверхностей трения  $T_e$ , интенсивностями шумов  $I_\varepsilon$ ,  $I_T$  деформации  $\varepsilon$  и температуры пленки смазки  $T$ , а также параметром  $g$ .

При фиксированной интенсивности  $I_\varepsilon$  фазовая диаграмма имеет вид, показанный на рис. 1, где линии 1, 2 отвечают пределам потери устойчивости системы. Выше прямой 1, определяемой равенством

$$T^c = 1 + g^{-1} + 2g(I_T - 2I_\varepsilon), \quad (11)$$

наиболее вероятное значение напряжений  $\sigma \neq 0$  и смазка находится в жидкоподобной фазе, обеспечивая устойчивое жидкостное трение и, как следствие, скольжение



**Рис. 1.** Фазовая диаграмма при  $g = 0.5$ ,  $I_\varepsilon = 1.2$ . 1 и 2 определяют границу областей устойчивости жидкостного (SF), сухого (DF) и прерывистого (SS) трения ( $T$  — трикритическая точка,  $C$  — критическая точка).

(SF). Ниже кривой 2, касающейся прямой 1 в трикритической точке  $T$  с координатами

$$\begin{aligned} T_e^c &= \frac{2}{3} (1 + 2g^{-1} - 2gI_\varepsilon), \\ I_T^c &= \frac{1}{6g} (g^{-1} - 1 + 8gI_\varepsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

имеется максимум функции  $P(\sigma)$  только в точке  $\sigma = 0$  и реализуется сухое трение (DF), характерное для твердоподобной пленки смазки. Между этими линиями максимумы  $P(\sigma)$  отвечают нулевому и ненулевому значениям напряжений, т.е. расположена область прерывистого (stick-slip) трения (SS), при котором происходят периодические переходы между указанными динамическими режимами трения. Это характерно для режима перемежаемости при плавлении смазки, где имеет место смесь твердоподобного и жидкоподобного состояний. Согласно (12), такая ситуация возможна даже при нулевой температуре  $T_e$  поверхностей трения, если интенсивность флуктуаций деформации превышает критическое значение  $I_\varepsilon = (1 + 2g^{-1})/2g$ . При этом реализуется поведение, присущее режиму СОК [15].

## 2. Самоподобный режим

Для дальнейшего исследования системы следует найти распределение вероятности (8), вид которого определяется эффективным потенциалом (9). Флуктуации температуры  $I_T \gg I_\varepsilon, I_\sigma$  приводят к выражению

$$\begin{aligned} P(\sigma) &\approx I_T^{-1} [g\sigma d(\sigma)]^{-2} \\ &\times \exp \left\{ I_T^{-1} g^{-2} \int f(\sigma) [\sigma d(\sigma)]^{-2} d\sigma \right\}, \\ f(\sigma) &= -\sigma(1-g) + g(T_e - 2)\sigma d(\sigma), \\ d(\sigma) &\equiv (1 + \sigma^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку в пределе  $\sigma \rightarrow 0$  интеграл в (13) стремится к константе, а  $d(\sigma) \rightarrow 1$ , полученное распределение характеризуется степенной асимптотикой  $P(\sigma) \sim \sigma^{-2}$ . Таким образом, устанавливается определяемый однородный функцией

$$P(y) = y^{-2a} \mathcal{P}(\sigma), \quad y = \sigma\sigma_s \quad (14)$$

с целым показателем  $2a = 2$  самоподобный режим, в котором отсутствует характерный масштаб напряжений [24].

Однако в общем случае этот показатель может быть не целым, а дробным, в частности, режиму СОК отвечает значение  $2a = 1.5$ . Во избежание такого ограничения заменим параметр порядка  $\sigma$  во всех слагаемых уравнений (2)–(4) степенным выражением  $\sigma^a$  с показателем  $0 \leq a \leq 1$ . Тогда с учетом стохастических добавок основные уравнения принимают вид

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma^a + g\varepsilon + \sqrt{I_\sigma} \xi(t), \quad (15)$$

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + (T - 1)\sigma^a + \sqrt{I_\varepsilon} \xi(t), \quad (16)$$

$$\tau_T \dot{T} = (T_e - T) - \sigma^a \varepsilon + \sigma^{2a} + \sqrt{I_T} \xi(t), \quad (17)$$

где использованы безразмерные переменные. Физический смысл проведенной замены состоит в том, что требование самоподобия достигается в рамках предположений о нелинейной релаксации напряжений, а также о дробном характере положительной и отрицательной обратных связей. Условие адиабатичности  $\tau_\varepsilon, \tau_T \ll \tau_\sigma$  немедленно приводит к уравнению Ланжевена (ср. с (5))

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = f_a(\sigma) + \sqrt{I_a(\sigma)} \xi(t), \quad (18)$$

где сила  $f_a(\sigma)$  и интенсивность шума  $I_a(\sigma)$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} f_a(\sigma) &\equiv -\sigma^a + g\sigma^a [1 - (2 - T_e)d_a(\sigma)], \\ I_a(\sigma) &\equiv I_\sigma + g^2(I_\varepsilon + I_T\sigma^{2a})d_a^2(\sigma), \\ d_a(\sigma) &\equiv (1 + \sigma^{2a})^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Соответствующее распределение (ср. с (8))

$$P_a(\sigma) = \frac{Z^{-1}}{I_a(\sigma)} \exp(-V_a(\sigma)) \quad (20)$$

задается статистической суммой  $Z$  и эффективным потенциалом

$$V_a(\sigma) \equiv - \int_0^\sigma \frac{f_a(\sigma')}{I_a(\sigma')} d\sigma'. \quad (21)$$

Точки экстремума этого распределения определяются уравнением

$$\frac{T_e - 2}{1 + \sigma^{2a}} + \frac{2ag\sigma^{a-1}}{(1 + \sigma^{2a})^3} [2I_\varepsilon - I_T(1 - \sigma^{2a})] = \frac{1-g}{g}, \quad (22)$$

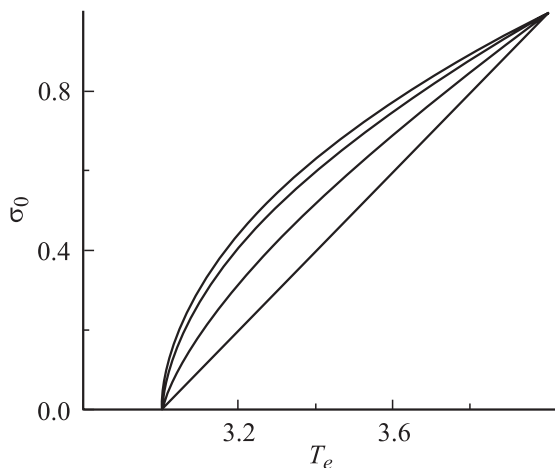
согласно которому граница области жидкостного трения

$$I_T = 2I_\varepsilon \quad (23)$$

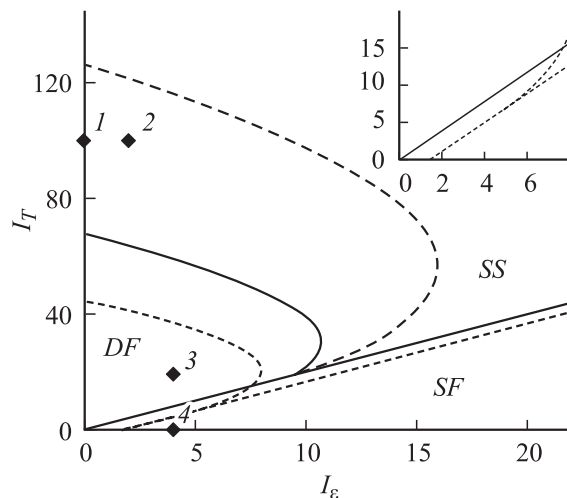
отвечает условию  $\sigma = 0$ . Выражения (22), (23) обобщают равенства (10), (11). Анализ приведенных уравнений показывает, что результаты, полученные при  $a = 1$ , мало изменяются при переходе к общему случаю  $0 \leq a \leq 1$ . В частности, влияние случайного распределения напряжений по-прежнему является несущественным, тогда как флуктуации деформации и температуры сказываются критическим образом. Наиболее существенное изменение наблюдается для зависимости стационарных сдвиговых напряжений  $\sigma_0$  от температуры  $T_e$ . В стационарном детерминистическом случае система (15)–(17) приводит к решению

$$\sigma_0 = [g(1-g)^{-1}(T_e - 2) - 1]^{1/2a}, \quad g < 1, \quad (24)$$

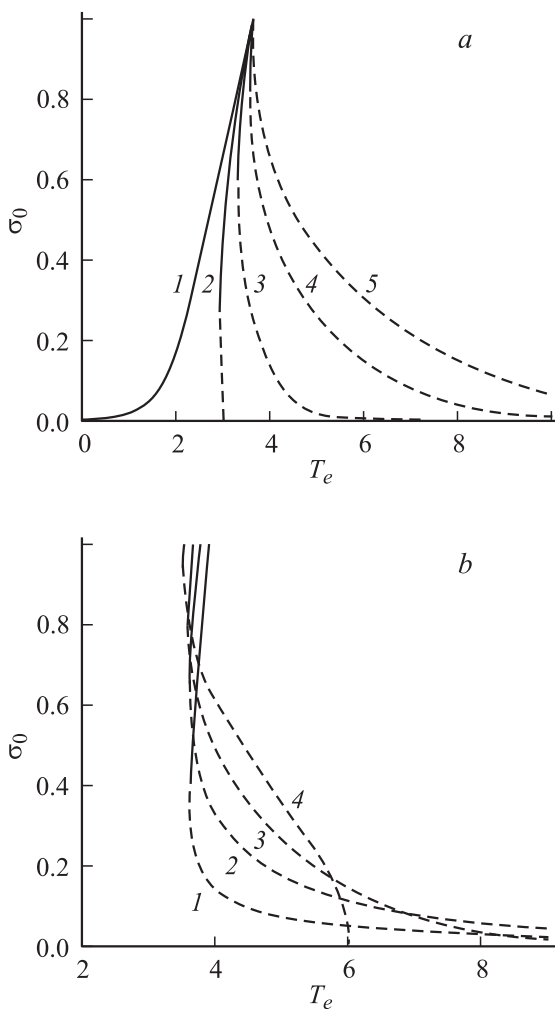
которое обобщает стандартную корневую зависимость, соответствующую  $a = 1$  (рис. 2). Увеличение интенсивности шума деформации  $I_\varepsilon$  приводит к монотонному росту  $\sigma_0$ , тогда как при возрастании  $I_T$  образуется барьер вблизи точки  $\sigma_0 = 0$ . При этом зависимость  $\sigma_0(T_e)$



**Рис. 2.** Зависимость стационарного значения сдвиговых напряжений  $\sigma_0$  от температуры  $T_e$  при  $g = 0.5$  и  $a = 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$  (соответствующие кривые расположены справа налево).



**Рис. 4.** Фазовая диаграмма системы при  $T_e = 0$ ;  $g = 0.5$ ;  $I_T, I_\epsilon \neq 0$ ;  $a = 0.5$  (штриховая кривая),  $0.75$  (сплошная),  $1.0$  (пунктир).

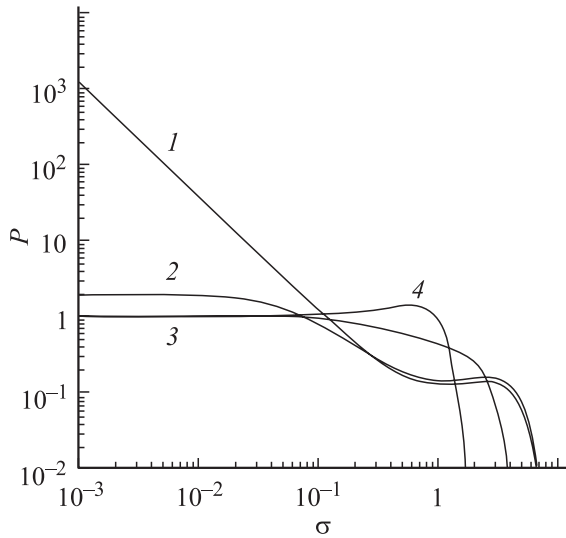


**Рис. 3.** Зависимость стационарного значения сдвиговых напряжений  $\sigma_0$  от температуры  $T_e$  при  $g = 0.5$ . *a* —  $a = 0.75$ ;  $I_\epsilon = 1$ ;  $I_T = 1, 2, 3, 5, 7$  ( $I$ – $5$  соответственно); *b* —  $I_\epsilon = 1$ ;  $I_T = 5$ ;  $a = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$  ( $I$ – $4$  соответственно).

теряет монотонный вид при значениях  $I_T$ , отвечающих области выше прямой (23) (рис. 3). Штриховые ветви кривых отвечают неустойчивым значениям напряжений  $\sigma^m$ , сплошные — устойчивым  $\sigma_0$ . Из рис. 3 видно, что  $\sigma^m$  может принимать нулевое значение только при  $a = 1$  или  $I_T = 2I_\epsilon$ , иначе кривые зависимостей  $\sigma^m(T_e)$  асимптотически приближаются к нулю. Это означает, что в случае  $I_T > 2I_\epsilon$  и  $a \neq 1$  всегда существует барьер эффективного потенциала (21) вблизи точки  $\sigma_0 = 0$ , т.е. в системе либо происходит фазовый переход первого рода между жидкоподобным и твердоподобным состояниями смазки, либо устанавливается режим сухого трения. При  $I_T < 2I_\epsilon$  и  $a \neq 1$  реализуется жидкостный режим трения, отвечающий минимуму потенциала с  $\sigma_0 \neq 0$ , поскольку максимум барьера находится в нефизической области  $\sigma^m < 0$ .

Фазовая диаграмма, определяющая состояние системы в зависимости от интенсивностей шумов  $I_\epsilon, I_T$ , имеет вид, подобный случаю  $a = 1$ , и приведена на рис. 4. Видно, что рост  $a$  приводит к увеличению двухфазной области (SS) прерывистого трения, которая ограничена прямой (23) и колоколообразной кривой. В отличие от случая  $a \neq 1$  при  $a = 1$  жидкостный режим трения в области малых значений  $I_\epsilon$  не реализуется. Поскольку на практике, как правило, интенсивности шумов малы, уменьшение трения следует ожидать в системах с дробным показателем  $a$ .

На рис. 5 показано распределение вероятности (20), соответствующее точкам на рис. 4. Оно обладает максимумами, положения которых определяются набором величин  $I_\epsilon, I_T, I_\sigma, a, g, T_e$ . Для точки  $I$ , находящейся в двухфазной области (SS), распределение принимает степенной вид, присущий режиму СОК, в котором внешнее воздействие  $T_e = 0$ . Такой режим отвечает значениям  $\sigma \ll 1$  и  $I_\sigma, I_\epsilon \ll I_T$ , при которых (20) сводится к ка-



**Рис. 5.** Функция распределения (20) при  $a = 0.75$ ,  $g = 0.5$ ,  $T_e = 0$ ,  $I_\sigma = 0$  и режимах, показанных точками на рис. 4. 1 —  $I_e = 0$ ,  $I_T = 100$  (СОК); 2 —  $I_e = 2$ ,  $I_T = 100$  (SS); 3 —  $I_e = 4$ ,  $I_T = 20$  (DF); 4 —  $I_e = 4$ ,  $I_T = 0$  (SF).

ноническому виду (14), где функция  $\mathcal{P}(\sigma)$  определяется выражением

$$\mathcal{P}(\sigma) = Z^{-1} g^{-2} I_T^{-1} d_a^{-2}(\sigma) \times \exp \left\{ -I_T^{-1} g^{-2} \int_0^\sigma \frac{1 - g[1 - 2d_a(\sigma')]}{d_a^2(\sigma')(\sigma')^a} d\sigma' \right\}. \quad (25)$$

Для точки 2 характерно сосуществование максимумов распределения  $P_a(\sigma)$  при нулевом и ненулевом значениях напряжений, что соответствует области прерывистого (stick-slip) трения. Точка 3 отвечает режиму сухого трения (DF), при котором  $P_a(\sigma)$  имеет единственный максимум, соответствующий  $\sigma_0 = 0$ . Точка 4 лежит в области, где имеется один максимум распределения вероятности при  $\sigma_0 \neq 0$ , отвечающий режиму жидкостного трения, или скольжению.

### 3. Обсуждение фрактального и неаддитивного характера процесса трения

Характерная особенность распределения (25) состоит в том, что оно выражается через интеграл  $\mathcal{I}_{-\sigma}^{1-a}$  дробного порядка  $1 - a$  (см. Приложение)

$$\mathcal{P}(\sigma) = Z^{-1} g^{-2} I_T^{-1} d_a^{-2}(\sigma) \times \exp \left\{ -\frac{\Gamma(1-a)}{I_T g^2} \mathcal{I}_{-\sigma}^{1-a} \left\{ d_a^{-2}(\sigma) [1 - g(1 - 2d_a(\sigma))] \right\} \right\}, \quad (26)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

С другой стороны, известно [18], что выражение такого типа представляется решением дробного уравнения Фоккера–Планка

$$\mathcal{I}_t^\omega \mathcal{P}(\sigma, t) = \mathcal{I}_{-\sigma}^{\bar{\omega}} \left\{ \sigma \mathcal{P}(\sigma, t) + \frac{I_T g^2}{\Gamma(\bar{\omega})} \mathcal{I}_{-\sigma}^{\bar{\omega}} \times \left\{ d_a^2(\sigma) [1 - g(1 - 2d_a(\sigma))]^{-1} \mathcal{P}(\sigma, t) \right\} \right\}, \quad (27)$$

где дробная производная  $\mathcal{I}_x^{\bar{\omega}}$  (см. (П. 2)) представляет операцию, обратную дробному интегралу (П. 1).

Умножая равенство (27) на  $\sigma^{2\bar{\omega}}$  и усредняя по  $\sigma$ , для средней величины дробного порядка  $\alpha \equiv 2\bar{\omega}$

$$|\sigma| \equiv \langle \sigma^\alpha \rangle^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \langle \sigma^\alpha \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^\alpha \mathcal{P}(\sigma, t) d\sigma, \quad \alpha > 0 \quad (28)$$

получаем

$$|\sigma|^z \sim t, \quad z = \frac{2\bar{\omega}}{\omega}, \quad (29)$$

где  $z$  — динамический показатель.

Здесь мы учли только диффузионный вклад, который играет определяющую роль в пределе больших времен. Комбинирование равенств (26), (29) и (П. 1) приводит к соотношениям  $1 - a = \bar{\omega} = z\omega/2$ , согласно которым

$$a = 1 - \frac{z\omega}{2}. \quad (30)$$

В приближении среднего поля в (14) показатель  $a = 3/4$  и выражение (30) дает

$$\omega z = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

При значении  $\omega = 1$ , отвечающем динамическому показателю  $z = 1/2$ , процесс эволюции системы характеризуется отсутствием ловушек в фазовом пространстве. Согласно определению (29), такой показатель меньше характерного для баллистического поведения  $z = 1$ . С другой стороны, дробное уравнение Фоккера–Планка (27) приводит к диффузионному режиму, отвечающему  $z = 2$ , только при значении показателя временной производной  $\omega = 1/4$ .

Таким образом, в приближении среднего поля ( $a = 3/4$ ,  $\bar{\omega} = 1/4$ ) прерывистый режим трения, связанный с наличием эффективных ловушек в фазовом пространстве, отвечает показателю времени  $1/4 < \omega < 1/2$  и динамическому показателю  $2 > z > 1$ . Данная ситуация соответствует процессу субдиффузии, при котором смещения блуждающей частицы непрерывны в пространстве, но благодаря действию ловушек происходят в дискретные моменты времени, в связи с чем показатель соответствующей производной  $\omega < 1$  становится дробным. В отличие от этого при полетах Леви блуждания частицы, представляющие произвольные (включая бесконечные) смещения, совершаются непрерывно во времени, но

дискретно в пространстве [25]. Согласно уравнению Фоккера–Планка (27), указанный процесс характеризуется показателями  $\omega = 1$  и  $\bar{\omega} \leq 1$ , второй из которых представляет дробную производную по координате частицы. Отметим во избежание недоразумений, что здесь имеются в виду скачки блуждающей частицы не в реальном геометрическом пространстве, а в фазовом.

Следуя [17], рассмотрим исследуемую систему в рамках неаддитивной термодинамики. С этой целью предположим, что деформация  $\varepsilon$  сводится к сложности (complexity) системы, которая представляет меру беспорядка и по аналогии с энтропией Цаллиса задается равенством

$$S^{(q)} \equiv \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}, \quad (32)$$

где  $q \neq 1$  — параметр неаддитивности.<sup>1</sup>

Кроме того, роль температуры  $T$  играет внутренняя энергия пленки смазки, определяемая выражением

$$\xi^{(q)} \equiv \sum_i \xi_i Q_i, \quad (33)$$

где распределение  $Q_i \equiv p_i^q / \sum_j p_j^q$ ,  $\{\xi_i\}$  — собственные значения соответствующего гамильтониана, полученные с учетом граничных условий [26].

Такая параметризация позволяет установить связь введенных выше показателей  $z$ ,  $\bar{\omega}$  и  $\omega$  с параметром  $q$ , задающим выражения (32), (33) [17]. Эволюция неаддитивной системы представляется нелинейным уравнением Фоккера–Планка

$$\mathcal{D}_t^\omega P(\sigma, t) = \mathcal{D}_{-\sigma}^2 P^q(\sigma, t), \quad (34)$$

где показатели  $\omega$ ,  $q$  не являются целыми,  $\mathcal{D}_t^\omega$  — дробная производная и единицы измерения выбраны таким образом, чтобы избавиться от эффективного коэффициента диффузии [27].

Для самоподобной нормированной функции распределения

$$P(\sigma, t) = \sigma_c^{-1} \mathcal{P}(x); \quad \sigma_c \equiv \sigma_c(t), \quad x \equiv \sigma / \sigma_c, \quad (35)$$

где  $\sigma_c$  — критическое напряжение [28], получаем

$$\sigma_c^{1+q} \sim t^\omega, \quad \mathcal{P}^{q-1} \sim x^2. \quad (36)$$

С другой стороны, использование линейного уравнения Фоккера–Планка дробного порядка (ср. с (27))

$$\mathcal{D}_t^\omega P(\sigma, t) = \mathcal{D}_{-\sigma}^{2\bar{\omega}} P(\sigma, t) \quad (37)$$

<sup>1</sup> Выражение (32) дает формулу для обычной энтропии  $S(p_i) = -S^{(1)}(p_i) = -\sum_i p_i \ln p_i$  в пределе  $q \rightarrow 1$ . При рассмотрении двух независимых подсистем  $A$  и  $B$  получаем вероятность  $p_{ij}^{AB} = p_i^A p_j^B$  и энтропию  $S_{AB}^{(q)} = S_A^{(q)} + S_B^{(q)} + (1-q)S_A^{(q)} S_B^{(q)}$ , не обладающую свойством аддитивности обычной энтропии  $S_{AB} = S_A + S_B$ .

приводит к зависимостям [29]

$$\sigma_c^{2\bar{\omega}} \sim t^\omega, \quad \mathcal{P} \sim \begin{cases} x^{2\bar{\omega}-1}, & x \rightarrow 0, \\ x^{-(1+2\bar{\omega})}, & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (38)$$

Сравнение первых выражений в (36) и (38) дает связь

$$1 + q = 2\bar{\omega}. \quad (39)$$

Поскольку средняя величина  $|\sigma|$  в (28) для самоподобных систем сводится к масштабу  $\sigma_c$ , то из равенств (29), (36) и (38) получаем

$$1 + q = z\omega. \quad (40)$$

Из приведенного рассмотрения следует, что характерное значение величины  $z\omega \leq 1$  (в частности, в приближении среднего поля имеем (31)) и условие (40) выполняется только при  $-1 < q < 0$ . Таким образом, данная термодинамическая система супераддитивна ( $q < 1$ ), т. е. полная энтропия ее составляющих больше суммы их энтропий.

Поскольку дробная система Лоренца (15)–(17) обладает фрактальным фазовым пространством, установим в заключение связь его размерности  $D$  с введенными выше показателями. Для этого используем обычные скейлинговые соотношения [28]

$$a = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{D} \right), \quad a = 1 - D^{-1}, \quad (41)$$

сравнение последнего из которых с (30) дает

$$\omega z = \frac{2}{D}. \quad (42)$$

Для подсчета  $D$  учтем, что каждой из стохастических степеней свободы,  $\sigma$ ,  $S^{(q)}$  и  $\xi^{(q)}$ , число которых  $n = 3$ , отвечает сопряженный импульс, так что гладкое фазовое пространство должно иметь размерность  $D = 2n$ . Такое пространство реализуется в простейшем случае отсутствия обратной связи, когда определяющий ее показатель  $a = 0$  и шум является аддитивным. С ростом показателя  $a > 0$ , величина которого задает эффективную силу и интенсивность шума в равенствах (19), обратная связь усиливается и флуктуации приобретают мультипликативный характер. Согласно [23], при этом фазовое пространство становится фрактальным и его размерность уменьшается в  $(1 - a)$  раз. В результате размерность пространства, в котором происходит эволюция самоорганизующейся системы, сводится к значению

$$D = 2n(1 - a), \quad (43)$$

где для системы Лоренца  $n = 3$ .

В общем случае равенства (30), (42), (43) дают выражение для числа самосогласованных стохастических уравнений, необходимых для представления СОК при различных значениях показателя обратной связи.

$$n = \frac{1}{2(1 - a)^2}. \quad (44)$$



В актуальной области  $a \leq 1$  это число неограниченно нарастает от минимального физического значения  $n_c = 1$ , отвечающего  $a = 1 - 1/\sqrt{2}$ . Такой однопараметрический случай рассматривался в работе [30]. С дальнейшим ростом  $a$  описание СОК требует увеличения числа необходимых степеней свободы. Так, значение  $a = 1/2$  отвечает двухпараметрическому представлению самоорганизующейся системы [28,31]. Для использования системы Лоренца ( $n = 3$ ) [21,32] необходима более сильная обратная связь  $a = 1 - 1/\sqrt{6}$ .

Комбинирование равенств (42), (43) с (40) приводит к окончательному выражению для параметра неаддитивности

$$1 + q = \frac{1}{n(1-a)}. \quad (45)$$

Подстановка зависимости (44), определяющей число уравнений  $n$ , необходимых для представления режима СОК, в (45) дает  $q = 1 - 2a$ . Отсюда видно, что ослабление обратной связи, приводящее к уменьшению показателя  $a$ , обеспечивает увеличение параметра  $q$ . Максимальное значение  $q \rightarrow 1$  достигается в системах, не обладающих обратной связью ( $a \rightarrow 0$ ). Таким образом, при условии справедливости скейлинговых соотношений теории среднего поля (41) выражение (44) позволяет воспроизвести результаты различных подходов [33] и рассматриваемая термодинамическая система является супераддитивной.

Проведенное рассмотрение показывает, что прерывистый режим трения может быть описан в рамках представлений о явлении самоорганизующейся критичности, при котором пленка смазки плавится при нулевой температуре поверхностей трения. Основная особенность такого режима состоит в том, что эволюция системы протекает самоподобным образом, в связи с чем ее функция распределения имеет степенную асимптотику. Показано, что этот факт отражается при использовании системы Лоренца, параметризуемой сдвиговыми напряжениями и деформацией, а также температурой пленки смазки. Кроме того, учет условия самоподобия требует дробного характера релаксации напряжений и обратных связей в схеме Лоренца. Соответствующая фазовая диаграмма, определяющая области жидкостного, прерывистого и сухого трения, качественно совпадает с построенной для случая, когда указанные релаксационное слагаемое и обратные связи не имеют дробного показателя. Следует отметить, что при отличном от единицы значении последнего становится возможным уменьшение трения при малых интенсивностях шумов. При параметризации системы напряжениями, сложностью и внутренней энергией дробная модель Лоренца позволяет определить соотношения между показателем распределения напряжений (мультипликативного шума), фрактальной размерностью фазового пространства, числом уравнений, необходимых для представления системы в режиме самоорганизующейся критичности, и параметром неаддитивности Цаллиса. Показано, что прерывистый режим

трения обусловлен наличием эффективных ловушек в фазовом пространстве и отвечает процессу субдиффузии, который определяется показателем производной по времени  $\omega < 1$  в дробном уравнении Фоккера–Планка.

Выполнение работы поддержано стипендией Кабинета министров Украины.

## Приложение

Интеграл дробного порядка  $\bar{\omega} > 0$  определяется равенством [34]

$$\mathcal{I}_x^{\bar{\omega}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\bar{\omega})} \int_0^x \frac{f(x')}{(x-x')^{1-\bar{\omega}}} dx', \quad (\text{П. 1})$$

где  $f(x)$  — произвольная функция,  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

Операция, обратная соответствующему интегралу  $\mathcal{D}_x^{\bar{\omega}} \equiv \mathcal{I}_x^{-\bar{\omega}}$ , называется дробной производной порядка  $\bar{\omega} > 0$

$$\mathcal{D}_x^{\bar{\omega}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(-\bar{\omega})} \int_0^x \frac{f(x')}{(x-x')^{1+\bar{\omega}}} dx'. \quad (\text{П. 2})$$

В области  $0 < \bar{\omega} < 1$  удобно использовать выражение

$$\mathcal{D}_x^{\bar{\omega}} f(x) \equiv \frac{\bar{\omega}}{\Gamma(1-\bar{\omega})} \int_0^x \frac{f(x) - f(x')}{(x-x')^{1+\bar{\omega}}} dx', \quad (\text{П. 3})$$

где учтено известное равенство  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$  для  $x \equiv -\bar{\omega}$ .

## Список литературы

- [1] Persson B.N.J. Sliding friction. Physical Principles and Applications. Berlin: Springer Verlag, 1998. 462 p.
- [2] Yoshizawa H., Chen Y.-L., Israelachvili J. // J. Phys. Chem. 1993. Vol. 97. P. 4128–4140. Yoshizawa H., Israelachvili J. // J. Phys. Chem. 1993. Vol. 97. P. 11 300–11 313.
- [3] Smith E.D., Robbins M.O., Cieplak M. // Phys. Rev. B. 1996. Vol. 54. P. 8252–8260.
- [4] Krim J., Solina D.H., Chiarello R. // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 66. P. 181–184.
- [5] Carlson J.M., Batista A.A. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4153–4165.
- [6] Aranson I.S., Tsimring L.S., Vinokur V.M. // Phys. Rev. B 2002. Vol. 65. P. 125 402.
- [7] Thompson P.A., Robbins M.O. // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. P. 6830–6837.
- [8] Family F., Braiman Y., Hentschel H.G.E. // Friction, Arching, Contact Dynamics / Ed. D.E. Wolf, P. Grassberger. Singapore: World Scientific, 1996. P. 33–41.
- [9] Braiman Y., Hentschel H.G.E., Family F. et al. // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. R4737–R4740.
- [10] Braun O.M., Kivshar Yu.S. // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 43. P. 1060–1073.



- [11] Sokoloff J.B. // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51. P. 15 573–15 574.
- [12] Kawaguchi T, Matsukawa H. // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 56. P. 4261–4265.
- [13] Khomenko A.V, Yushchenko O.V. // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 036 110.
- [14] Khomenko A.V. // Phys. Lett. A. 2004. Vol. 329. Issue 1–2. P. 140–147.
- [15] Bak P. How Nature Works: the Science of Self-Organized Criticality. New York: Springer Verlag, 1996. 212 p.
- [16] Olemskoi A.I. // Physica A. 2002. Vol. 310. P. 223–233.
- [17] Tsallis C. Lecture Notes in Physics / Ed. S. Abe, Y. Okamoto. Heidelberg: Springer Verlag, 2001.
- [18] Zaslavsky G.M. // Phys. Rep. 2002. Vol. 371. P. 461–580.
- [19] Реология / Под ред. Ф. Эйриха. М.: ИЛ, 1962. 824 с.
- [20] Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
- [21] Олемской А.И., Хоменко А.В. // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. Вып. 6 (12). С. 2144–2167.
- [22] Risken H. The Fokker-Planck Equation. Berlin: Springer Verlag, 1989. 474 p.
- [23] Олемской А.И. // УФН. 1998. Т. 168. № 1. С. 287–321.
- [24] Amit D.J. Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena. New York: McGraw Hill, Inc., 1978. 336 p.
- [25] Metzler R., Klafter J. // Phys. Rep. 2000. Vol. 339. P. 1–77.
- [26] Olemskoi A.I., Khomenko A.V., Olemskoi D.A. // Physica A. 2004. Vol. 332. P. 185–206.
- [27] Olemskoi A.I., Kharchenko D.O. // Physica A. 2001. Vol. 293. P. 178–188.
- [28] Vespignani A., Zapperi S. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. N 25. P. 4793–4796. Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. N 6. P. 6345–6362.
- [29] Olemskoi A.I., Kharchenko D.O. // J. Phys. Stud. 2002. Vol. 6. N 3. P. 253–288.
- [30] Hwa T., Kardar M. // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. N 10. P. 7002–7023.
- [31] Mehta A., Barker G.C. // Rep. Prog. Phys. 1994. Vol. 57. N 4. P. 383–416.
- [32] Olemskoi A.I., Khomenko A.V. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 036 116.
- [33] Chessa A., Marinari E., Vespignani A. et al. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. N 6. P. R6241–R6244.
- [34] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.