

# Система двух диэлектрических цилиндров с источниками зарядов. Расчет сил. II

© Ю.П. Емец

Институт электродинамики НАН Украины,  
03680 Киев, Украина  
e-mail: emets@irpen.kiev.ua

(Поступило в Редакцию 13 сентября 2004 г. В окончательной редакции 31 марта 2005 г.)

Исследованы объемные и поверхностные силы в системе двух длинных диэлектрических цилиндров, которые касаются друг друга с внешних сторон. Источниками электрического поля служат заряженные нити, расположенные на осях цилиндров. Получены аналитические выражения сил, действующих на цилиндры, и изучены наиболее важные случаи, вытекающие из общего решения при различных предположениях относительно радиусов цилиндров, их диэлектрических проницаемостей и линейных плотностей зарядов. На основе точного решения полевой задачи предложен конструктивный метод расчета сил, учитывающий особенности формирования электрического поля в системе.

## Введение

Вычисление сил, действующих на проводники и диэлектрики в электрических полях, составляет неотъемлемую часть многих расчетов при разработке электрофизических установок и электротехнических устройств. Такие расчеты первоначально требуют нахождения электрического поля в элементах конструкций и составляют наиболее сложную часть вычислений. Только в отдельных случаях удается получить точные решения модельных задач, позволяющих проанализировать зависимость сил от формы проводников и диэлектрических тел в зависимости от свойств материалов.

В настоящей работе вычислены силы в системе двух длинных прямолинейных цилиндров кругового сечения, на осях которых находятся заряженные нити с различными зарядами. Цилиндрические тела, состоящие из изотропных диэлектрических материалов, касаются друг друга с внешних сторон. В общем случае они имеют не одинаковые радиусы и диэлектрические проницаемости. Между цилиндрами действуют механические (пондеромоторные) силы притяжения или силы отталкивания, характер и величины которых зависят от параметров системы. На границе диэлектрических цилиндров действуют также поверхностные силы.

В рассматриваемой системе силы могут быть вычислены аналитически на основе полученного (в работе [1]) решения полевой задачи в предположении изотермических условий и несущественности электрострикционных эффектов. Указанные силы можно рассчитать разными способами, например с помощью тензора максвелловских натяжений. Однако наиболее просто объемные силы можно вычислить непосредственно, рассматривая взаимодействие индуцированных зарядов с внешним по отношению к ним электрическим полем. В последнем случае общие выражения сил представлены двойными суммами, которые удастся иногда свернуть в простые аналитические выражения. Такой прием вычисления сил

подсказан формой представленного решения, имеющего вид сумм бесконечного числа полюсов индуцированных зарядов, получаемых многократным отражением реальных зарядов относительно граничных окружностей.

## Силы взаимодействия цилиндров

Схема и параметры исследуемой системы представлены в предыдущей работе [1]. Из полученного в работе [1] решения краевой задачи видно, что электрическое поле представлено бесконечным числом индуцированных (фиктивных) зарядов, расположенных в цилиндрах. Заряды одного цилиндра определяют поле второго цилиндра. Кроме того, имеются реальные заряды заряженных нитей, расположенных на осях цилиндров. Электрическое поле во внешней среде формируется всеми зарядами двух цилиндров.

Силы, действующие на цилиндры, можно вычислить как взаимодействие зарядов с электрическим полем.

Для расчета сил достаточно воспользоваться выражением электрического поля во внешней к цилиндрам области, которое имеет следующий вид (см. формулы (1) в работе [1]):

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left[ Q_1 \left( z - r_1 \frac{k-1}{k-1+\delta} \right)^{-1} + \Delta_{12} Q_2 \left( z - r_1 \frac{k-\delta}{k} \right)^{-1} + Q_2 \left( z - r_1 \frac{k}{k-\delta} \right)^{-1} + \Delta_{13} Q_1 \left( z - r_1 \frac{k+\delta}{k} \right)^{-1} \right] \right\} \quad (z = x + iy), \quad (1)$$

где, напомним,  $E_1(z) = E_{x1} - iE_{y1}$  — комплексная напряженность электрического поля;  $\epsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость внешней среды;  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{13}$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  и

$\delta$  — параметры, определенные формулами

$$\Delta_{12} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \Delta_{13} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} \quad (-1 \leq \Delta_{12}, \Delta_{13} \leq 1),$$

$$Q_1 = q_1 - \Delta_{12}q_2, \quad Q_2 = q_2 - \Delta_{13}q_1,$$

$$\delta = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad (0 \leq \delta \leq 1). \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  — диэлектрические проницаемости цилиндров с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  и зарядами  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Из выражения (1) следует, что электрическое поле  $E_1(z)$  определяется бесконечной системой полюсов фиктивных зарядов (кроме двух полюсов реальных зарядов, расположенных в центрах окружностей), имеющих общий вид,

$$E_p(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \frac{G_p}{z - a_p}, \quad (3)$$

где  $G_p$  — заряд,  $a_p$  — координата заряда.

На плоскости комплексной переменной на заряды, расположенные в окружности с параметрами  $r_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $q_1$  (отмеченные в дальнейшем индексами  $m$ )

$$G_m = Q_1\Delta^{m-1}, \quad G'_m = \Delta_{12}Q_2\Delta^{m-1} \quad (4)$$

с координатами

$$a_m = r_1 \frac{m-1}{m-1+\delta}, \quad a'_m = r_1 \frac{m-\delta}{m}, \quad (5)$$

где обозначено  $\Delta = \Delta_{12}\Delta_{13}$ , действует электрическое поле зарядов, расположенных в другой окружности, имеющей параметры  $r_2$ ,  $\varepsilon_3$  и  $q_2$ . Напряженность поля, создаваемую этими зарядами, и координаты зарядов будем отмечать индексом  $n$

$$E_n(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \frac{Q_2\Delta^{n-1}}{z - a_n}, \quad a_n = r_1 \frac{n}{n-\delta},$$

$$E'_n(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \frac{\Delta_{13}Q_1\Delta^{n-1}}{z - a'_n}, \quad a'_n = r_1 \frac{n+\delta}{n}. \quad (6)$$

Общий член силы (на единицу длины цилиндра) можно записать так:

$$F_{mn} = G_m E_{mn} + G'_m E'_{mn} + G_m E'_{mn} + G'_m E_{mn}, \quad (7)$$

где

$$E_{mn} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \frac{Q_2\Delta^{n-1}}{\alpha_m - a_n},$$

$$E'_{mn} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \frac{\Delta_{13}Q_1\Delta^{n-1}}{\alpha_m - a'_n} \quad (\alpha_m = a_m, a'_m). \quad (8)$$

На плоскости  $z$  на каждый заряд первой окружности (с параметрами  $r_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $q_1$ ) действует электрическое поле всех зарядов второй окружности, поэтому общее выражение силы есть

$$F_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}, \quad (9)$$

где индекс 1 определяет силу, действующую на цилиндр с указанными параметрами (соответственно полная сила, действующая на второй цилиндр, имеет индекс 2).

Повторяя такие же операции по отношению ко второму цилиндру, когда рассматривается взаимодействие внешнего поля с зарядами этого цилиндра, легко убедиться в справедливости равенства

$$F_1 = -F_2. \quad (10)$$

Подстановка формул (4)–(8) в выражение (9) после несложных преобразований дает

$$F_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1 r_1 \Delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Delta^{m+n} \left[ \Delta_{13} Q_1^2 \frac{n(m-1+\delta)}{1-m-n-\delta} \right. \right.$$

$$+ Q_1 Q_2 \left[ \frac{(n-\delta)(m-1+\delta)}{1-m-n} - \Delta \frac{mn}{m+n} \right]$$

$$\left. \left. + \Delta_{12} Q_2^2 \frac{m(n-\delta)}{\delta-m-n} \right] \right\}. \quad (11)$$

В этом выражении двойные суммы при множителе  $Q_1 Q_2$  сворачиваются. Действительно, простыми действиями можно убедиться, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Delta^{m+n} \frac{(n-\delta)(m-1+\delta)}{1-m-n} \right]$$

$$= \frac{\Delta^2}{1-\Delta} \left[ \frac{\Delta(\Delta-3)}{6(1-\Delta)^2} + \delta(\delta-1) \right],$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Delta^{m+n} \frac{mn}{m+n} \right] = \frac{\Delta^2(3-\Delta)}{6(1-\Delta)^3}. \quad (12)$$

С учетом соотношений (12) выражение (11) принимает вид

$$F_1 = \frac{Q_1 Q_2}{2\pi\varepsilon_1 r_1 \delta (1-\Delta)} \left[ \frac{\Delta(\Delta-3)}{3(1-\Delta)^2} + \delta(\delta-1) \right]$$

$$+ \frac{1}{2\pi\varepsilon_1 r_1 \delta \Delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Delta^{m+n} \left[ \Delta_{13} Q_1^2 \frac{n(m-1+\delta)}{1-m-n-\delta} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \Delta_{12} Q_2^2 \frac{m(n-\delta)}{\delta-m-n} \right] \right\}. \quad (13)$$

В силу способа получения выражение (13) определяет общую силу, действующую на цилиндр с указанными параметрами. Согласно соотношению (10), сила, приложенная ко второму цилиндру, вычисляется этим же выражением, но с отрицательным знаком.

Если радиусы цилиндров одинаковы  $r_1 = r_2 \equiv r$  ( $\delta = 1/2$ ), то выражение (13) существенно упрощается. В этом случае имеем

$$F_1 = \frac{Q_1 Q_2 (\Delta^2 - 6\Delta - 3)}{12\pi\varepsilon_1 r (1-\Delta)^3}$$

$$+ \frac{\Delta_{13} Q_1^2 + \Delta_{12} Q_2^2}{\pi\varepsilon_1 r \Delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Delta^{m+n} \frac{m(2n-1)}{1-2(m+n)} \right]. \quad (14)$$

Можно показать, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Delta^{m+n} \frac{m(2n-1)}{1-2(m+n)} \right] = \frac{\Delta^2}{3(1-\Delta)^3}, \quad (15)$$

поэтому формула (14) принимает следующий вид:

$$F_1 = \frac{1}{3\pi\epsilon_1 r (1-\Delta)^3} \times \left[ \frac{1}{4} Q_1 Q_2 (\Delta^2 - 6\Delta - 3) - \Delta_{13} Q_1^2 - \Delta_{12} Q_2^2 \right]. \quad (16)$$

Примечательно, что при относительно громоздкой форме выражений электрического поля формула силы, действующей в системе, имеет простой вид, особенно в последнем случае.

## Некоторые следствия

При изменении параметров системы из общего выражения (13) можно получить ряд частных решений, имеющих независимое значение.

1. Если в выражении (13) положить  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \equiv \epsilon$  ( $\Delta_{12} = \Delta_{13} = 0$ ), то получим известную формулу сил взаимодействия двух однонаправленных прямолинейных заряженных нитей, расположенных в однородном пространстве на расстоянии  $h$  друг от друга и несущих заряды  $q_1$  и  $q_2$  (на единицу длины),

$$F_1 = \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_1 h} \quad (h = r_1 + r_2). \quad (17)$$

2. Рассмотрим систему, когда параллельно длинному диэлектрическому цилиндру кругового сечения с параметрами  $\epsilon_2$  и  $r$  на расстоянии  $h$  расположена заряженная нить с линейной плотностью заряда  $q$ . Силу, действующую на цилиндр, в этом случае получим из общего выражения (13), полагая

$$q_1 = 0, \quad q_2 \equiv q, \quad \epsilon_3 = \epsilon_1 \quad (\Delta_{13} = 0),$$

$$h = r_1 + r_2, \quad r \equiv r_1. \quad (18)$$

Имеем

$$F_1 = -\frac{\Delta_{12} q^2 r^2}{2\pi\epsilon_1 h (h^2 - r^2)}. \quad (19)$$

Сила, действующая на нить, определяется этой же формулой, но с противоположным знаком. Формула (19) приведена в [2].

3. При

$$r_2 \rightarrow \infty \quad (\delta = 1), \quad q_2 = 0, \quad q_1 \equiv q, \quad r_1 \equiv r \quad (20)$$

выражение (13) принимает такой вид:

$$F_1 = -\frac{\Delta_{13} q^2 (3 - \Delta)}{12\pi\epsilon_1 r (1 - \Delta)}. \quad (21)$$

Эта формула определяет силу, действующую на диэлектрический цилиндр, который касается плоской границы двух диэлектрических материалов с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$ . Цилиндр кругового сечения имеет параметры  $\epsilon_2$  и  $r$ ; на оси цилиндра находится заряженная нить с линейной плотностью  $q$ . Формула (21) была получена в работе [3].

4. Пусть диэлектрические цилиндры имеют одинаковые радиусы и заряды

$$r_1 = r_2 \equiv r \quad (\delta = 1/2), \quad q_1 = q_2 \equiv q, \quad (22)$$

тогда, согласно выражению (16), между цилиндрами действуют отталкивающие силы с модулем

$$|F_{1,2}| = \frac{q^2 (3 + \Delta_{12} + \Delta_{13} - \Delta)}{12\pi\epsilon_1 r (1 - \Delta)}. \quad (23)$$

Если же заряды равны, но имеют противоположные знаки ( $q_1 = -q_2 \equiv q$ ), то диэлектрические цилиндры притягиваются друг к другу с силой (для модулей)

$$|F_{1,2}| = \frac{q^2 (3 - \Delta_{12} - \Delta_{13} - \Delta)}{12\pi\epsilon_1 r (1 - \Delta)}. \quad (24)$$

Сравнивая выражения (23) и (24), можно заметить, что силы притяжения и силы отталкивания между диэлектрическими цилиндрами с заряженными нитями при одинаковых характеристиках диэлектриков и абсолютных величинах зарядов в общем случае не равны по модулю; их величины существенно зависят от проницаемостей материалов цилиндров и окружающей среды. Равенство между ними (по абсолютной величине) возможно только в случае, когда справедливо соотношение

$$\Delta_{12} = -\Delta_{13}, \quad (25)$$

что равносильно выражению

$$\epsilon_1 = \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_3}. \quad (26)$$

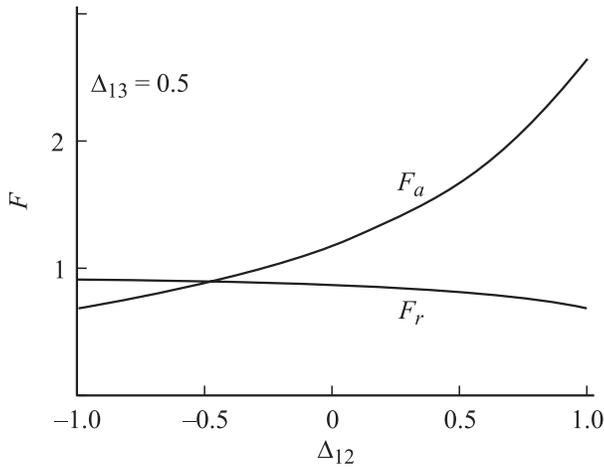
Последнее означает, что величина диэлектрической проницаемости внешней среды в этом случае принимает промежуточное значение между величинами проницаемостей материалов цилиндров.

Для иллюстрации сказанного на рис. 1 и 2 приведены зависимости  $F_a(\Delta_{12})$  и  $F_r(\Delta_{12})$ , где  $F_a$  — сила притяжения цилиндров отвечает формуле (23) и  $F_r$  — сила отталкивания цилиндров, вычисленная по формуле (24). Кривые построены для двух величин параметра  $\Delta_{13}$ :  $\Delta_{13} = 0.5$  (рис. 1) и  $\Delta_{13} = -0.5$  (рис. 2) в относительных величинах

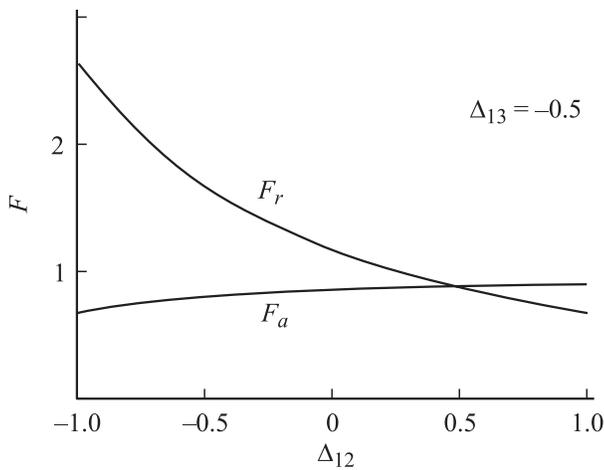
$$F_{a,r*} = |F_{1,2}|/F_0, \quad F_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (27)$$

Звездочки для краткости опущены.

Симметрия кривых, наблюдаемая на двух рисунках, является следствием равнозначности параметров  $\Delta_{12}$  и  $\Delta_{13}$  в формулах (23) и (24).



**Рис. 1.** Зависимость сил, действующих между цилиндрами, от параметра  $\Delta_{12}$  при  $\Delta_{13} = 0.5$ .  $F_a$  — сила притяжения цилиндров (формула (23)),  $F_k$  — сила отталкивания цилиндров (формула (24)).



**Рис. 2.** То же самое, что и на рис. 1, при  $\Delta_{13} = -0.5$ .

## Поверхностные силы

Как известно, в неоднородных диэлектриках, помещенных в электрическое поле, действуют механические (пондеромоторные) силы, плотность которых определяется выражением

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \varepsilon. \quad (28)$$

В кусочно-однородной среде это выражение записывается так:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{2} \mathbf{n}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) [E_{(+)\mathbf{t}}^2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{(+)\mathbf{n}}^2] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{n}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) [E_{(-)\mathbf{t}}^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{(-)\mathbf{n}}^2], \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор единичной нормали

$$\mathbf{n} = \exp(i\theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (30)$$

к поверхности, разделяющей среды с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (вектор  $\mathbf{n}$  направлен в сторону среды с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ );  $E_{t(+)}$ ,  $E_{t(-)}$  — касательные, а  $E_{n(+)}$ ,  $E_{n(-)}$  — нормальные составляющие вектора напряженности электрического поля на границе раздела сред соответственно в областях с проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

Для расчета силы  $\mathbf{f}$  на поверхности цилиндров воспользуемся выражением напряженности электрического поля во внешней области цилиндров  $E_1(z)$  (в формуле (29) ему отвечают составляющие вектора поля с индексом „+“).

Предварительно введем относительные величины

$$E_* = \frac{E_1}{E_0} \left( E_0 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1} \right), \quad f_* = \frac{f}{f_0} \quad (f_0 = \varepsilon_0 E_0^2),$$

$$z_* = \frac{z}{r_1} \varepsilon_{1,2,3*} = \frac{\varepsilon_{1,2,3}}{\varepsilon_0} Q_{1,2*} = \frac{Q_{1,2}}{q_1}, \quad (31)$$

где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $E_* = \{E'_*, E''_*\}$  — компоненты вектора поля на поверхностях цилиндра соответственно с параметрами  $r_1, \varepsilon_2$  и  $r_2, \varepsilon_3$ ; звездочки для краткости далее опускаем.

В относительных величинах выражение (29) принимает вид

$$\mathbf{f} = \mathbf{n} \frac{\varepsilon_1 \Delta_{12}}{1 + \Delta_{12}} \left[ E'_{t(+)}{}^2 + \frac{1 + \Delta_{12}}{1 - \Delta_{12}} E'_{n(+)}{}^2 \right]. \quad (32)$$

Из скалярного произведения  $\mathbf{nE}(z)$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор единичной нормали к цилиндру радиуса  $r_1$ , находим нормальную и касательную компоненты вектора напряженности электрического поля на граничном контуре (они обозначены штрихами)

$$\begin{aligned} E'_{n(+)}(\theta) &= \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta^{k-1} \left[ \frac{Q_1(1 - w \cos \theta)}{1 - 2w \cos \theta + w^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Delta_{12} Q_2(1 - u \cos \theta)}{1 - 2u \cos \theta + u^2} + \frac{Q_2(1 - u^{-1} \cos \theta)}{1 - 2u^{-1} \cos \theta + u^{-2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Delta_{13} Q_1(1 - v \cos \theta)}{1 - 2v \cos \theta + v^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'_{t(+)}(\theta) &= \frac{\sin \theta}{\varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta^{k-1} \left[ \frac{Q_1 w}{1 - 2w \cos \theta + w^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Delta_{12} Q_2 u}{1 - 2u \cos \theta + u^2} + \frac{Q_2 u^{-1}}{1 - u^{-1} \cos \theta + u^{-2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Delta_{13} Q_1 v}{1 - 2v \cos \theta + v^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь введены обозначения

$$w = \frac{k-1}{k-1+\delta}, \quad u = \frac{k-\delta}{k}, \quad v = \frac{k+\delta}{k}. \quad (34)$$

Плотность сил на цилиндре радиуса  $r_2$  определяется выражением, аналогичным выражению (32),

$$\mathbf{f} = \mathbf{n} \frac{\varepsilon_1 \Delta_{13}}{1 + \Delta_{13}} \left[ E_{r(+)}'' + \frac{1 + \Delta_{13}}{1 - \Delta_{13}} E_{n(+)}'' \right]. \quad (35)$$

Составляющие поля на границе (обозначенные двумя штрихами) даются выражениями

$$E_{n(+)}''(\theta) = \frac{1 - \delta}{\delta \varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta^{k-1} \left[ \frac{Q_1 (1 + w \cos \theta)}{1 + 2w \cos \theta + w^2} + \frac{\Delta_{12} Q_2 (1 + \gamma \cos \theta)}{1 + 2\gamma \cos \theta + \gamma^2} + \frac{Q_2 (1 + \alpha \cos \theta)}{1 + 2\alpha \cos \theta + \alpha^2} + \frac{\Delta_{13} Q_1 (1 + w^{-1} \cos \theta)}{1 + 2w^{-1} \cos \theta + w^{-2}} \right] \right\},$$

$$E_{r(+)}''(\theta) = - \frac{(1 - \delta) \sin \theta}{\delta \varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta^{k-1} \left[ \frac{Q_1 w}{1 + 2w \cos \theta + w^2} + \frac{\Delta_{12} Q_2 \gamma}{1 + 2\gamma \cos \theta + \gamma^2} + \frac{Q_2 \alpha}{1 + 2\alpha \cos \theta + \alpha^2} + \frac{\Delta_{13} Q_1 w^{-1}}{1 + 2w^{-1} \cos \theta + w^{-2}} \right] \right\}, \quad (36)$$

где

$$w = \frac{k}{k - 1 + \delta}, \quad \gamma = \frac{k + 1 - \delta}{k}, \quad \alpha = \frac{k - 1}{k - \delta}. \quad (37)$$

Сила  $\mathbf{f}$  совпадает с направлением нормали  $\mathbf{n}$ , однако ее знак зависит от значений параметров  $\Delta_{12}$  и  $\Delta_{13}$ .

Чтобы наглядно представить зависимость поверхностных сил от зарядов, на рис. 3–5 построены графики  $f(\theta)$ , показывающие распределение плотности силы на поверхностях цилиндров, имеющих одинаковые радиусы  $r_1 = r_2$  ( $\delta = 1/2$ ) и фиксированные значения диэлектрических проницаемостей материалов системы  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 2$ ,  $\varepsilon_3 = 10$  ( $\Delta_{12} = -0.333333$ ,  $\Delta_{13} = -0.818182$ ). Здесь индекс 1 у силы указывает на принадлежность ее к цилиндру с параметрами  $\varepsilon_2$  и  $q_1$ , а индекс 2 — к цилиндру с параметрами  $\varepsilon_3$  и  $q_2$ .

Кривые на рис. 3 отвечают случаю, когда заряженные нити имеют одинаковые линейные плотности зарядов ( $q_1 = q_2$ ), на рис. 4 заряды нитей равны по величине, но противоположны по знаку ( $q_1 = -q_2$ ) и на рис. 5 принято, что  $q_2 = 0$ , т.е. заряд имеется только в одном цилиндре, имеющем диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_2$ . Для наглядности взаимного распределения сил на двух цилиндрах зависимости  $f_2(\theta)$  смещены на угол  $\pi$ .

Обращает на себя внимание тот факт, что кривые на рис. 3 и 5 имеют четко выраженные максимумы и минимумы. Такое распределение поверхностных сил легко объяснить, если представить качественную картину электрического поля в системе и сделать оценки поляризационных явлений в диэлектриках для принятых условий.

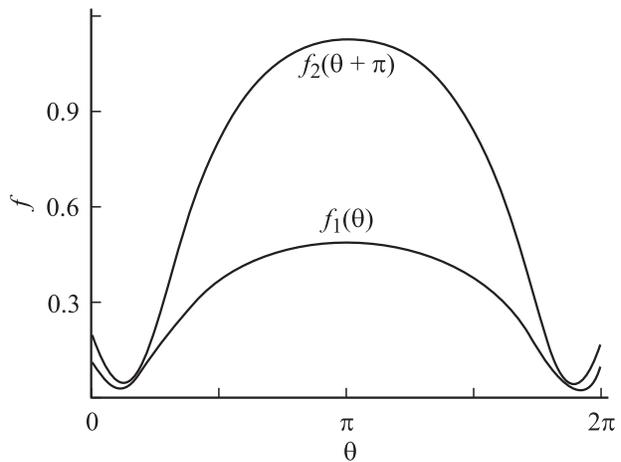


Рис. 3. Распределение поверхностных сил в системе с параметрами  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 2$ ,  $\varepsilon_3 = 10$ ,  $r_1 = r_2$ ,  $q_1 = q_2$ .  $f_1$  — сила на цилиндре с параметрами  $\varepsilon_2$  и  $q_1$ ,  $f_2$  — сила на цилиндре с параметрами  $\varepsilon_3$  и  $q_2$ .

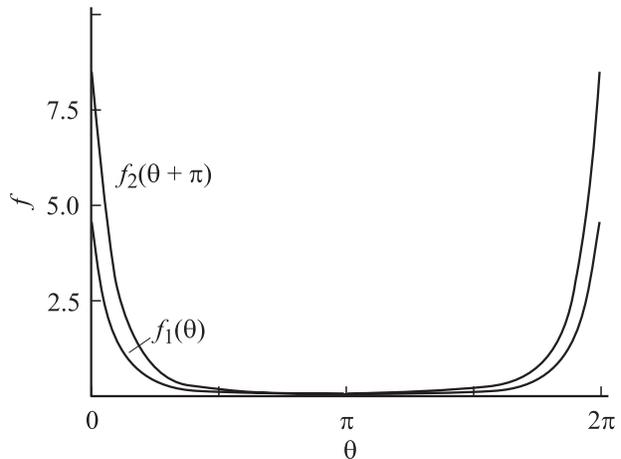


Рис. 4. То же самое, что и на рис. 3, при  $q_1 = -q_2$ .

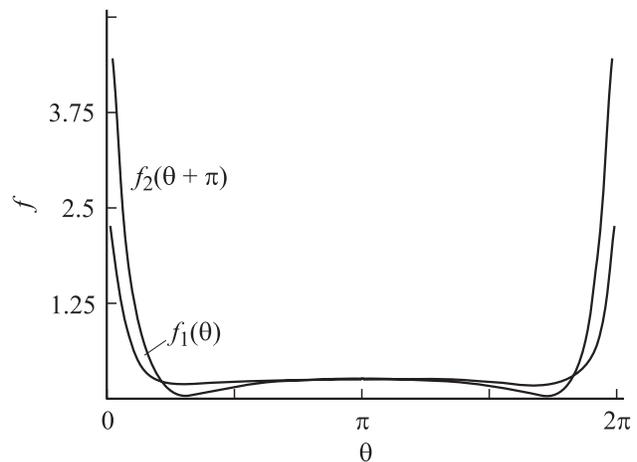


Рис. 5. То же самое, что и на рис. 3, при  $q_2 = 0$ .

Наибольшие силы возникают в окрестности точки касания цилиндров ( $\theta \sim 0.2\pi$ ) при  $q_1 = -q_2$  (рис. 4). Приблизительно такая же картина распределения сил наблюдается и в случае, когда  $q_2 = 0$ , что обусловлено большой диэлектрической проницаемостью материала цилиндра без заряда ( $\varepsilon_3 = 10$ ;  $\varepsilon_3 > \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ).

## Заключение

Главная цель настоящей работы состояла в том, чтобы установить зависимость сил, действующих в типичной для многих приложений системе заряженных проводников с изоляционными покрытиями, от диэлектрических проницаемостей материалов. Такая задача помимо практического значения представляет теоретический интерес. Изучение этого вопроса существенно упрощается благодаря построенному аналитическому решению полевой задачи и получению на его основе явных выражений объемных и поверхностных сил в рассматриваемой системе.

Проведенные исследования показали, что диэлектрические проницаемости цилиндров, в которых находятся заряженные проводники, и проницаемость внешней среды могут значительно влиять на величину сил в системе, не изменяя, однако, их характер. Варьируя свойствами диэлектрических материалов, можно в определенных пределах целенаправленно видоизменять распределение поверхностных сил на границе разнородных сред и уменьшать действие объемных сил между цилиндрами.

Интересными представляются результаты о наличии перемежающихся максимумов и минимумов поверхностных сил на цилиндрических поверхностях в системах с одноименными по знаку зарядами проводников (или при отсутствии заряда на одном из проводников). Расчеты показали, что в системах с одинаковыми диэлектрическими материалами силы притяжения и силы отталкивания не равны по абсолютной величине друг другу при фиксированных зарядах, за исключением одного частного случая.

Рассмотренная модельная задача допускает обобщение на случай, когда заряженные нити могут быть расположены не обязательно на оси цилиндров и когда цилиндры могут содержать не одно, а несколько заряженных нитей. Кроме того, заряженные нити могут находиться также во внешней по отношению к цилиндрам области. Во всех этих случаях расчеты электрического поля в системе и вычисление сил можно провести в аналитическом виде.

## Список литературы

- [1] Емец Ю.П. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 11. С. 000.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [3] Emets Yu.P. // IEEE Trans. Dielectr. and Electr. Ins. 1997. Vol. 4. N 4. P. 439–449.