

Система двух диэлектрических цилиндров с источниками зарядов. Расчет электрического поля. I

© Ю.П. Емец

Институт электродинамики НАН Украины,
03680 Киев, Украина
e-mail: emets@irpen.kiev.ua

(Поступило в Редакцию 13 сентября 2004 г. В окончательной редакции 31 марта 2005 г.)

Исследовано стационарное электрическое поле двух прямолинейных диэлектрических цилиндров кругового сечения с осевыми линейными зарядами. Цилиндрические тела параллельны и касаются друг друга с внешних сторон; они имеют различные диэлектрические проницаемости, заряды, радиусы и погружены в произвольную диэлектрическую среду. Дано точное аналитическое решение краевой задачи и проанализированы важнейшие частные случаи. Изучены особенности электрического поля в зоне соприкосновения диэлектрических цилиндров в зависимости от проницаемости материалов и соотношения электрических зарядов.

Введение

В настоящей работе получено аналитическое решение электростатической задачи о формировании электрического поля в системе двух длинных прямолинейных диэлектрических цилиндров кругового сечения, которые касаются друг друга с внешних сторон. На осях цилиндрических тел, имеющих различных радиусы, расположены линейные электрические заряды. Задача исследована в общей постановке, когда диэлектрические проницаемости цилиндров и окружающей среды имеют произвольные значения и электрические заряды не одинаковы. При этих условиях краевая задача двумерна и имеет замкнутое решение эффективными методами теории функций комплексного переменного. В конечном виде выражения комплексной напряженности электрического поля представлены бесконечными рядами полюсов первого порядка индуцированных зарядов; кроме того, имеется два простых полюса действительных зарядов. Многие известные решения задач электростатики вытекают из полученного решения как частные случаи [1,2]. Предельным переходом можно вывести выражение линейного электрического диполя с зарядами, имеющими изоляционные покрытия [3].

Исследуемая задача имеет очевидное приложение в электротехнике. В силу известной аналогии электростатических полей полученные результаты могут быть распространены также на некоторые подобные задачи в теории теплопроводности, диффузии, гидродинамике и других областях науки.

В статье принят следующий порядок изложения материала. Вначале приведены основные выражения электрического поля, описывающие поле в диэлектрических цилиндрах и в окружающем их пространстве. Затем изучены особенности формирования электрического поля и рассмотрены некоторые частные случаи. В заключительной части статьи дано аналитическое решение краевой задачи и обоснован вывод основных формул. Принятый порядок представления материала (обратный

фактической последовательности действий) позволяет ознакомиться с результатами исследований, не вникая в технику и детали вычислений (в связи, например, с возможностью применения других методов решения изучаемой задачи).

Электрическое поле системы

Схема исследуемой системы в поперечном сечении приведена на рис. 1. В неограниченной диэлектрической среде с проницаемостью ε_1 находятся два длинных прямолинейных цилиндра с проницаемостями ε_2 и ε_3 и радиусами r_1 и r_2 соответственно. В центры цилиндров помещены заряженные нити с линейными зарядами q_1 и q_2 . Цилиндры параллельны друг другу и касаются вдоль образующей. Электрическое поле в такой системе двумерно.

Пусть для определенности начало прямоугольной системы координат $xу$ совмещено с центром цилиндра (т.е. со следом его оси на плоскости), имеющего диэлектрическую проницаемость ε_2 , и ось x направлена по линии, соединяющей центры цилиндров (рис. 1). Как будет показано в дальнейшем, электрическое поле в такой системе определяется следующими выражениями:

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left[Q_1 \left(z - r_1 \frac{k-1}{k-1+\delta} \right)^{-1} + \Delta_{12} Q_2 \left(z - r_1 \frac{k-\delta}{k} \right) + Q_2 \left(z - r_1 \frac{k}{k-\delta} \right)^{-1} + \Delta_{13} Q_1 \left(z - r_1 \frac{k+\delta}{k} \right)^{-1} \right] \right\}, \quad z \in S_1;$$

$$E_2(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_2} \frac{q_1}{z} + \frac{1-\Delta_{12}}{2\pi\varepsilon_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left[\Delta_{13} Q_1 \times \left(z - r_1 \frac{k+\delta}{k} \right)^{-1} + Q_2 \left(z - r_1 \frac{k}{k-\delta} \right)^{-1} \right] \right\}, \quad z \in S_2;$$

$$E_3(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_3} \frac{q_2}{z - r_1 - r_2} + \frac{1 - \Delta_{13}}{2\pi\epsilon_3} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left[Q_1 \left(z - r_1 \frac{k-1}{k-1+\delta} \right)^{-1} + \Delta_{12} Q_2 \left(z - r_1 \frac{k-\delta}{k} \right)^{-1} \right] \right\}, \quad z \in S_3, \quad (z = x + iy). \quad (1)$$

Здесь $E_1(z) = E_{x1} - iE_{y1}$ — комплексная напряженность электрического поля во внешней области цилиндров (S_1 ; рис. 1); $E_2(z)$ — то же самое в цилиндре, имеющего диэлектрическую проницаемость ϵ_2 , радиус r_1 и осевую нить с линейной плотностью заряда q_1 (область S_2); $E_3(z)$ — то же самое в цилиндре с параметрами ϵ_3 , r_2 и q_2 (область S_3); Q_1 и Q_2 — приведенные заряды

$$Q_1 = q_1 - \Delta_{12}q_2, \quad Q_2 = q_2 - \Delta_{13}q_1; \quad (2)$$

геометрический параметр δ определен формулой

$$\delta = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad (0 \leq \delta \leq 1); \quad (3)$$

Δ_{12} и Δ_{13} — относительные диэлектрические проницаемости

$$\Delta_{12} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad \Delta_{13} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{\epsilon_1 + \epsilon_3} \quad (-1 \leq \Delta_{12}, \Delta_{13} \leq 1). \quad (4)$$

Из последних формул следуют соотношения

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{1 + \Delta_{12}}{1 - \Delta_{12}}, \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} = \frac{1 + \Delta_{13}}{1 - \Delta_{13}}. \quad (5)$$

Как видно, электрическое поле рассматриваемой системы представлено бесконечными суммами полюсов первого порядка. Эти полюсы порождаются индуцированными (фиктивными) зарядами; имеются также два действительных заряда, полюсы которых расположены в центрах окружностей. Действительным источникам зарядов q_1 и q_2 на плоскости в пространстве отвечают заряженные нити.

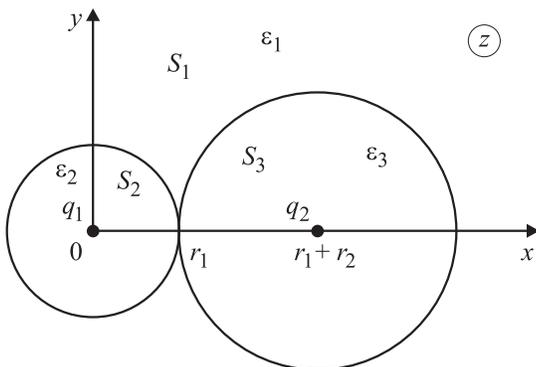


Рис. 1. Диэлектрические цилиндры с осевыми зарядами.

Электрическое поле линейного полюса первого порядка имеет следующее представление в комплексной форме:

$$E(z) = E_x - iE_y = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{G}{z - a} \quad (z = x + iy), \quad (6)$$

где G — интенсивность (обильность) полюса, a — координата полюса.

В выражениях (1) интенсивность полюсов зависит от величин линейных зарядов q_1 , q_2 и диэлектрических проницаемостей всех элементов системы: ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 (Δ_{12} , Δ_{13}) и, что примечательно, не зависит от геометрических характеристик системы (отношения радиусов цилиндров). Для обычных диэлектрических материалов модули параметров Δ_{12} и Δ_{13} малы ($|\Delta_{12}|$, $|\Delta_{13}| < 1$), поэтому при увеличении числа k интенсивность индуцированных источников уменьшается и, следовательно, в суммах выражений (1) можно учитывать ограниченное число членов.

Все полюсы расположены на отрезке $[0, (r_1 + r_2)]$ действительной оси; при увеличении числа k их плотность возрастает по мере приближения к точке касания окружностей $x = r$ с каждой стороны.

Заметим, что координаты пары полюсов, фигурирующих в выражениях (1),

$$a_k = r_1 \frac{k - \delta}{k}, \quad b_k = r_1 \frac{k}{k - \delta} \quad (7)$$

удовлетворяют соотношению инверсии относительно окружности r_1 : $a_k b_k = r_1^2$.

Точно так же вторая пара координат полюсов

$$c_k = r_1 \frac{k - 1}{k - 1 + \delta}, \quad d_k = r_1 \frac{k + \delta}{k} \quad (8)$$

удовлетворяет соотношению инверсии относительно окружности r_2 (проще всего в этом можно убедиться, если начало координат перенести в центр окружности с параметрами ϵ_3 и r_2 и провести элементарные преобразования).

Выражения (1) дают общее решение поставленной задачи. Они удовлетворяют всем условиям задачи. Действительно, во внешней области электрическое поле стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, в центрах окружностей расположены реальные заряды q_1 и q_2 , на границе окружностей, разделяющей материалы с различными диэлектрическими проницаемостями, нормальные компоненты вектора индукции и касательные составляющие вектора напряженности электрического поля непрерывны (граничные условия легко проверяются также с помощью компьютерных расчетов).

Приведенное решение позволяет установить некоторые характерные особенности формирования электрического поля в рассматриваемой неоднородной структуре. В частности, при определенных соотношениях параметров системы напряженность электрического поля имеет минимумы внутри цилиндров и возрастает к их границе в окрестности точки касания (в случае одного цилиндра с заряженной нитью на оси напря-

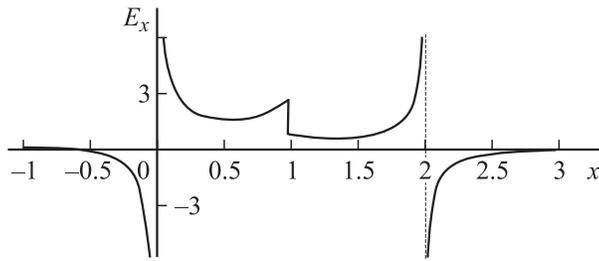


Рис. 2. Изменение напряженности электрического поля вдоль оси x .

женность поля, как известно, уменьшается обратно пропорционально радиусу). Для иллюстрации сказанного на рис. 2 построен график изменения напряженности электрического поля вдоль оси x при следующих параметрах: $q_2 = -2q_1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$, $\varepsilon_3 = 10$ ($\Delta_{12} = -0.5$, $\Delta_{13} = -0.818182$), $r_1 = r_2$ ($\delta = 0.5$). Для этих параметров напряженность электрического поля в точке касания окружностей принимает значения $E_{x2} = 2.717949$, $E_{x3} = 0.815385$, а в точке минимума $x = 0.55$ на оси x имеем $E_{x2\min} = 1.593578$ и соответственно в точке $x = 1.3$ — $E_{x3\min} = 0.568824$. Кривые на рис. 2 приведены в относительных величинах

$$E_{1,2,3*} = E_{1,2,3}/(q_1/2\pi\varepsilon_1 r_1), \quad x_* = x/r_1. \quad (9)$$

Для краткости письма звездочки при написании относительных величин опущены.

Некоторые частные случаи

Общие выражения электрического поля (1) позволяют получить ряд частных решений, имеющих самостоятельное значение. Некоторые из этих решений обсуждаются в настоящем разделе (для контроля даны также решения известных задач [1,2]).

1. Если линейные заряды не имеют диэлектрических оболочек $\varepsilon_v \equiv \varepsilon$ ($v = 1, 2, 3$) ($\Delta_{12} = \Delta_{13} = 0$), то приходим к элементарной системе двух параллельных заряженных нитей в однородной среде; прямолинейные нити удалены друг от друга на расстояние $h = r_1 + r_2$ (заряды расположены на оси x ; начало системы координат совмещено с зарядом, имеющим линейную плотность q_1)

$$E(z) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon z} + \frac{q_2}{2\pi\varepsilon(z-h)},$$

$$E(z) \equiv E_v(z) \quad (v = 1, 2, 3). \quad (10)$$

2. Пусть система состоит из одного диэлектрического цилиндра с параметрами ε_2 , r_1 и q_1 . Другой цилиндр и заряженная нить отсутствуют $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ ($\Delta_{13} = 0$), $q_2 = 0$. В этом случае выражения (1) принимают простейший вид

$$E_1(z) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_1 z} \quad (|z| \geq r_1),$$

$$E_2(z) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_2 z} \quad (|z| \leq r_1), \quad E_3(z) = E_1(z), \quad (11)$$

где ε_1 — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей цилиндр.

3. Выражения (1) дают решение известной задачи об электрическом поле диэлектрического цилиндра, возле которого расположена параллельно ему заряженная нить [1]. Пусть для определенности диэлектрический цилиндр имеет параметры ε_2 , r_1 а заряженная нить имеет линейную плотность заряда q_2 (рис. 3). В соответствии с этими условиями необходимо положить

$$q_1 = 0, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \quad (\Delta_{13} = 0), \quad h = r_1 + r_2, \quad (12)$$

в результате получим

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \left[\frac{q_2}{z-h} - \Delta_{12} q_2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-r_1^2/h} \right) \right] \quad (|z| \geq r_1),$$

$$E_2(z) = \frac{q_2(1-\Delta_{12})}{2\pi\varepsilon_2(z-h)} \quad (|z| \leq r_1), \quad E_3(z) = E_1(z), \quad (13)$$

где, как и ранее, ε_1 — диэлектрическая проницаемость среды во внешней области цилиндра.

4. Пусть в первоначально рассматриваемой системе имеется только один диэлектрический цилиндр с заряженной нитью на его оси (параметры цилиндра таковы: ε_2 , r_1 , q_1). Параллельно цилиндру на расстоянии $h = r_1 + r_2$ от его оси расположена заряженная нить с линейной плотностью заряда q_2 (рис. 4). Отвечающие этим условиям решение получим из выражений (1) при

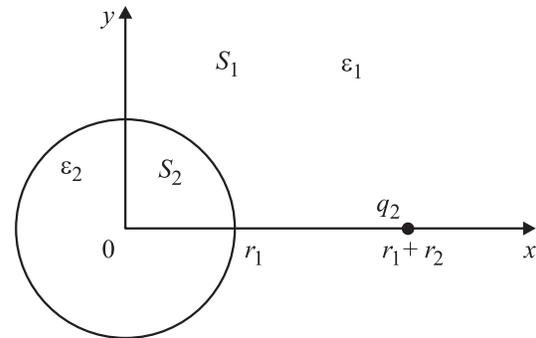


Рис. 3. Диэлектрический цилиндр и заряженная нить.

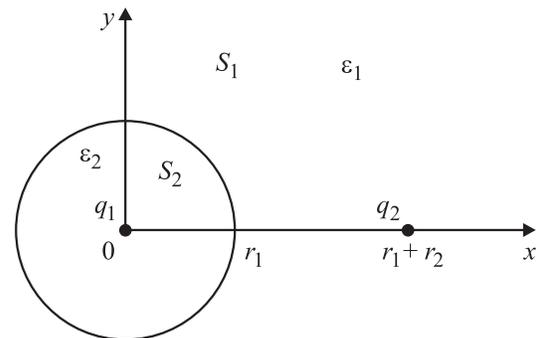


Рис. 4. Диэлектрический цилиндр с осевым зарядом и заряженная нить.

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 (\Delta_{13} = 0)$$

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \left[\frac{q_2}{z-h} + \frac{q_1 - \Delta_{12}q_2}{z} + \frac{\Delta_{12}q_2}{z - r_1^2/h} \right] \quad (|z| \geq r_1),$$

$$E_2(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_2} \left[\frac{q_1}{z} + \frac{q_2(1 - \Delta_{12})}{z-h} \right] \quad (|z| \leq r_1),$$

$$E_3(z) = E_1(z). \quad (14)$$

Если в этих выражениях положить $q_1 = 0$, то приходим к решению, приведенному в пункте 3.

5. Пусть сохранены все условия пункта 4 с тем лишь отличием, что нить с плотностью заряда q_2 расположена на поверхности цилиндра в точке $x = r_1$, на оси x . Электрическое поле в такой системе получим из выражений (1), полагая $r_2 = 0$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ ($\Delta_{13} = 0$).

Имеем

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \left[\frac{q_1 - \Delta_{12}q_2}{z} + \frac{q_2(1 + \Delta_{12})}{z - r_1} \right] \quad (|z| \geq r_1),$$

$$E_2(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_2} \left[\frac{q_1}{z} + \frac{q_2(1 - \Delta_{12})}{z - r_1} \right] \quad (|z| \leq r_1),$$

$$E_3(z) = E_1(z). \quad (15)$$

Эти выражения следуют также из формул (14), где необходимо положить $h = r_1$.

6. Если в выражениях (1) диэлектрическую проницаемость ε_3 устремить к бесконечности (в электростатике такая формальная замена соответствует переходу от диэлектрика к идеально проводящему материалу [1]), то получим решение задачи, когда диэлектрический цилиндр с параметрами ε_2 , r_1 , q_1 касается металлического провода радиуса r_2 , причем провод заряжен с линейной плотностью заряда q_2 (рис. 5). При $\varepsilon_3 \rightarrow \infty$ ($\Delta_{13} = -1$) выражения (1) принимают вид

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-\delta_{12})^{k-1} \left[Q_1 \left(z - r_1 \frac{k-1}{k-1+\delta} \right)^{-1} + \Delta_{12} Q_2 \left(z - r_1 \frac{k-\delta}{k} \right)^{-1} + Q_2 \left(z - r_1 \frac{k}{k-\delta} \right)^{-1} - Q_1 \left(z - r_1 \frac{k+\delta}{k} \right)^{-1} \right] \right\}, \quad z \in S_1;$$

$$E_2(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_2} \left[\frac{q_1}{z} + \frac{1 - \Delta_{12}}{2\pi\varepsilon_2} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-\Delta_{12})^{k-1} \left[-Q_1 \left(z - r_1 \frac{k+\delta}{k} \right)^{-1} + Q_2 \left(z - r_1 \frac{k}{k-\delta} \right)^{-1} \right] \right\}, \quad z \in S_2;$$

$$E_3(z) = 0, \quad z \in S_3, \quad (16)$$

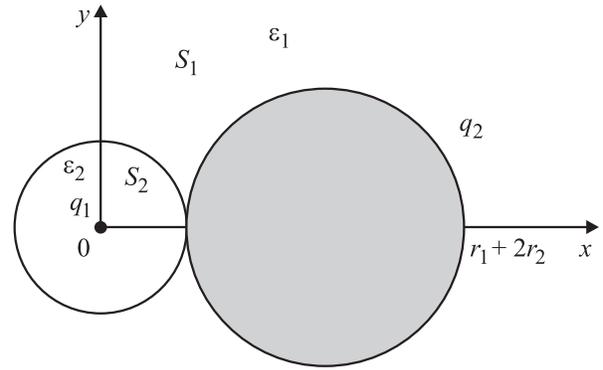


Рис. 5. Диэлектрический цилиндр с осевым зарядом и металлический провод.

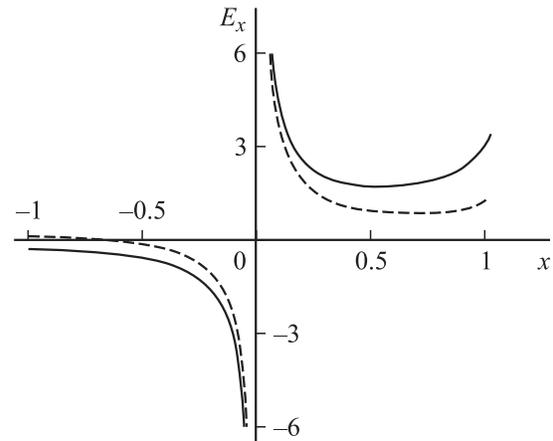


Рис. 6. Изменение напряженности электрического поля вдоль оси x в системе, показанной на рис. 5.

где теперь

$$Q_1 = q_1 - \Delta_{12}q_2, \quad Q_2 = q_1 + q_2. \quad (17)$$

Если в формулах (16) положить $q_2 = 0$, то получим решение задачи, когда диэлектрический цилиндр с заряженной нитью на его оси граничит с незаряженным металлическим проводом радиуса r_2 . Заметим, что напряженность электрического поля в области контакта диэлектрического цилиндра и металлического провода изменяется не монотонно, а характеризуется наличием минимума. График изменения напряженности электрического поля на оси x приведен на рис. 6; он построен при тех же параметрах, что и кривые на рис. 2, с тем лишь отличием, что теперь $\varepsilon_3 \rightarrow \infty$ ($\Delta_{13} = -1$). Пунктир отвечает системе при $q_2 = 0$.

7. Если условие задачи в пункте 6 дополнить соотношением $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ ($\Delta_{12} = -1$), то с учетом равенства

$$Q_1 = Q_2 = q_1 + q_2 \quad (18)$$

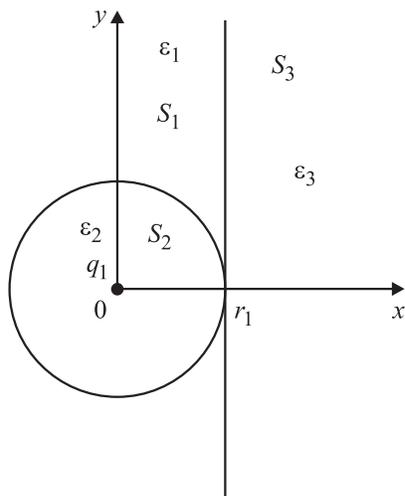


Рис. 7. Диэлектрический цилиндр с осевым зарядом на границе разнородных сред.

выражения (16) запишутся так:

$$E_1(z) = \frac{q_1 + q_2}{2\pi\epsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(z - r_1 \frac{k-1}{k-1+\delta} \right)^{-1} - \left(z - r_1 \frac{k-\delta}{k} \right)^{-1} + \left(z - r_1 \frac{k}{k-\delta} \right)^{-1} - \left(z - r_1 \frac{k+\delta}{k} \right)^{-1} \right], \quad z \in S_1;$$

$$E_2(z) = 0, \quad z \in S_2; \quad E_3(z) = 0, \quad z \in S_3. \quad (19)$$

Формулы (19) дают решение задачи об электрическом поле двух прямолинейных металлических проводов круглого сечения с радиусами r_1 и r_2 . Провода касаются друг друга и имеют линейную плотность заряда $q_1 + q_2$.

8. Из выражений (1) можно получить решение задачи об электрическом поле следующей системы. Диэлектрический цилиндр с заряженной нитью на его оси расположен на плоской границе раздела двух разнородных сред. Схема системы и ее параметры представлены на рис. 7. К решению этой задачи приходим, если в выражениях (1) принять, что $q_2 = 0, r_2 \rightarrow \infty (\delta = 1)$.

После простых преобразований получим

$$E_1(z) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_1} (1 - \Delta_{12}\Delta_{13}) \times \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left[\left(z - r_1 \frac{k-1}{k} \right)^{-1} + \Delta_{13} \left(z - r_1 \frac{k+1}{k} \right)^{-1} \right] \right\}, \quad z \in S_1;$$

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_2} \frac{q_1}{z} + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_2} \Delta_{13} (1 - \Delta_{12})(1 - \Delta_{12}\Delta_{13}) \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left(z - r_1 \frac{k+1}{k} \right)^{-1} \right], \quad z \in S_2;$$

$$E_3(z) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_3} (1 - \Delta_{13})(1 - \Delta_{12}\Delta_{13}) \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left(z - r_1 \frac{k-1}{k} \right)^{-1} \right], \quad z \in S_3. \quad (20)$$

Это решение было построено независимо, для отдельно поставленной задачи в работе [4], где были проанализированы также многие частные случаи, связанные с этой системой.

9. Выражения (1) позволяют получить формулу, определяющую электрическое поле линейного диполя, заряженные нити которого имеют диэлектрические покрытия, в общем случае не одинаковые.

Пусть в первоначально рассматриваемой системе диэлектрические цилиндры имеют равные радиусы $r_1 = r_2 \equiv r$. На осях цилиндров размещены заряженные нити с плотностями зарядов $q_1 \equiv q$ и $q_1 = -q_2$. Поместим начало прямоугольной системы координат в точку касания окружностей на плоскости xy .

При этих условиях на больших расстояниях от системы (в плоскости, поперечной к осям цилиндров) справедливы асимптотические соотношения

$$z_2 \gg [r/(2r-1)]^2, \quad z^2 \gg (r/2k)^2. \quad (21)$$

Используя эти оценки, первое выражение (1) можно привести к виду

$$E_1(z) = \frac{qr}{2\pi\epsilon_1 z^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left(\frac{2 + \Delta_{12} + \Delta_{13}}{2k-1} - \frac{2\Delta_{12}\Delta_{13} + \Delta_{12} + \Delta_{13}}{2k} \right) \right], \quad z \in S_1. \quad (22)$$

Выражение (22) определяет электрическое поле линейного диполя с изолированными заряженными нитями. Оно было получено и подробно изучено в работе [3].

Решение краевой задачи

Электрическое поле в системе определяется линейными уравнениями электростатики

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (23)$$

где \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля, \mathbf{D} — вектор индукции электрического поля, ϵ — диэлектрическая проницаемость материала.

В сечении, поперечном к осям цилиндров, уравнения (23) двумерны и можно ввести комплексные функции

$$E(z) = E_x - iE_y, \quad D(z) = D_x - iD_y, \quad (z = x + iy), \quad (24)$$

которые удовлетворяют условиям Коши–Римана.

Векторы электрического поля \mathbf{E} и \mathbf{D} и функции $E(z)$ и $D(z)$ связаны соотношениями

$$\mathbf{E} = \overline{E(z)}, \quad \mathbf{D} = \overline{D(z)}, \quad (25)$$

где черта над функцией означает операцию комплексного сопряжения.

Схематически рассматриваемая система представлена на рис. 1. Здесь плоскость комплексного переменного z разделена окружностями L_1 и L_2 на три области S_1 , S_2 и S_3 , в каждой из которых материалы имеют диэлектрические проницаемости соответственно ε_1 , ε_2 и ε_3 . Источниками электрического поля в системе служат точечные заряды q_1 и q_2 в центрах окружностей L_1 и L_2 . Математические источники поля описываются простыми полюсами. Таким образом, кусочно-аналитическая функция $E(z) = \{E_1(z), E_2(z), E_3(z)\}$ состоит из аналитической функции $E_1(z)$ в области S_1 и двух мероморфных функций: $E_2(z)$ в области S_2 и $E_3(z)$ в области S_3 .

На бесконечности электрическое поле исчезает, поэтому

$$E_1(\infty) = 0. \quad (26)$$

Мероморфные функции $E_2(z)$ и $E_3(z)$ записываются в виде

$$E_2(z) = \frac{A}{z} + E_2'(z), \quad z \in S_2;$$

$$E_3(z) = \frac{B}{z-h} + E_3'(z) \quad (h = r_1 + r_2), \quad z \in S_3, \quad (27)$$

где A и B — постоянные, $E_2'(z)$ и $E_3'(z)$ — аналитические функции соответственно в областях S_2 и S_3 .

Постоянные A и B имеют следующие значения:

$$A = \frac{1}{2\pi\varepsilon_2}, \quad B = \frac{1}{2\pi\varepsilon_3}. \quad (28)$$

При отсутствии на границе разнородных сред свободных зарядов электрическое поле удовлетворяет стандартным граничным условиям: нормальные составляющие вектора \mathbf{D} и касательные компоненты вектора \mathbf{E} непрерывны. В терминах функции $E(z)$ эти условия записываются так:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{n(t)\varepsilon_1 E_1(t)\} &= \operatorname{Re} \{n(t)\varepsilon_m E_m(t)\}, \\ \operatorname{Im} \{n(t)E_1(t)\} &= \operatorname{Im} \{n(t)E_m(t)\}, \\ t \in L_{m-1} \quad (m = 2, 3), \end{aligned} \quad (29)$$

где $n(t)$ — единичная нормаль к граничным контурам L_1 и L_2

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{t}{r_1}, \quad t \in L_1 \quad (t = r_1 e^{i\theta}), \\ n(t) &= \frac{t - r_1 - r_2}{r_2}, \quad t \in L_2 \quad (t = r_1 + r_2(1 + e^{i\theta})), \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (30)$$

В развернутой форме равенства (29) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 E_1(t) + \varepsilon_1 \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)} &= \varepsilon_2 E_2(t) + \varepsilon_2 \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, \\ E_1(t) - \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)} &= E_2(t) - \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, \quad t \in L_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 E_1(t) + \varepsilon_1 \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_1(t)} &= \varepsilon_3 E_3(t) \\ &+ \varepsilon_3 \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_3(t)}, \\ E_1(t) - \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_1(t)} &= E_3(t) \\ &- \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_3(t)}, \quad t \in L_2, \end{aligned} \quad (31)$$

где учтены соотношения

$$\bar{t} = \frac{r_1^2}{t}, \quad \bar{t} - r_1 - r_2 = \frac{r_2^2}{t - r_1 r_2}. \quad (32)$$

Для упрощенных граничных условий исключим из каждой пары соотношений (31) одну из функций, например $\overline{E_1(t)}$. В результате получим

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_1 E_1(t) &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)E_2(t) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, \quad t \in L_1; \\ 2\varepsilon_1 E_1(t) &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)E_3(t) \\ &- (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_3(t)}, \quad t \in L_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя формулы (4) и (5), равенства (33) можно представить в виде

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_{12})E_1(t) &= E_2(t) - \Delta_{12} \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, \quad t \in L_1; \\ (1 + \Delta_{13})E_1(t) &= E_3(t) - \Delta_{13} \left(\frac{r_1}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_3(t)}, \quad t \in L_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, расчет электрического поля в рассматриваемой системе сводится к решению граничной задачи (34) с дополнительными условиями (26) и (27). В теории аналитических функций эта задача называется краевой задачей сопряжения Римана (в математической литературе ее обычно называют граничной задачей R -линейного сопряжения). В данном случае решение сформулированной задачи удастся получить в замкнутой форме, используя метод конформного отображения и принцип аналитического продолжения. В процессе вычислений будет получено функциональное уравнение, которое имеет точное решение. Такой подход исследования краевой задачи Римана был развит в работах [4–6].

Отобразим плоскость z на плоскость ξ с помощью дробно-линейной функции

$$z = T(\xi) = r_1 \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \quad (\xi = \xi + i\eta). \quad (35)$$

При этом отображении окружности L_1 и L_2 переходят в прямые $\lambda_1 = (\xi : \operatorname{Re} \xi = 0)$ и $\lambda_2 = (\xi : \operatorname{Re} \xi = \gamma)$ соответственно, бесконечная точка отображается в точку

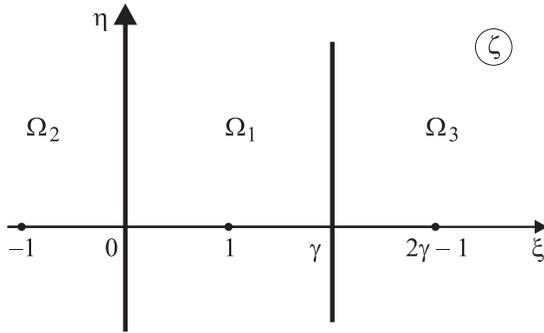


Рис. 8. Конформное отображение системы, показанной на рис. 1.

$\xi = 1$; областям S_ν ($\nu = 1, 2, 3$) на плоскости ξ соответствуют области Ω_ν (рис. 1 и 8), где обозначено

$$\gamma = \frac{1}{\delta} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \quad (1 \leq \gamma < \infty). \quad (36)$$

Функция

$$\xi = T^{-1}(z) = \frac{z + r_1}{z - r_1} \quad (37)$$

осуществляет отображение, обратное (35).

В отображенной плоскости кусочно-аналитическая функция

$$f(\xi) = E(T(\xi)) \quad (38)$$

удовлетворяет на контурах λ_1 и λ_2 граничным условиям

$$(1 + \Delta_{12})f_1(\tau) = f_2(\tau) - \Delta_{12} \left(\frac{r_1}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_2(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_1;$$

$$(1 + \Delta_{13})f_1(\tau)$$

$$= f_3(\tau) - \Delta_{13} \left(\frac{r_2}{T(\tau) - r_1 - r_2} \right)^2 \overline{f_3(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_2. \quad (39)$$

Условие (26) дает значение функции $f(\xi)$ в точке $\xi = 1$

$$f_1(1) = 0. \quad (40)$$

Мероморфные функции $f_2(\xi)$ и $f_3(\xi)$ в соответствии с выражениями (27) в отображенной плоскости ξ записываются так:

$$f_2(\xi) = A' \frac{\xi - 1}{\xi + 1} + f_2'(\xi),$$

$$f_3(\xi) = \frac{B'(\xi - 1)}{\xi - (2r_1 + r_2)/r_2} + f_3'(\xi), \quad (41)$$

где $f_2'(\xi)$ и $f_3'(\xi)$ — аналитические функции в областях Ω_2 и Ω_3 соответственно; A' и B' — постоянные, которые связаны с константами A и B соотношениями

$$A' = \frac{A}{r_1}, \quad B' = -\frac{B}{r_2}. \quad (42)$$

Функцию $f_1(\xi)$ можно представить в таком виде:

$$f_1(\xi) = f_1^+(\xi) + f_1^-(\xi), \quad (43)$$

где функция $f_1^+(\xi)$ аналитическая в полуплоскости $\text{Re } \xi < \gamma$, а функция $f_1^-(\xi)$ — в полуплоскости $\text{Re } \xi > 0$.

С учетом соотношения (43) равенства (39) можно переписать так:

$$(1 + \Delta_{12})f_1^+(\tau) - f_2(\tau) = -\Delta_{12} \left(\frac{r_1}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_2(\tau)}$$

$$- (1 + \Delta_{12})f_1^-(\tau), \quad \tau \in \lambda_1;$$

$$(1 + \Delta_{13})f_1^-(\tau) - f_3(\tau) = -\Delta_{13} \left(\frac{r_2}{T(\tau) - r_1 - r_2} \right)^2 \overline{f_3(\tau)}$$

$$- (1 + \Delta_{13})f_1^+(\tau), \quad \tau \in \lambda_2. \quad (44)$$

Согласно принципу непрерывного аналитического продолжения равенства (44), можно ввести две мероморфные функции:

$$\Phi(\xi) =$$

$$= \begin{cases} (1 + \Delta_{12})f_1^+(\xi) - f_2(\xi), & \text{Re } \xi \leq 0; \\ -(1 + \Delta_{12})f_1^-(\xi) - \Delta_{12} \left(\frac{r_1}{T(\xi)} \right)^2 \overline{f_2(-\bar{\xi})}, & \text{Re } \xi \geq 0; \end{cases}$$

$$\Psi(\xi) =$$

$$= \begin{cases} (1 + \Delta_{13})f_1^-(\xi) - f_3(\xi), & \text{Re } \xi \leq \gamma; \\ -(1 + \Delta_{13})f_1^+(\xi) - \Delta_{13} \left(\frac{r_2}{T(\xi) - r_1 - r_2} \right)^2 \overline{f_3(2\gamma - \bar{\xi})}, & \text{Re } \xi \geq \gamma. \end{cases} \quad (45)$$

Отметим, что в выражениях (45) фигурируют функции

$$\frac{r_1}{T(\xi)} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad \frac{r_2}{T(\xi) - r_1 - r_2} = \frac{\xi - 1}{2\gamma - 1 - \xi}, \quad (46)$$

первая из которых аналитическая при $\text{Re } \xi > 0$, а вторая — при $\text{Re } \xi < \gamma$.

Из приведенных формул вытекает, что функция $\Phi(\xi)$ имеет простой полюс в точке $\xi = -1$ и нуль первого порядка в точке $\xi = 1$ (в эти точки переходят соответственно начало координат и бесконечно удаленная точка при конформном отображении плоскости z на плоскость ξ). Аналогичными свойствами обладает функция $\Psi(\xi)$.

В плоскости ξ мероморфные функции $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ допускают существование простых полюсов соответственно в точках $\xi = -1$ и $\xi = 2\gamma - 1$, поэтому на основании обобщенной теоремы Лиувилля они определяются формулами

$$\Phi(\xi) = -A' \frac{\xi - 1}{\xi + 1} + C_1, \quad \Psi(\xi) = -B' \frac{\xi - 1}{\xi - 2\gamma + 1} + C_2, \quad (47)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые определяются из дополнительных условий, например из поведения

функций $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ в точках, в которых их значение известно. В качестве такой точки берем точку $\xi = 1$. Анализ показывает, что $C_1 = C_2 = 0$.

Из выражений (43), (47) следует, что кусочно-аналитическая функция $f(\xi)$ имеет следующее представление

$$f(\xi) = \begin{cases} f_2(\xi) = (1 + \Delta_{12})f_1^+(\xi) + A' \frac{\xi-1}{\xi+1}, & \operatorname{Re} \xi < 0; \\ f_1(\xi) = f_1^+(\xi) + f_1^-(\xi), & 0 < \operatorname{Re} \xi < \gamma; \\ f_3(\xi) = (1 + \Delta_{13})f_3^-(\xi) + B' \frac{\xi-1}{\xi-2\gamma+1}, & \operatorname{Re} \xi > \gamma. \end{cases} \quad (48)$$

Задача, таким образом, сведена к нахождению двух функций $f_1^+(\xi)$ и $f_1^-(\xi)$. Они будут определены последовательно путем решения функционального уравнения относительно одной из них.

Объединяя выражения (45) и (47), получим две пары равенств:

$$f_2(\xi) = (1 + \Delta_{12})f_1^+(\xi) = A' \frac{\xi-1}{\xi+1}, \quad \operatorname{Re} \xi < 0;$$

$$(1 + \Delta_{12})f_1^-(\xi) + \Delta_{12} \left(\frac{\xi-1}{\xi+1} \right)^2 \overline{f_2(-\bar{\xi})} = A' \frac{\xi-1}{\xi+1}, \quad \operatorname{Re} \xi > 0;$$

$$f_3(\xi) - (1 + \Delta_{13})f_1^-(\xi) = \frac{B'(\xi-1)}{\xi-2\gamma+1}, \quad \operatorname{Re} \xi > \gamma;$$

$$(1 + \Delta_{13})f_1^+(\xi) + \Delta_{13} \left(\frac{\xi-1}{\xi-2\gamma+1} \right)^2 \overline{f_3(2\gamma-\bar{\xi})} = \frac{B'(\xi-1)}{\xi-2\gamma+1}, \quad \operatorname{Re} \xi < \gamma. \quad (49)$$

Последующие действия направлены на получение одного равенства с одной неизвестной функцией.

Осуществляя в (49) преобразования симметрии относительно прямой λ_1 во втором равенстве и относительно прямой λ_2 в третьем равенстве, получим

$$f_2(\xi) = (1 + \Delta_{12})f_1^+(\xi) = A' \frac{\xi-1}{\xi+1}, \quad \operatorname{Re} \xi < 0;$$

$$(1 + \Delta_{12}) \overline{f_1^-(-\bar{\xi})} + \Delta_{12} \left(\frac{\xi+1}{\xi-1} \right)^2 f_2(\xi) = A' \frac{\xi+1}{\xi-1}, \quad \operatorname{Re} \xi < 0;$$

$$\overline{f_3(2\gamma-\bar{\xi})} - (1 + \Delta_{13}) \overline{f_1^-(2\gamma-\bar{\xi})} = B' \frac{\xi-2\gamma+1}{\xi-1}, \quad \operatorname{Re} \xi < \gamma;$$

$$(1 + \Delta_{13})f_1^+(\xi) + \Delta_{13} \left(\frac{\xi-1}{\xi-2\gamma+1} \right)^2 \overline{f_3(2\gamma-\bar{\xi})} = \frac{B'(\xi-1)}{\xi-2\gamma+1}, \quad \operatorname{Re} \xi < \gamma. \quad (50)$$

Исключение из первой пары равенств функции $f_2(\xi)$, а из второй — функции $f_3(\xi)$, после простых преобразований приводит к двум соотношениям:

$$\Delta_{12} \left(\frac{\xi+1}{\xi-1} \right)^2 f_1^+(\xi) + \overline{f_1^-(-\bar{\xi})} = A'' \frac{\xi-1}{\xi+1}, \quad \operatorname{Re} \xi < 0;$$

$$\Delta_{13} \left(\frac{\xi-1}{\xi-2\gamma+1} \right)^2 \overline{f_1^-(2\gamma-\bar{\xi})} + f_1^+(\xi) = \frac{B''(\xi-1)}{\xi-2\gamma+1}, \quad \operatorname{Re} \xi < \gamma, \quad (51)$$

где обозначено

$$A'' = A' \frac{1 - \Delta_{12}}{1 + \Delta_{12}}, \quad B'' = B' \frac{1 - \Delta_{13}}{1 + \Delta_{13}}. \quad (52)$$

Из равенств (51) можно исключить одну из двух неизвестных функций, например $f_1^+(\xi)$. Тогда

$$\overline{f_1^-(-\bar{\xi})} - \Delta_{12}\Delta_{13} \left(\frac{\xi+1}{\xi-2\gamma+1} \right)^2 \overline{f_1^-(2\gamma-\bar{\xi})} = A'' \frac{\xi+1}{\xi-1} - \frac{\Delta_{12}B''(\xi+1)^2}{(\xi-1)(\xi-2\gamma+1)}, \quad \operatorname{Re} \xi < 0. \quad (53)$$

В этом равенстве выполним преобразование симметрии относительно прямой λ_1

$$f_1^-(\xi) - \Delta_{12}\Delta_{13} \left(\frac{\xi-1}{\xi+2\gamma-1} \right)^2 f_1^-(\xi+2\gamma) = A'' \frac{\xi-1}{\xi+1} - \frac{\Delta_{12}B''(\xi-1)^2}{(\xi+1)(\xi+2\gamma-1)}, \quad \operatorname{Re} \xi > 0. \quad (54)$$

Соотношение (54) представляет собой функциональное уравнение относительно неизвестной функции $f_1^-(\xi)$. Его решение находится методом математической индукции.

Последовательная подстановка возрастающего аргумента функции на величину 2γ дает соотношения

$$f_1^-(\xi+2\gamma) = A'' \frac{\xi+2\gamma-1}{\xi+2\gamma+1} - \frac{\Delta_{12}B''(\xi+2\gamma-1)^2}{(\xi+2\gamma+1)(\xi+4\gamma-1)} + \Delta_{12}\Delta_{13} \left(\frac{\xi+2\gamma-1}{\xi+4\gamma-1} \right)^2 f_1^-(\xi+4\gamma),$$

$$f_1^-(\xi+4\gamma) = A'' \frac{\xi+4\gamma-1}{\xi+4\gamma+1} - \frac{\Delta_{12}B''(\xi+4\gamma-1)^2}{(\xi+4\gamma+1)(\xi+6\gamma-1)} + \Delta_{12}\Delta_{13} \left(\frac{\xi+4\gamma-1}{\xi+6\gamma-1} \right)^2 f_1^-(\xi+6\gamma) \quad (55)$$

и т.д. После n -кратного применения этой процедуры уравнение (54) с помощью соотношений (55) приво-

дится к виду

$$f_1^-(\xi) = (\xi - 1)^2 \sum_{k=1}^n \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left[\frac{A''}{(\xi + 2(k-1)\gamma)^2 - 1} - \frac{\Delta_{12}B''}{(\xi + 2(k-1)\gamma + 1)(\xi + 2k\gamma - 1)} \right] \right\} + (\Delta_{12}\Delta_{13})^n \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 2n\gamma - 1} \right)^2 f_1^-(\xi + 2n\gamma), \quad \text{Re } \xi > 0. \quad (56)$$

Последний член в правой части выражения (56) содержит малые параметры $|\Delta_{12}|$, $|\Delta_{13}|$, $\gamma < 1$, причем функция $f_1^-(\xi)$ стремится к нулю в бесконечно удаленной точке, поэтому при неограниченном увеличении числа n остаточный член стремится к нулю. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ функция $f_1^-(\xi)$ определяется таким выражением:

$$f_1^-(\xi) = (\xi - 1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left[\frac{A''}{(\xi + 2(k-1)\gamma)^2 - 1} - \frac{\Delta_{12}B''}{(\xi + 2(k-1)\gamma + 1)(\xi + 2k\gamma - 1)} \right] \right\}, \quad \text{Re } \xi > 0. \quad (57)$$

Другая неизвестная функция, $f_1^+(\xi)$, находится из второго равенства (51) с помощью выражения (57), в котором предварительно необходимо провести надлежащие преобразования. Вычисления дают

$$f_1^+(\xi) = -(\xi - 1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \left[\frac{\Delta_{13}A''}{(\xi - 2k\gamma)^2 - 1} - \frac{B''}{(\xi - 2k\gamma + 1)(\xi - 2(k-1)\gamma - 1)} \right] \right\}, \quad \text{Re } \xi < \gamma. \quad (58)$$

Таким образом, обе неизвестные функции, $f_1^+(\xi)$ и $f_1^-(\xi)$, полностью определены. Согласно соотношениям (48), эти функции позволяют получить явные выражения кусочно-аналитической функции $f(\xi)$. После возвращения в плоскость переменной z находится искомое выражение электрического поля в рассматриваемой системе.

При переходе к переменной z выражения (58) и (57) принимают вид

$$f_1^+(z) = -(\delta r_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1}}{k - \delta} \times \left[\frac{\Delta_{13}A''}{k} \left(z - r_1 \frac{k}{k - \delta} \right)^{-1} \left(z - r_1 \frac{k + \delta}{k} \right)^{-1} - \frac{B''}{k - 1} \left(z - r_1 \frac{k}{k - \delta} \right)^{-1} \left(z - r_1 \frac{k - 1 + \delta}{k - 1} \right)^{-1} \right] \right\},$$

$$f_1^-(z) = (\delta r_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1}}{k - 1 + \delta} \times \left[\frac{A''}{k - 1} \left(z - r_1 \frac{k - 1}{k - 1 + \delta} \right)^{-1} \left(z - r_1 \frac{k - 1 - \delta}{k - 1} \right)^{-1} - \frac{\Delta_{12}B''}{k} \left(z - r_1 \frac{k - 1}{k - 1 + \delta} \right)^{-1} \left(z - r_1 \frac{k - \delta}{k} \right)^{-1} \right] \right\}. \quad (59)$$

В приведенных выражениях члены рядов имеют общий вид $C/(z - p)(z - q)$, где C , p и q — постоянные, их можно разложить в сумму простых дробей. Выполнение этой операции позволяет записать выражения (59) в такой форме (с учетом принятых обозначений (52), (42) и (28)):

$$f_1^+(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \times \left[\Delta_{13}(q_1 - \Delta_{12}q_2) \left(z - r_1 \frac{k + \delta}{k} \right)^{-1} - (\Delta_{13}q_1 - q_2) \left(z - r_1 \frac{k}{k - \delta} \right)^{-1} \right] \right\},$$

$$f_1^-(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12}\Delta_{13})^{k-1} \times \left[(q_1 - \Delta_{12}q_2) \left(z - r_1 \frac{k - 1}{k - 1 + \delta} \right)^{-1} - \Delta_{12}(\Delta_{13}q_1 - q_2) \left(z - r_1 \frac{k - \delta}{k} \right)^{-1} \right] \right\}. \quad (60)$$

С помощью этих формул были получены выражения электрического поля (1), приведенные во втором разделе.

Конструктивный метод решения

Предложенный в настоящей работе строгий метод решения краевой задачи опирается на хорошо известные положения теории аналитических функций и в принципе несложен, хотя и требует кропотливых вычислений. Полученные в конечном итоге выражения электрического поля просты по форме, вполне обозримы, легко анализируются и удобны для численных расчетов.

Поставленная задача может быть также исследована иными методами. В числе других приемов решения задачи следует особо отметить конструктивный способ аналитического расчета электрического поля ввиду его исключительной простоты и физической наглядности действий на каждом шаге решения задачи. Сущность метода состоит в следующем. Анализ решений ряда модельных задач с линейными источниками зарядов позволяет предположить, что в рассматриваемой кусочно-однородной среде электрическое поле в каждой области может быть представлено бесконечными рядами полюсов первого порядка, отвечающих фиктивным зарядам, кроме того, имеется два простых полюса с действительными зарядами.

Общие выражения электрического поля в системе можно записать в таком виде:

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \frac{P_{vk}}{z - z_{vk}}, \quad z \in S_1;$$

$$E_2(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_2} \frac{q_1}{z - z_1} + \frac{1}{2\pi\epsilon_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^2 \frac{P_{vk}}{z - z_{vk}}, \quad z \in S_2;$$

$$E_3(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_3} \frac{q_2}{z - z_2} + \frac{1}{2\pi\epsilon_3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=3}^2 \frac{P_{vk}}{z - z_{vk}}, \quad z \in S_3, \quad (61)$$

где q_1 и q_2 — линейные плотности действительных зарядов, P_{vk} — интенсивности полюсов, z_1 и z_2 — координаты действительных зарядов, z_{vk} — координаты фиктивных зарядов.

Наличие двойных сумм в (61) поясняется следующим изложением.

Задача сводится к нахождению неизвестных величин P_{vk} и z_{vk} .

Координаты фиктивных зарядов z_{vk} можно определить из соотношений инверсии. Справедливость этого утверждения была отмечена выше при анализе основных формул (1). Два действительных заряда порождают две цепочки фиктивных зарядов (они представлены в каждой окружности, поэтому в выражениях (61) фигурируют двойные суммы). Действительный заряд в центре одной окружности инверсно отображается во вторую окружность, полученный в этой точке фиктивный заряд отображается в исходную окружность, образованный фиктивный заряд затем отображается во вторую окружность, и процесс инверсных отображений вновь образованных зарядов бесконечнократно повторяется. Другая цепочка полюсов вычисляется точно так же, но в качестве начального заряда берется действительный заряд во второй окружности, который инверсно отображается в первую окружность, фиктивный заряд затем отображается во вторую окружность, и т.д.

Чтобы установить правило, по которому вычисляются интенсивности полюсов P_{vk} необходимо воспользоваться вспомогательной задачей о нахождении электрического поля в прямолинейном диэлектрическом цилиндре кругового сечения, возле которого параллельно расположена заряженная нить. Решение этой задачи известно [1] (оно приведено выше, в пункте 3). Из решения задачи находится явное выражение интенсивности полюсов, отвечающих фиктивным зарядам при инверсном отображении. Таким образом могут быть определены все неизвестные элементы P_{vk} в выражениях (61).

По сути описанная схема расчета поля относится к методу изображений, который широко используется в теории электромагнетизма.

Основной недостаток описанного алгоритма заключается в том, что для определения параметров k -го полюса необходимо последовательно вычислить координаты всех $k - 1$ предшествующих ему полюсов. Хотя такой

подход требует выполнения однотипных операций, он, однако, сопряжен с некоторыми неудобствами при численных вычислениях и асимптотических разложениях.

При строгом решении краевой задачи методом, изложенным в предыдущем разделе, в аналитических выражениях параметры полюсов определяются независимо друг от друга, что во многих случаях упрощает расчеты и анализ общих выражений (1).

Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать несколько общих замечаний.

Поставленная задача имеет точное аналитическое решение, представленное в простом виде. Физическая наглядность результатов упрощает анализ электрического поля в достаточно сложной для теоретического рассмотрения системе, которая характеризуется многими параметрами. Последнее обстоятельство объясняет наличие большого числа частных случаев, вытекающих из общего решения.

Расчеты позволяют установить некоторые характерные особенности формирования поля в области контакта цилиндров в зависимости от величин зарядов и диэлектрических проницаемостей материалов цилиндров и окружающей их среды. Наличие минимума напряженности электрического поля в цилиндрах в физическом плане можно объяснить наложением электрических полей, создаваемых каждым из двух действительных источников зарядов.

Интересно отметить, что интенсивность полюсов фиктивных зарядов не зависит от геометрических характеристик системы и определяется только ее физическими параметрами (диэлектрическими проницаемостями материалов и зарядами нитей).

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [2] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
- [3] Емец Ю.П. // Энергетика. 2000. № 2. С. 127–131.
- [4] Emets Yu.P. // IEEE Trans. Dielectr. and Electr. Ins. 1997. Vol. 4. N 4. P. 439–449.
- [5] Емец Ю.П., Обносков Ю.В., Онофричук Ю.П. // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 1. С. 3–14.
- [6] Emets Yu.P., Onofrichuk Yu.P. // IEEE Trans. Dielectr. and Electr. Ins. 1996. Vol. 3. N 1. P. 87–98.