

01;03

Приемы математического планирования баллистического эксперимента. II

© С.В. Бобашев,¹ Н.П. Менде,¹ А.Б. Подласкин,¹ В.А. Сахаров,¹
В.А. Бердников,² В.А. Викторов,² С.И. Осеева,² Г.Д. Садчиков²

¹ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,

194021 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: s.bobashev@mail.ioffe.ru

² Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,

607190 Саров, Нижегородская область, Россия

e-mail: berdnikov@dep16.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 17 февраля 2005 г.)

Излагаются математические приемы, позволяющие планировать проведение наземных летных испытаний моделей аэродинамических объектов с целью определения оптимальных условий эксперимента с точки зрения максимального объема и точности получаемой информации. В первой части статьи изложен используемый подход, который проиллюстрирован планированием баллистического эксперимента на примере обработки одиночного опыта. Во второй части рассматриваются результаты планирования при совместной обработке траекторных данных нескольких опытов.

Моделирование движения осесимметричного объекта в свободном полете для совместной обработки данных нескольких опытов

В первой части статьи рассматривалось движение в воздухе модельного осесимметричного аэродинамического объекта со следующими параметрами: длина 0.1 м, диаметр 0.045 м, масса 0.2 кг, главный центральный момент инерции относительно поперечной оси $5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Плотность воздуха принята равной 1.25 kg/m^3 . Рассматривалась траектория длиной 60 м с двадцатью постами регистрации траекторных данных со следующими погрешностями: 0.25 мм для линейных координат центра масс, 0.2° для угловых координат и $0.5 \mu\text{s}$ для времени. Начальная скорость движения составляла 1000 m/s , начальный угол атаки 20° . Гипотетическому объекту были приписаны аэродинамические характеристики, представленные первыми коэффициентами их разложений в степенные ряды по углу атаки: коэффициент сопротивления $C_x = C_x^0 + C_x^{\alpha^2}$, коэффициент демпфирующей подъемной силы $C_y^{\overline{\omega}} = \text{const}$, коэффициент подъемной силы $C_y = C_y^\alpha \alpha + C_y^{\alpha^3} \alpha^3$, коэффициент демпфирующего момента $C_m^{\overline{\omega}} = \text{const}$, коэффициент статического аэродинамического момента $C_m = C_m^\alpha \alpha + C_m^{\alpha^3} \alpha^3$. Уравнения движения приведены в первой части статьи.

Величины коэффициентов полиномиального представления аэродинамических характеристик воспроизведены здесь в табл. 1. Там же даны доверительные полуинтервалы их оценивания по результатам одиночного эксперимента при названных выше условиях его проведения.

Из табл. 1 видно, что точность определения нелинейных по углу атаки членов коэффициента сопро-

тивления и аэродинамического момента весьма низка. О причине такой низкой точности говорилось в первой части статьи. Чтобы уменьшить погрешности, включим в совместную обработку данные четырех модельных экспериментов с различными начальными углами атаки 5, -10 , 15 и 20° . Результаты оценивания доверительных полуинтервалов приведены в табл. 2.

Таблица 1.

Обозначение коэффициента	Величина коэффициента, безразмерная	Оценка погрешности, %
C_x^0	0.2	1.4
$C_x^{\alpha^2}$	0.1	88.3
$C_y^{\overline{\omega}}$	2.0	15.5
C_y^α	1.0	1.7
$C_y^{\alpha^3}$	-2.0	14.6
$C_m^{\overline{\omega}}$	-0.1	4.6
C_m^α	-0.25	3.1
$C_m^{\alpha^3}$	0.02	77.7

Таблица 2.

Обозначение коэффициента	Величина коэффициента, безразмерная	Оценка погрешности, %
C_x^0	0.2	0.14
$C_x^{\alpha^2}$	0.1	14.5
$C_y^{\overline{\omega}}$	2.0	11.5
C_y^α	1.0	0.9
$C_y^{\alpha^3}$	-2.0	9.4
$C_m^{\overline{\omega}}$	-0.1	3.3
C_m^α	-0.25	0.9
$C_m^{\alpha^3}$	0.02	27.9

Таблица 3.

Угол атаки, deg.	Коэффициент сопротивления		Коэффициент подъемной силы		Коэффициент аэродинамического момента	
	Величина, безразмерная	Доверительный полуинтервал, %	Величина, безразмерная	Доверительный полуинтервал, %	Величина, безразмерная	Доверительный полуинтервал, %
0	.2000	.14	.0000		.0000	
2.00	.2001	.13	.0348	.86	-.0009	.88
4.00	.2005	.11	.0691	.81	-.0017	.81
6.00	.2011	.09	.1024	.72	-.0026	.69
8.00	.2019	.09	.1342	.61	-.0034	.54
10.00	.2030	.14	.1639	.51	-.0043	.41
12.00	.2044	.22	.1911	.48	-.0051	.41
14.00	.2060	.33	.2152	.64	-.0058	.66
16.00	.2078	.45	.2357	.98	-.0065	1.05
18.00	.2099	.58	.2521	1.46	-.0072	1.55
20.00	.2122	.73	.2965	2.10	-.0079	2.14

Видно, что точность определения коэффициентов разложений заметно возросла по сравнению с данными табл. 1. Для дальнейшего уменьшения погрешностей старших коэффициентов разложений необходимо либо ужесточать требования к точности измерений координат и времени, что мало реально, либо включать в обработку большее число опытов с разным размахом колебаний.

Важно отметить, что погрешности нелинейных составляющих аэродинамических коэффициентов, достигающие двух–трех десятков процентов, не сказываются так значимо при вычислении самих зависимостей коэффициентов от угла атаки благодаря корреляции между этими составляющими (корреляция обусловлена их линейными зависимостями между собой, поскольку они связаны линейными алгебраическими уравнениями [1–3]). Для иллюстрации приведем табл. 3 значений зависимостей аэродинамических коэффициентов и их доверительных полуинтервалов, рассчитанных по данным табл. 2, с учетом коэффициентов корреляции между параметрами разложений коэффициентов. Коэффициенты корреляции — это недиагональные элементы дисперсионных матриц, которые мы здесь не приводим.

Из табл. 3 видно, что доверительные интервалы функций, описывающих изменение аэродинамических коэффициентов, заметно возрастают к верхней границе интервала угла атаки, однако не так уж сильно, как можно было ожидать, имея в виду двадцати- и тридцатипроцентные доверительные полуинтервалы старших членов их разложений (табл. 2).

О влиянии числа и расположения постов регистрации траекторных данных

Рассмотрим теперь, как сказывается на точности определения аэродинамических коэффициентов число постов регистрации, расположенных равномерно вдоль трассы длиной 60 м при совместной обработке четырех опытов

(задача проектирования новой установки). На рис. 1 и 2 приведены результаты оценивания, из которых видно, что доверительные интервалы для линейных коэффициентов и момента демпфирования на порядок меньше интервалов для нелинейных составляющих и демпфирующей силы. Напомним, что эти последние коэффициенты были намеренно выбраны на пределе значимости при обработке данных одного опыта. Совместная обработка четырех опытов позволила уменьшить их погрешности в среднем втрое. Как и следовало ожидать, погрешности определения аэродинамических коэффициентов убывают с ростом числа постов регистрации координат. Однако эти зависимости становятся все более пологими по мере увеличения числа постов. Имея в виду возможности

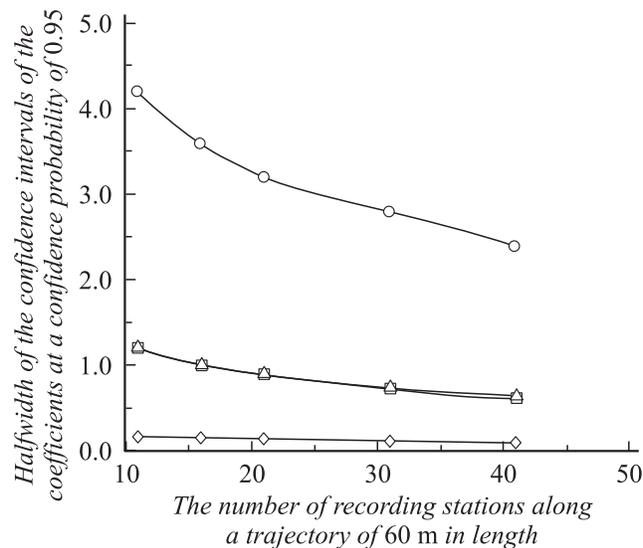


Рис. 1. Зависимости доверительных интервалов демпфирования (кружки) и линейных составляющих аэродинамических коэффициентов (треугольники — момент, квадратики — подъемная сила, ромбики — сопротивление) от числа постов регистрации при совместной обработке четырех опытов на трассе длиной 60 м.

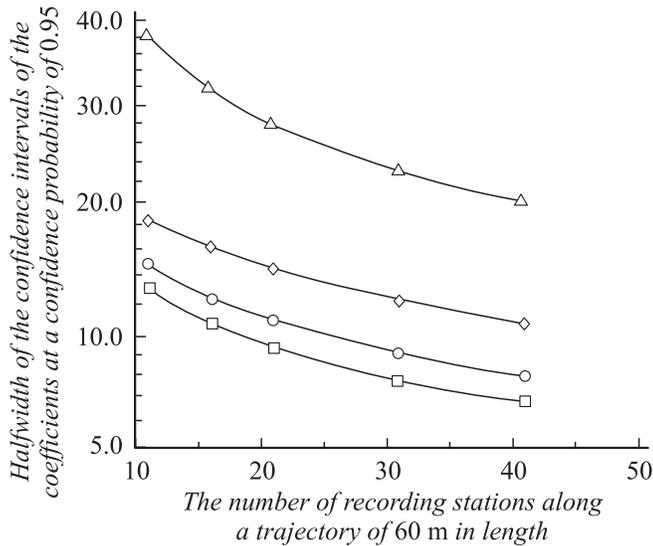


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для нелинейных составляющих статических аэродинамических коэффициентов (треугольники — момент, квадратики — подъемная сила) и демпфирующей подъемной силы (кружки).

уменьшения погрешностей аэродинамических коэффициентов путем увеличения числа совместно обрабатываемых опытов, следует признать целесообразным ограничить число постов на трассе длиной 60 м приблизительно двадцатью–тридцатью. При этом расстояние между постами при их равномерном расположении (около 2 м) обеспечивает достаточные площади для обслуживания и размещения вспомогательного или технологического оборудования. Ниспадающим кривым на рис. 1 и 2 противостоят увеличение стоимости сооружения и трудоемкости эксплуатации установки, таким образом, выбор

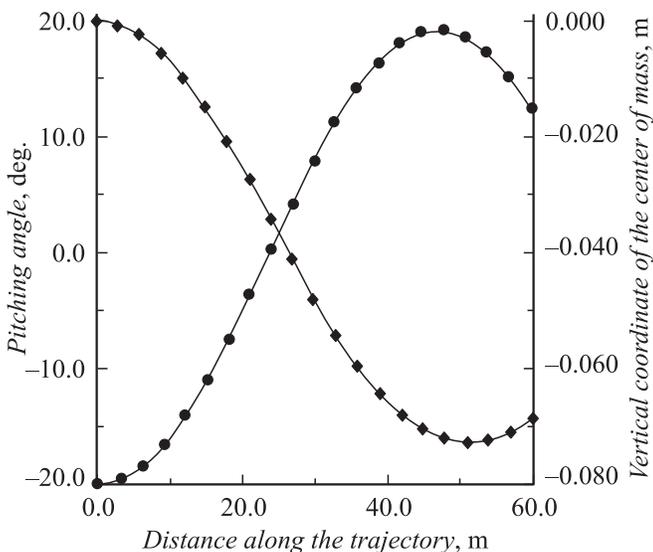


Рис. 3. Угол тангажа (кружки) и вертикальная координата центра масс летящего объекта (квадратики) при давлении воздуха, пониженном в десять раз по сравнению с атмосферным.

оптимального числа постов зависит от многих, в том числе и субъективных, факторов.

Путем моделирования можно показать, что равномерность расположения постов регистрации координат объекта не имеет существенного значения. При расположении десяти постов на первых двадцати метрах траектории и еще десяти на оставшихся сорока метрах, погрешности на рис. 1 изменяются на доли процента, а на рис. 2 — в пределах 1–2%. Отсюда следует практический вывод: полезно именно так — неравномерно разместить посты регистрации с тем, чтобы получить возможность при необходимости использовать только начальный участок траектории и иметь при этом приемлемое число точек плана эксперимента.

О влиянии давления рабочего газа

Если баллистическая установка снабжена измерительной барокамерой, позволяющей регулировать параметры газовой среды, в которой летит объект, появляются дополнительные возможности для выбора соотношения между длиной волны колебаний объекта и длиной регистрируемого участка траектории. Растянуть длину волны на всю длину барокамеры можно, понизив давление в последней. На рис. 3 показаны изменение угла тангажа и вертикальной координаты центра масс того же рассматриваемого объекта на длине 60 м при давлении в барокамере 10^{-4} Па. В табл. 4 приведены данные оценивания ожидаемых погрешностей в результате совместной обработки четырех опытов при пониженном давлении. Из таблицы следует, что при давлении в десять раз ниже атмосферного для определения нелинейных составляющих коэффициентов нужно увеличить длину трассы, поскольку не выручает даже совместная обработка нескольких опытов (ср. с табл. 1). Если увеличить длину трассы втрое (до 180 м), результаты существенно улучшатся (табл. 5).

Влияние начальной скорости полета объекта

Ответить на вопрос, как сказывается на погрешностях определения аэродинамических коэффициентов по траекторным данным начальная скорость движения объекта, можно, не прибегая к численному моделированию. В работе [4] приведены уравнения плоского движения осесимметричного объекта в газе в линейном приближении. Воспроизведем их приближенно, отбросив члены, оказывающие малое влияние,

$$t'' = kt' C_x, \quad (1)$$

$$y'' = kC_y - (t')^2 g, \quad (2)$$

$$\vartheta'' = -kr_z^{-2} C_m, \quad (3)$$

штрихами в уравнениях (1)–(3) обозначены производные от времени t , координаты y и угла тангажа ϑ

Таблица 4.

Обозначение коэффициента	Величина коэффициента, безразмерная	Оценка погрешности, %
C_x^0	0.2	1.4
$C_x^{\alpha^2}$	0.1	92.0
$C_y^{\overline{\alpha}}$	2.0	291.0
C_y^{α}	1.0	3.5
$C_y^{\alpha^3}$	-2.0	25.2
$C_m^{\overline{\alpha}}$	-0.1	179.3
C_m^{α}	-0.25	4.1
$C_m^{\alpha^3}$	0.02	72.6

Таблица 5.

Обозначение коэффициента	Величина коэффициента, безразмерная	Оценка погрешности, %
C_x^0	0.2	0.16
$C_x^{\alpha^2}$	0.1	10.5
$C_y^{\overline{\alpha}}$	2.0	27.1
C_y^{α}	1.0	0.9
$C_y^{\alpha^3}$	-2.0	7.1
$C_m^{\overline{\alpha}}$	-0.1	9.0
C_m^{α}	-0.25	0.8
$C_m^{\alpha^3}$	0.02	16.0

по продольной координате x (как это сделано в [5,6]); $k = \rho S / 2m$, где ρ — плотность рабочего газа; S — площадь мидела модели; m — масса модели; l — ее длина; r_z — радиус инерции относительно поперечной оси; C_x , C_y и C_m — коэффициенты сопротивления, подъемной силы и полного аэродинамического момента (включая демпфирование) соответственно; g — ускорение силы тяжести.

Если отбросить второй член в правой части (2) (учесть падение модели можно приближенно, если пренебречь малой вертикальной составляющей силы сопротивления, путем добавления к координатам y величин $gt^2/2$), видим, что в уравнения (2) и (3) не входят явно ни время, ни скорость полета (зависимостью коэффициентов C_y и C_m от скорости на коротком участке траектории можно пренебречь), стало быть, они не окажут влияния на оценивание подъемной силы и аэродинамического момента.

Иначе дело обстоит с уравнением (1). Здесь сама функция отклика — полетное время непосредственно зависит от скорости движения и монотонно нарастает тем медленней, чем выше скорость ($t' = V^{-1}$, где V — текущая скорость модели). Нас, однако, должна интересовать не вся функция отклика, а лишь вклад в нее, вносимый наличием сопротивления среды.

Второй интеграл уравнения (1) при постоянном C_x имеет вид

$$t = t_0 + \frac{t'_0}{kC_x} (\exp(kC_x x) - 1). \quad (4)$$

Разложим выражение (4) в степенной ряд по x

$$t = t_0 + t'_0 x + t'_0 \left(kC_x \frac{x^2}{2!} + k^2 C_x^2 \frac{x^3}{3!} + \dots \right). \quad (5)$$

Первые два члена в правой части (5) соответствуют равномерному движению (без торможения). Выражение в скобках обеспечивает вклад, вызванный уменьшением скорости, и само от скорости не зависит (если пренебречь зависимостью коэффициента сопротивления от числа Маха, в данном случае это эффект второго порядка). Множителем перед скобкой является величина, обратная начальной скорости движения. Таким образом, чем выше начальная скорость, тем меньший абсолютный вклад внесет сопротивление в функцию отклика — полетное время, т. е. представляющая интерес величина убывает обратно пропорционально скорости. Естественно, что при неизменных погрешностях измерения времени и пути относительная погрешность оценки сопротивления на фиксированном отрезке траектории будет расти, причем примерно пропорционально увеличению начальной скорости. Численное моделирование полностью подтверждает этот вывод. Таким образом, для поддержания приемлемой величины погрешности определения коэффициента сопротивления по траекторным данным при увеличении скорости движения объекта необходимо, как и при уменьшении давления рабочего газа, увеличивать длину регистрируемого участка траектории, причем примерно пропорционально увеличению скорости.

О выборе размеров и инерционных характеристик объекта

Еще одна возможность изменения условий опыта с целью их оптимизации состоит в выборе размеров модели объекта (при неизменной форме) и ее инерционных характеристик. Как первое, так и второе можно делать независимо, однако более широкие возможности предоставляет изменение размеров (изменить плотность материала модели в несколько раз трудней, чем ее размеры). Смоделируем в прежних условиях при атмосферном давлении четыре опыта, уменьшив размеры

Таблица 6.

Обозначение коэффициента	Величина коэффициента, безразмерная	Оценка погрешности, %
C_x^0	0.2	0.15
$C_x^{\alpha^2}$	0.1	27.2
$C_y^{\overline{\alpha}}$	2.0	26.0
C_y^{α}	1.0	1.8
$C_y^{\alpha^3}$	-2.0	19.9
$C_m^{\overline{\alpha}}$	-0.1	2.4
C_m^{α}	-0.25	0.5
$C_m^{\alpha^3}$	0.02	22.1

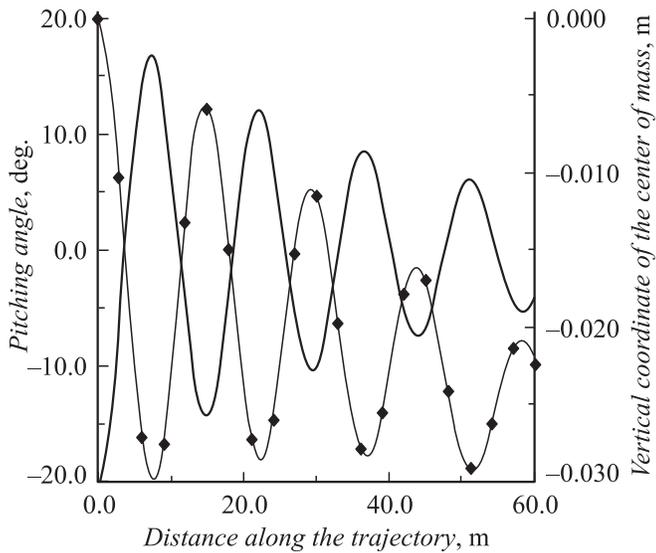


Рис. 4. Изменение угла тангажа (кривая без значков) и вертикальной координаты центра масс (ромбики) вдоль траектории для модели, вдвое меньшей по сравнению с рис. 1, при том же расположении массы по объему и начальной скорости полета 2.5 km/s.

модели вдвое. Ее масса уменьшится в 8 раз, а момент инерции — в 32 раза. Графики угловых колебаний модели и поперечного перемещения центра масс в одном из опытов показаны на рис. 4, а результат оценивания погрешностей — в табл. 6.

Как видно из рис. 4 и табл. 6, в данных условиях увеличение частоты колебаний, вызванное уменьшением момента инерции модели, ухудшает условия определения составляющих коэффициента подъемной силы. Этот отрицательный пример не исключает выработки размеров и инерционных характеристик модели с целью достижения положительного результата.

Выводы

Алгоритм численного моделирования плоского движения осесимметричного объекта в газовой среде, развитый на основе предложенных другими авторами подходов к идентификации аэродинамических коэффициентов объекта по его дискретным траекторным данным, предоставляет удобную возможность для последовательного планирования баллистического эксперимента. Разработки других авторов дополнены приемами статистического оценивания ожидаемых погрешностей идентификации аэродинамических характеристик при заданных погрешностях измерений траекторных данных. Математическое планирование баллистического эксперимента имеет целью поиск оптимальных условий его проведения с точки зрения получения результатов с лучшей точностью.

Авторы выражают признательность В.О. Афанасьеву за сотрудничество.

Список литературы

- [1] *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров. М: Статистика, 1979. 346 с. Bard Y. Nonlinear Parameter Estimation. Cambridge, Massachusetts: International Business Machines Corporation.
- [2] *Хартман К., Лецкий Э., Шеффер В.* и др. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / Под ред. Э.К. Лецкого. М: Мир, 1977. 552 с. Hartmann K., Lezki E., Schäfer W. Statistische Versuchsplanung and -auswertung in der Stoffwirtschaft. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1974.
- [3] *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. М: Наука, 1987. 319 с.
- [4] *Менде Н.П.* // Физико-газодинамические баллистические исследования / Под ред. Г.И. Мишина. Л: Наука, 1980. С. 200–224.
- [5] *Chapman G.T., Kirk D.B.* // AIAA J. 1970, N 4. P. 753–758. Пер. на рус. Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 4. С. 182–188.
- [6] *Менде Н.П.* Препринт ФТИ им. А.Ф. Иоффе. СПб. 1989. № 1326. 44 с. Mende N.P. Nonlinear Estimation of Aerodynamic Characteristics from Discrete Free-Flight Data. Gas Dynamics / Ed. Yu.I. Koptev. New York: Nova Science Publishers, Inc., 1992. P. 325–356.