

01;03

Приемы математического планирования баллистического эксперимента. I

© С.В. Бобашев,¹ Н.П. Менде,¹ А.Б. Подласкин,¹ В.А. Сахаров,¹
В.А. Бердников,² В.А. Викторов,² С.И. Осеева,² Г.Д. Садчиков²

¹ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,

194021 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: s.bobashev@mail.ioffe.ru

² Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,

607190 Саров, Нижегородская область, Россия

e-mail: berdnikov@dep16.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 17 февраля 2005 г.)

Излагаются математические приемы, позволяющие планировать проведение наземных летных испытаний моделей аэродинамических объектов с целью определения оптимальных условий эксперимента с точки зрения максимального объема и точности получаемой информации. В первой части статьи изложен используемый подход, который проиллюстрирован планированием баллистического эксперимента на примере обработки одиночного опыта. Во второй части рассматриваются результаты планирования при совместной обработке траекторных данных нескольких опытов.

Введение

Под баллистическим экспериментом имеются в виду летные испытания моделей аэродинамических объектов в лабораторных и полевых условиях. Одной из традиционных целей таких испытаний является определение силовых и моментных аэродинамических характеристик объекта. На этой задаче и будет сосредоточено внимание.

Необходимость в математическом планировании баллистического эксперимента возникает как при проектировании новой баллистической установки, так и в ходе исследований. В последнем случае задачей планирования является определение оптимальных условий проведения опытов на существующей баллистической установке, обеспечивающих получение необходимого объема сведений с максимально возможной точностью. Рассматриваемые ниже приемы позволяют решать обе задачи.

Баллистическая установка для определения аэродинамических характеристик объекта по зарегистрированным траекторным данным включает метатель объекта и набор средств (чаще всего оптических), позволяющий зарегистрировать дискретные значения траекторных данных в нескольких точках вдоль траектории, число которых может измеряться десятками. Под траекторными данными имеются в виду привязанные ко времени регистрации три линейные координаты центра масс объекта в земной системе координат и три угловые координаты, определяющие ориентацию объекта в пространстве. Задача нахождения силовых аэродинамических характеристик по траекторным данным состоит в решении обратной задачи динамики движения твердого тела с использованием упомянутых дискретных траекторных

данных, содержащих погрешности измерений. Очевидно, задача является некорректной, как и любая обратная задача.

Краткое описание математических приемов

Приемы, о которых пойдет речь, основаны на методе нелинейного оценивания параметров систем [1,2] путем подбора математической модели по числовым данным, получаемым на выходе системы (так называемым откликом). Насколько известно, впервые применительно к рассматриваемой задаче используется в данной работе подход был предложен авторами [3] при анализе траекторных данных спускаемого космического аппарата „Джемини“ и был назван ими методом дифференциальной коррекции. В теории нелинейного оценивания он известен как метод Гаусса—Ньютона. Задача решается методом наименьших квадратов путем минимизации целевой функции — остаточной суммы квадратов отклонений измеренных значений координат от рассчитанных по выбранной математической модели при некотором приближении искомых параметров. Минимизация осуществляется путем коррекции начальных приближений параметров. Однако составить аналитические выражения для целевых функций не представляется возможным, поскольку отсутствуют аналитические решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений движения. Прием Гаусса—Ньютона заключается в представлении неизвестных решений в виде линейных отрезков многомерных рядов Тейлора по искомым параметрам. Следуя авторам [3], поясним сказанное простым выражением для остаточной суммы квадратов по одной

из координат

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N \left[q_{\text{exp}}(x_i) - q_{\text{calc}}(x_i)_0 - \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial q}{\partial C_j} \right)_i \Delta C_j - \frac{\partial q}{\partial q_0} \Delta q_0 - \frac{\partial q}{\partial q'_0} \Delta q'_0 \right]^2. \quad (1)$$

Здесь приняты обозначения: ε_i — отклонения измеренных значений координаты $q_{\text{exp}}(x_i)$ в N точках x_i от значений $q_{\text{calc}}(x_i)_0$, рассчитанных с использованием выбранной математической модели, начального приближения M искомым параметрам C_j и двух неизвестных начальных условий движения q_0 и q'_0 , малые приращения которых (дифференциалы ΔC_j , Δq_0 и $\Delta q'_0$) улучшат приближение при условии, что удастся найти первые производные в круглых скобках выражения (1) и затем вычислить сами приращения из условия минимума всего выражения.

Первые производные функции отклика по искомым параметрам находят путем следующей последовательности действий. Исходное дифференциальное уравнение движения для рассматриваемой функции отклика (координаты объекта)

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + f\left(\frac{dq}{dx}, q\right) = 0$$

дифференцируют по всем искомым параметрам C_j , присовокупив к ним начальные условия движения, поскольку функция q зависит и от них, а именно

$$q = q(C_1, C_2, C_3, \dots, C_m, q_0, q'_0, x).$$

Независимая переменная обозначена через x условно, это может быть координата в направлении полета (как это сделано в [3]) или полетное время. При этом предполагается возможность изменения последовательности дифференцирования функции q по независимой переменной и искомым параметрам, что позволяет рассматривать полученные уравнения как линейные дифференциальные второго порядка с переменными коэффициентами относительно первых частных производных функции q по искомым параметрам, включая начальные условия движения. Эти дифференциальные уравнения называют уравнениями чувствительности. Начальные условия для производных по аэродинамическим коэффициентам, дополняющие уравнения чувствительности, оказываются нулевыми и равны единице лишь для производных по начальной координате и начальной скорости ее изменения. Подробная запись на наглядном примере приведена в [3]. Коэффициенты уравнений чувствительности и их правые части могут быть найдены численным интегрированием исходного уравнения движения при некотором приближении искомым параметрам. Таким образом, совместное численное интегрирование исходного уравнения движения и системы уравнений чувствительности позволит найти значения частных производных от функции отклика по искомым параметрам в точках плана эксперимента x_j .

Условия локального минимума выражения (1) по искомым параметрам дают $M + 2$ линейных алгебраических уравнений относительно поправок ΔC_j , Δq_0 и $\Delta q'_0$, что позволяет получить новое приближение этих параметров $C_j^{t+1} = C_j^t + \Delta C_j^t$, где верхним индексом t отмечен порядковый номер итерации. Итерационный процесс сходится очень быстро даже при достаточно грубом начальном приближении параметров.

На этапе решения системы алгебраических уравнений, получающихся из условий минимума выражения (1), целесообразно применить аппарат линейного регрессионного анализа [2,4,5], который позволит использовать приемы статистического оценивания значимости искомым параметрам в процессе построения адекватной математической модели движения. Эти же приемы позволяют оценить доверительные интервалы окончательно найденных параметров, входящих в функции аэродинамических коэффициентов от угла атаки и числа Маха, а также доверительные интервалы самих функций. С этой целью прямоугольная матрица коэффициентов алгебраических уравнений размеров $N \times (M + 2)$, полученных из условий минимума выражения (1), и вектор невязок умножаются слева на транспонированную матрицу коэффициентов. Получившаяся от перемножения квадратная матрица называется информационной. Решение полученного матричного уравнения даст значения искомым поправок к коэффициентам. Матрица, обратная по отношению к информационной, называется дисперсионной матрицей. Элементы дисперсионной матрицы обладают важными свойствами. Диагональные элементы дисперсионной матрицы, будучи умноженными на оценку дисперсии измерений, полученную по среднеквадратичному значению невязок, дают дисперсии искомым коэффициентов. Не диагональные элементы дисперсионной матрицы являются коэффициентами корреляции между найденными параметрами математической модели и позволяют оценить дисперсии функции аэродинамических коэффициентов от угла атаки и числа Маха. Полученные значения дисперсий дают возможность с использованием статического распределения Стьюдента оценивать с выбранной доверительной вероятностью на каждом шаге итерационного процесса доверительные интервалы искомым параметрам и судить о значимости коэффициентов, включенных в математическую модель. Таким образом, процесс построения адекватной математической модели путем постепенного ее усложнения контролируется на каждом шаге на основе статистических критериев.

Необходимо особо отметить важное свойство подхода, предложенного в [3], которое заключается в том, что он допускает совместную обработку данных нескольких опытов, проведенных с моделями одинаковой формы. При этом модели могут иметь разные размеры, массу и моменты инерции, а газ, в котором движется модель, — различную плотность в разных опытах. Аэродинамические коэффициенты, естественно, остаются неизменными (если числа Рейнольдса при этом соответствуют одному режиму), а различаются только начальные условия движения от опыта к опыту. Последнее означает, что в

выражение (1), записываемое для каждого опыта, необходимо включить частные производные по начальным условиям других опытов, которые окажутся тождественными нулями. Соответственно размерность информационной матрицы, включающей результаты всех опытов, возрастет на удвоенное число дополнительных опытов по сравнению с матрицей для одного опыта.

Возможность совместной обработки нескольких опытов важна не только с точки зрения увеличения числа точек общего плана эксперимента, что увеличивает число степеней свободы (разность между объемом проведенных измерений и количеством оцениваемых параметров). Дело еще в том, что при слабых нелинейностях аэродинамического момента форма колебаний незначительно отличается от синусоиды (в пределах погрешности измерений угловых координат) [6]. Поэтому, анализируя лишь форму колебаний, не удастся извлечь нелинейные члены момента. В то же время нелинейность момента приводит к неизохронности колебаний: их период, или длина волны, зависит от амплитуды, и эта зависимость проявляется весьма заметно. При совместной обработке данных нескольких опытов с разными размахами колебаний подбирается функция момента от угла атаки, которая должна одновременно удовлетворять всем опытам. Авторы [3] отмечают это достоинство их подхода. Можно добавить, что совместная обработка данных нескольких опытов позволяет, например, на короткой траектории выявить зависимость от числа Маха. Для этого достаточно включить в обработку данные опытов с моделью одной формы, но с разными начальными скоростями движения, что позволяет охватить диапазон изменения числа Маха, в котором его влияние проявляется значимо.

При математическом планировании эксперимента решается прямая задача движения выбранной модели объекта на конкретной баллистической установке (существующей или проектируемой). Невязки, о которых шла речь выше, отсутствуют, поскольку траектория получена в результате численного интегрирования уравнений движения. Невязки можно моделировать с помощью генератора случайных чисел с заданной дисперсией и математическим ожиданием. Однако в этом нет необходимости, поскольку невырожденная информационная матрица существует и, следовательно, существует и обратная ей матрица — дисперсионная с ее замечательными свойствами, о которых сказано выше. Поэтому достаточно задать гипотетические дисперсии измерений координат, чтобы вычислить ожидаемые дисперсии и доверительные интервалы подлежащих оцениванию параметров.

Цель данной публикации состоит в том, чтобы на конкретных примерах проиллюстрировать эффективность последовательного математического планирования баллистического эксперимента. Под последовательным планированием следует понимать уточнение оптимальных условий эксперимента на основе опытных данных, получаемых на предшествующих этапах. Из-за недостатка

места мы ограничились конспективным изложением метода, приведя необходимые ссылки на публикации, в которых использованные подходы и алгоритмы изложены подробно.

Моделирование движения осесимметричного объекта в свободном полете для обработки данных одного опыта

Искомые параметры, подлежащие определению в результате обработки траекторных данных, обозначенные выше через C_j , — это параметры полиномиальных представлений коэффициентов сопротивления, подъемной силы и аэродинамических моментов (восстанавливающего и демпфирующего) от угла атаки и числа Маха. Для четных функций угла атаки такие представления имеют вид $C_j = C_j^0 + C_j^{\alpha^2} \alpha^2 + C_j^{\alpha^4} \alpha^4 + \dots$, для нечетных — с нечетными степенями угла. Зависимость от числа Маха представляется полиномом общего вида от $(M - M_0)$, где значение M_0 разумно выбирать в соответствии с видом конкретной зависимости.

Дальнейшее рассмотрение проведем для случая плоского движения объекта, совершающего колебания в вертикальной плоскости (составляющие аэродинамической силы и момент показаны на рис. 1). Уравнения движения запишем в виде [7]

$$t'' = kt'(C_x + C_y \cdot y')[1 + (y')^2]^{1/2}, \quad (2)$$

$$y'' = kC_y[1 + (y')^2]^{3/2} - (t')^2 \cdot g, \quad (3)$$

$$\vartheta'' = k(C_x + C_y \cdot y')[1 + (y')^2]^{1/2} \cdot \vartheta' + kr^{-2}lC_m[1 + (y')^2], \quad (4)$$

$$\vartheta = \alpha + \theta = \alpha + \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right). \quad (5)$$

В уравнениях (2)–(5) t — полетное время, y — вертикальная координата центра масс объекта, ϑ — угол

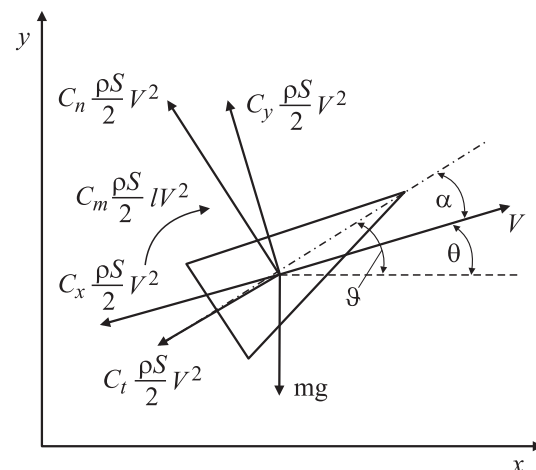


Рис. 1. Система координат, составляющие аэродинамической силы и аэродинамический момент, действующие на летящее тело.

Таблица 1.

| Обозначение коэффициента | Величина коэффициента, безразмерная | Оценка погрешности, % |
|--------------------------|-------------------------------------|-----------------------|
| C_x^0 | 0.2 | 1.4 |
| $C_x^{\alpha^2}$ | 0.1 | 87.7 |
| C_y^{ϖ} | 2.0 | 27.9 |
| C_y^{α} | 1.0 | 6.8 |
| $C_y^{\alpha^3}$ | -2.0 | 53.9 |
| C_m^{ϖ} | -0.1 | 4.8 |
| C_m^{α} | -0.1 | 1.4 |
| $C_m^{\alpha^3}$ | 0.02 | 131.9 |

тангажа, α — угол атаки, θ — угол наклона траектории к горизонту. В качестве независимой переменной в уравнениях выбрана координата вдоль горизонтальной оси x , производные по которой обозначены штрихами. Аэродинамическая сила представлена через проекции на поточные оси координат. Аэродинамические коэффициенты имеют вид

$$C_x = C_x(\alpha, M), \quad (6)$$

$$C_y = C_y^{\alpha}(\alpha, M) \cdot \alpha + C_y^{\varpi}(\alpha, M) [1 + (y')^2]^{-1/2} \cdot l \cdot \vartheta', \quad (7)$$

$$C_m = C_m^{\alpha}(\alpha, M) \cdot \alpha + C_m^{\varpi}(\alpha, M) [1 + (y')^2]^{-1/2} \cdot l \cdot \vartheta', \quad (8)$$

где

$$\varpi = \frac{d\vartheta}{dt} \frac{l}{V} = [1 + (y')^2]^{-1/2} \cdot \vartheta' \cdot l.$$

Для иллюстрации выберем некую гипотетическую модель объекта в виде тела вращения со следующими параметрами: длина 0.1 m, диаметр 0.045 m, масса 0.2 kg, главный центральный момент инерции относительно поперечной оси $5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. В качестве рабочей среды возьмем воздух при нормальных условиях и примем плотность его равной 1.25 kg/m^3 . Будем рассматривать плоское движение модели, поскольку из общих соображений ясно, что при этом влияние нелинейностей характеристик по углу атаки проявляется наиболее значимо (при регулярной прецессии, например, угол атаки сохраняет единственное значение — угла нутации, и выявить нелинейную зависимость коэффициентов от угла атаки не удастся).

Аэродинамические характеристики возьмем из области их реальных значений для тел вращения выбранного удлинения и припишем им нелинейности по углу атаки с таким расчетом, чтобы коэффициенты при степенях угла атаки выше нулевой и первой оказались близки к пределу значимости при их определении по траекторным данным при заданных погрешностях измерения последних. Выбранные значения коэффициентов приведены в табл. 1 вместе с доверительными полуинтервалами при доверительной вероятности 0.95. В таблице использованы обозначения: коэффициенты с нижним индексом x — это параметры разложения коэффициента сопротивления, нижний индекс у приписан

параметрам разложения подъемной силы, параметры с индексом m описывают коэффициент восстанавливающего момента; верхние индексы относят коэффициенты к соответствующим степеням угла атаки, C_y^{ϖ} и C_m^{ϖ} — постоянные коэффициенты демпфирующей подъемной силы и демпфирующего момента соответственно. При вычислениях угол атаки следует брать в радианах, так что все коэффициенты безразмерны.

Доверительные полуинтервалы коэффициентов в табл. 1 рассчитаны при следующих условиях. Траекторные данные получены в двадцати точках, равнорасположенных на участке траектории длиной 60 m при следующих средних погрешностях измерения: для линейных координат центра масс 0.25 mm, для угловых координат 0.2° и для времени $0.5 \mu\text{s}$. Начальная скорость движения модели в этом модельном опыте составляет 1000 m/s, падение скорости — 5.7%, среднее число Маха 2.82, на регистрируемом участке траектории уложилось 4.14 длины волны колебаний. Начальная амплитуда колебаний по углу атаки 20° .

На рис. 2 аэродинамические коэффициенты представлены графически. На рис. 3 показаны зависимости угла тангажа и вертикальной координаты центра масс объекта в обсуждаемом модельном опыте.

Из табл. 1 следует, что нелинейные составляющие сил и момента, как и было задумано, определяются неудовлетворительно. Оставляют желать лучшего демпфирующая и нелинейные составляющие подъемной силы. Причиной этого может быть высокая частота колебаний объекта, т.е. малое время действия подъемной силы одного знака. В результате амплитуда колебаний центра масс в вертикальном направлении составляет около 7 mm. Чтобы уменьшить погрешность определения

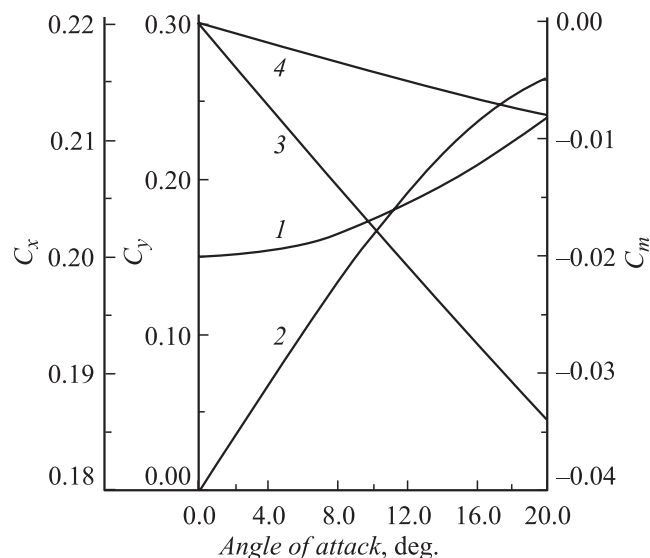


Рис. 2. Зависимости аэродинамических коэффициентов гипотетической модели от угла атаки α . $C_x = 0.2 + 0.1\alpha^2$ (1), $C_y = 1.0\alpha - 2.0\alpha^3$ (2), $C_m = -0.1\alpha + 0.02\alpha^3$ (3), $C_m = -0.025\alpha + 0.02\alpha^3$ (4).

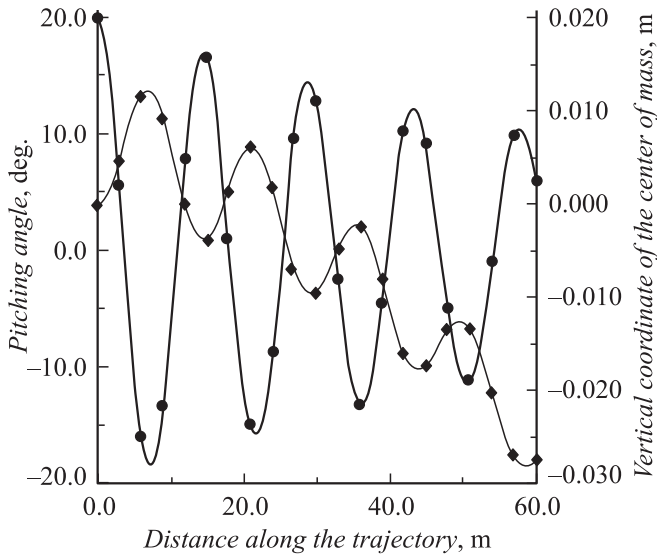


Рис. 3. Изменение угла тангажа и вертикальной координаты центра масс вдоль траектории полета. Кружки — угол тангажа, квадратики — линейная координата. Кружки и квадратики соответствуют положениям постов регистрации траектории.

коэффициента подъемной силы, нужно увеличить время ее действия, т.е. период или длину волны колебаний. Какие для этого есть пути?

Рассмотрим движение объекта в линейном приближении, т.е. с линейными по углу атаки и постоянными по числу Маха коэффициентами подъемной силы и момента в отсутствие демпфирования. Запишем уравнение колебаний, взяв за независимую переменную расстояние вдоль траектории x [7] и отождествив угол атаки с углом тангажа (малые колебания, траектория близка к горизонтальной),

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = C_m^\alpha \frac{\rho_g S}{2I_z} l \alpha. \quad (9)$$

Здесь α — угол атаки, C_m^α — производная коэффициента момента по углу атаки, ρ_g — плотность газа, S — площадь миделя объекта, I_z — главный центральный момент инерции относительно поперечной оси и l — характерная длина объекта. Входящий в выражение скоростного напора квадрат скорости исчез при замене независимой переменной времени на продольную координату. Решением уравнения, очевидно, является

$$\alpha = \alpha_m \sin\left(\frac{2\pi}{L} x + \varphi_0\right), \quad (10)$$

где

$$\frac{2\pi}{L} = \sqrt{C_m^\alpha \frac{\rho_g S}{2I_z} l},$$

α_m — амплитуда колебаний, φ_0 — начальная фаза.

Уравнение движения центра масс в вертикальной плоскости имеет вид [7]

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_y^\alpha \frac{\rho_g S}{2m} \alpha - (t')^2 g, \quad (11)$$

где C_y^α — производная коэффициента подъемной силы по углу атаки, m — масса объекта, g — ускорение силы тяжести.

Двукратное интегрирование первого члена в правой части (11) с учетом (10) дает

$$y = -C_y^\alpha \frac{\rho_g S}{2m} \alpha_m \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x + \varphi_0\right). \quad (12)$$

Множитель перед синусом в (12) является амплитудой колебаний центра масс y_m в вертикальной плоскости. Эта величина оказывается пропорциональной (см. (10)) следующим параметрам:

$$y_m \approx \frac{C_y^\alpha}{C_m^\alpha} \frac{\rho_g S}{2m} \frac{2I_z}{\rho_g S l} \approx \frac{C_y^\alpha}{C_m^\alpha} l, \quad (13)$$

поскольку масса пропорциональна кубу, а момент инерции — пятой степени линейного размера.

Из (13) следует, что для увеличения амплитуды колебаний центра масс следует увеличивать линейный размер модели. Впрочем, в экспериментальной баллистике такая возможность оказывается лишь принципиальной — она ограничена диаметром канала ствола метательной системы.

Однако в (13) есть еще один параметр, который можно изменить, — производная коэффициента момента. Этого можно достичь, уменьшив запас статической

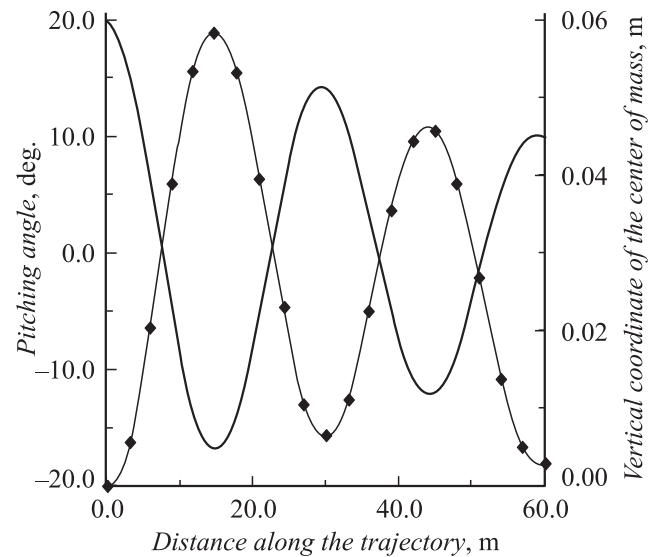


Рис. 4. Изменение угла тангажа и вертикальной координаты центра масс для модели с уменьшенным восстанавливающим моментом. Обозначения те же, что на рис. 3.

Таблица 2.

| Обозначение коэффициента | Величина коэффициента, безразмерная | Оценка погрешности, % |
|--------------------------|-------------------------------------|-----------------------|
| C_x^0 | 0.2 | 1.4 |
| $C_x^{\alpha^2}$ | 0.1 | 88.3 |
| C_y^{ω} | 2.0 | 15.5 |
| C_y^{α} | 1.0 | 1.7 |
| $C_y^{\alpha^3}$ | -2.0 | 14.6 |
| C_m^{ω} | -0.1 | 4.6 |
| C_m^{α} | -0.25 | 3.1 |
| $C_m^{\alpha^3}$ | 0.02 | 77.7 |

устойчивости снаряда путем смещения центра масс в сторону центра давления. Поперечный момент инерции при этом может измениться незначительно, поэтому мы примем допущение, что изменение положения центра масс достигнуто таким перераспределением массы по объему модели, что поперечный момент инерции сохранит свою величину, и будем использовать в расчетах выбранное раньше значение. Таким образом, определяющим окажется изменение восстанавливающего аэродинамического момента. Естественно, найденный в таких опытах аэродинамический момент придется пересчитать на заданный центр масс объекта либо провести отдельные эксперименты специально для определения исходных значений восстанавливающего и демпфирующего моментов.

Смоделируем такой подход, уменьшив производную статического момента при нулевом угле атаки в табл. 1 в четыре раза (рис. 2) и оставив неизменными момент инерции и прочие параметры разложений аэродинамических коэффициентов (длина волны колебаний увеличивается примерно вдвое). На рис. 4 показано изменение угла тангажа и вертикальной координаты центра масс новой модели. Теперь на трассе уложилось всего около двух волн колебаний.

На рис. 4 видно, что амплитуда колебаний центра масс модели увеличилась в несколько раз, достигнув примерно 30 мм. Это, естественно, сказалось на погрешности определения составляющих коэффициента подъемной силы (табл. 2).

Погрешности коэффициентов момента и сопротивления изменились незначительно, в то время как коэффициенты подъемной силы определяются заметно лучше. Рассмотренный пример иллюстрирует эффективность и необходимость подхода, включающего последовательное планирование баллистического эксперимента. Во второй части статьи проведем моделирование, используя значение параметров из табл. 2, с целью продемонстрировать эффективность совместной обработки нескольких опытов с однотипной моделью.

Список литературы

- [1] *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979. 346 с. Bard Y. Nonlinear Parameter Estimation. Cambridge, Massachusetts: International Business Machines Corporation.
- [2] *Хартман К., Лецкий Э., Шефер В. и др.* Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / Под ред. Э.К. Лецкого. М.: Мир, 1977. 552 с. Hartmann K., Lezki E., Schäfer W. Statistische Versuchspannung and—auswertung in der Stoffwirtschaft. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1974.
- [3] *Чарптан Г.Т., Кирк Д.В.* // AIAA J. 1970. N 4. P. 753–758. Пер. на рус. Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 4. С. 182–188.
- [4] *Ермаков С.И., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987. 319 с.
- [5] *Менде Н.П.* Препринт ФТИ им. А.Ф. Иоффе. СПб., 1989. № 1326, 44 с. Mende N.P. Nonlinear Estimation of Aerodynamic Characteristics from Discrete Free-Flight Data. Gas Dynamics / Ed. Yu.I. Koptev. New York: Nova Science Publishers, Inc., 1992. P. 325–356.
- [6] *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937. 366 с.
- [7] *Менде Н.П.* // Физико-газодинамические баллистические исследования / Под ред. Г.И. Мишина. Л.: Наука, 1980. С. 200–224.