

01;09

Энергетические характеристики излучения осциллирующего диполя, движущегося в диэлектрике с резонансной дисперсией

© А.В. Тюхтин

Научно-исследовательский институт радиофизики Санкт-Петербургского государственного университета,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: tyukhtin@niif.spbu.ru

(Поступило в Редакцию 9 декабря 2004 г.)

Рассматривается излучение осциллирующего электрического диполя, который движется параллельно направлению своего дипольного момента в диэлектрике, обладающем резонансной частотной дисперсией. Проведено аналитическое и численное исследование спектральной плотности мощности излучения и полной мощности излучения. Показано, в частности, что в зависимости от параметров задачи спектр излучения состоит либо из двух отдельных диапазонов частот, либо из одного частотного диапазона. Выявлены закономерности, характеризующие зависимость мощности излучения от скорости движения источника при различных значениях резонансной и ленгмюровской частот.

Введение

Излучение осциллирующих дипольных источников, движущихся относительно окружающей их однородной среды, исследовалось в течение длительного времени (см., например, [1–6]). Наиболее подробно анализировались случаи движения различных осцилляторов в среде без дисперсии и в холодной плазме [2,4,6], причем данные задачи рассматривались не только в системе отсчета, связанной со средой, но и в системе отсчета, связанной с источником [7–11]. Настоящая работа посвящена такому случаю, когда среда обладает резонансной частотной дисперсией. Подчеркнем, что дисперсия этого типа характерна для сред со связанными зарядами в очень широком частотном диапазоне, нижняя граница которого лежит в пределах от нескольких гигагерц до нескольких тысяч гигагерц в зависимости от химического строения вещества.

Движущиеся осциллирующие источники могут быть как микро-, так и макроскопическими (излучающие атомы, антенны и др.). К числу макроскопических источников относятся, к примеру, малые поляризованные области самой среды (так, в проведенных недавно экспериментах [12] бегущая поляризованная область создавалась с помощью лазерного излучения). Отметим, что в последние годы проводятся эксперименты по созданию сред, в которых скорость света крайне мала (см., например, [13,14]). При этом даже медленное движение источника относительно среды приводит к значительным изменениям в структуре электромагнитного поля. В таких условиях движение традиционных макроскопических источников (таких, как антенны), скорость которого обычно мала по сравнению со скоростью света в вакууме, становится важным фактором, влияющим на процесс излучения.

В настоящей работе рассматривается излучение осциллирующего электрического диполя, который движется равномерно и прямолинейно в однородной немаг-

нитной изотропной непоглощающей среде, обладающей диэлектрической проницаемостью вида

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\omega_r^2 \varepsilon_0 - \omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2}, \quad (1)$$

где ω_r и ω_L — резонансная и ленгмюровская (плазменная) частоты соответственно, а $\varepsilon_0 = 1 + \omega_L^2/\omega_r^2$ — диэлектрическая проницаемость среды по отношению к постоянному полю.

Отметим, что для такой среды детальное исследование излучения даже в простейшем случае движущегося точечного заряда было проведено лишь в последние годы. В частности, в работах [15,16] анализировалось излучение заряда в безграничном резонансно-диспергирующем диэлектрике, а в работе [17] рассматривалось излучение в заполненном диэлектриком волноводе.

1. Общие выражения для поля и мощности излучения

Пусть электрический диполь в „собственной“ системе отсчета характеризуется плотностью дипольного момента $\mathbf{P}' = \mathbf{p}'\delta^3(x', y', z')$, где $\mathbf{p}' = p'_0 \mathbf{e}'_z \exp(-i\omega'_0 t')$, ω'_0 — частота в этой системе отсчета (штрихами отмечаются величины, относящиеся к собственной системе отсчета источника). Будем считать, что диполь движется вдоль направления своего момента со скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ ($v > 0$). При этом в „лабораторной“ системе отсчета источник также обладает только электрическим дипольным моментом, равным $p = p'\sqrt{1-\beta^2}$. Общие выражения для поля продольного осциллирующего диполя, пригодные в изотропной непоглощающей среде без пространственной дисперсии, были получены в работе [4]. Напомним, что ненулевые компоненты поля

можно записать в виде [4,6]

$$E_z = \frac{i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} a\omega \left[1 - \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega\beta n} \right)^2 \right] e^{i\psi} d\omega,$$

$$E_r = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\omega - \omega_0}{\omega\beta n^2} e^{i\psi} d\omega,$$

$$H_\phi = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu} \frac{\partial a}{\partial r} e^{i\psi} d\omega, \quad (2)$$

где

$$\psi(\omega) = \frac{\omega - \omega_0}{v} z - \omega t,$$

$$a(\omega, r) = \frac{P'_0 \sqrt{1 - \beta^2} \omega \mu(\omega)}{2cv} H_0^{(1)}(rs(\omega)),$$

$$s(\omega) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\omega) v^{-1} \sqrt{(\omega\beta)^2 - (\omega - \omega_0)^2} & \text{при } (\omega\beta)^2 > (\omega - \omega_0)^2, \\ i v^{-1} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 - (\omega\beta)^2} & \text{при } (\omega - \omega_0)^2 > (\omega\beta)^2, \end{cases}$$

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega)\mu(\omega), \quad \omega_0 = \omega'_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3)$$

(радикалы в выражениях для $s(\omega)$ считаются положительными).

Отметим, что в случае $(\omega - \omega_0)^2 > (\omega\beta)^2$ в выражении для $a(\omega, r)$ удобно выразить функцию Ханкеля $H_0^{(1)}(rs)$ через функцию Макдональда, воспользовавшись формулой $H_0^{(1)}(i\xi) = -2i\pi^{-1}K_0(\xi)$.

Далее мы будем исследовать мощность излучения Σ и ее спектральное распределение $\sigma(\omega)$. Выражение для мощности излучения [4,6] может быть представлено в следующем виде:

$$\Sigma = \int_{\omega > 0} \sigma(\omega) d\omega, \quad \sigma(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) + \tilde{\sigma}(-\omega), \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{P_0'^2 (1 - \beta^2)}{4c^2 v} \mu |\omega|^3 \left[1 - \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega\beta} \right)^2 \right] \times 1 \left((\omega\beta)^2 - (\omega - \omega_0)^2 \right), \quad (5)$$

где $1(\xi)$ — единичная функция Хевисайда

$$1(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi > 0, \\ 0 & \text{при } \xi < 0. \end{cases}$$

Как видим, величина $\sigma(\omega)$, представляющая собой спектральную плотность энергии излучения, отлична от нуля в диапазоне частот, определяемом неравенством

$$\omega^2 \beta^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) > (\omega - \omega_0)^2. \quad (6)$$

В этой области частот величина $s(\omega)$ вещественна, что вполне естественно, поскольку в поле излучения

могут вносить вклад лишь распространяющиеся волны. Отметим, что при выполнении более жесткого неравенства

$$\omega^2 \beta^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) > (\omega + \omega_0)^2 \quad (7)$$

в (4) отличны от нуля оба слагаемых ($\tilde{\sigma}(\omega)$ и $\tilde{\sigma}(-\omega)$). Если же условие (6) выполнено, а условие (7) нарушается, то $\tilde{\sigma}(\omega) \neq 0$, а $\tilde{\sigma}(-\omega) = 0$.

Применим данные результаты к случаю немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью вида (1). При этом имеем

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{P_0'^2 (1 - \beta^2)}{4v^3} \frac{|\omega| f(\omega)}{\omega_r^2 + \omega_L^2 - \omega^2}, \quad (8)$$

где

$$f(\omega) = (1 - \beta^2)\omega^4 - 2\omega_0\omega^3 + [\omega_0^2 - \omega_r^2(1 - \beta^2) + \omega_L^2\beta^2]\omega^2 + 2\omega_0\omega_r^2\omega - \omega_0^2\omega_r^2. \quad (9)$$

Условие (6), определяющее диапазон излучаемых частот, сводится к следующим требованиям:

$$f(\omega) > 0 \quad \text{при } \omega^2 \leq \omega_r^2,$$

$$f(\omega) < 0 \quad \text{при } \omega^2 \geq \omega_r^2 + \omega_L^2 \quad (10)$$

(в области частот $\omega_r^2 < \omega^2 < \omega_r^2 + \omega_L^2$ излучения заведомо быть не может, так как условие (6) не выполнено из-за отрицательности ε).

2. Случай малой резонансной частоты

Приближенное аналитическое описание наиболее существенных особенностей излучения можно провести в некоторых частных случаях. Положим сначала, что резонансная частота среды много меньше частоты осциллятора в лабораторной системе отсчета

$$\omega_r \ll \omega_0 = \omega'_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (11)$$

Тогда, как нетрудно показать, существуют два диапазона частот в спектре излучения. Первый из них определяется неравенствами

$$\omega_1 < \omega < \omega_r, \quad \omega_1 \approx \omega_r (1 + \beta^2 \omega_L^2 \omega_0^{-2})^{-1/2}. \quad (12)$$

Данный частотный диапазон можно назвать „резонансным“, поскольку он расположен вблизи частоты резонанса ω_r .

Второй диапазон излучаемых частот определяется неравенствами

$$\omega_2 < \omega < \omega_3, \quad \omega_{2,3} \approx \frac{\omega'_0 \mp \beta \sqrt{\omega_0'^2 - \omega_L^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (13)$$

С некоторой долей условности этот диапазон можно назвать „собственным“, поскольку при относительно небольших скоростях он включает в себя частоту

осциллятора ω'_0 (правда, следует иметь в виду, что при достаточно больших значениях β нижняя граница данного диапазона оказывается выше ω'_0). Подчеркнем, что данная частотная область в спектре излучения существует только при условии $\omega'_0 > \omega_L$. Отметим также, что „резонансный“ и „собственный“ диапазоны частот при условии (11), как правило, располагаются достаточно далеко друг от друга.

При выполнении неравенства (11) нетрудно оценить полную мощность излучения осциллятора, которая состоит из двух частей: $\Sigma = \Sigma_r + \Sigma_o$. Для „резонансного“ излучения приближенный расчет дает следующий результат:

$$\Sigma_r \approx \frac{p_0'^2 \omega_0'^4 \Omega_L^2 \Omega_r^4 \beta (1 - \beta^2)}{8c^3 (1 - \beta^2 + \beta^2 \Omega_L^2)}, \quad (14)$$

где $\Omega_L = \omega_L / \omega'_0$, $\Omega_r = \omega_r / \omega'_0$.

Мощность „собственного“ излучения осциллятора приближенно равна

$$\begin{aligned} \Sigma_o \approx \frac{p_0'^2 \omega_0'^4}{4v^3} & \left\{ 2\beta \sqrt{1 - \Omega_L^2} \left[\Omega_L^2 + \frac{\beta^2}{3} (2 - 5\Omega_L^2) \right] \right. \\ & - \frac{\Omega_L^2}{2} (1 - \beta^2) \left[\left(\Omega_L + \sqrt{1 - \beta^2} \right)^2 \ln \frac{\Omega_3 + \Omega_L}{\Omega_2 + \Omega_L} \right. \\ & \left. \left. + \left(\Omega_L - \sqrt{1 - \beta^2} \right)^2 \ln \frac{\Omega_3 - \Omega_L}{\Omega_2 - \Omega_L} \right] \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

где $\Omega_{2,3} = \omega_{2,3} / \omega'_0$.

Отметим, что формула (15) представляет собой точное выражение для полной мощности излучения осциллирующего диполя в холодной плазме с проницаемостью $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_L^2 / \omega^2$ [6]. Это объясняется удаленностью „собственного“ частотного диапазона от резонансной частоты, вследствие чего диэлектрическая проницаемость в этом диапазоне близка к проницаемости плазмы.

Нетрудно видеть, что при условии (11) „резонансное“ излучение гораздо слабее „собственного“ (если, конечно, последнее существует, т.е. если $\Omega_L < 1$). Это связано с малостью множителя Ω_r^4 , входящего в (14). Зависимость Σ_r и Σ_o от скорости движения диполя оказывается разной. Мощность „собственного“ излучения монотонно уменьшается с ростом β от значения

$$\Sigma_o|_{\beta=0} \approx \frac{p_0'^2 \omega_0'^4}{3c^3} (1 - \Omega_L^2)^{1/2}$$

до значения

$$\Sigma_o|_{\beta \rightarrow 1} \approx \frac{p_0'^2 \omega_0'^4}{3c^3} (1 - \Omega_L^2)^{3/2}.$$

Мощность „резонансного“ излучения обращается в нуль как при $\beta = 0$, так и при $\beta \rightarrow 1$, а при некотором промежуточном значении скорости имеет максимум. Подчеркнем, что в случае $\Omega_L > 1$ „собственное“ излучение исчезает, но „резонансное“ излучение имеет место при любом соотношении между ленгмюровской частотой и собственной частотой источника.

3. Случай большой резонансной частоты

Положим теперь, что $\omega_0 \ll \omega_r$. При этом могут реализоваться две качественно различные возможности. Первая имеет место, если $\beta \sqrt{\epsilon_0} < 1$, т.е. скорость движения диполя v меньше фазовой скорости распространения низкочастотного излучения $c / \sqrt{\epsilon_0}$. В этом случае существует как „собственный“ диапазон излучаемых частот, так и „резонансный“ диапазон, граничащий с частотой ω_r .

Оценку граничных частот и энергий излучения легко сделать при некоторых дополнительных ограничениях. Для „резонансного“ излучения при дополнительном условии $\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} \ll \omega_r \sqrt{1 - \beta^2 \epsilon_0}$ получаем

$$\omega_1 < \omega < \omega_r, \quad \omega_1 \approx \omega_r \sqrt{\frac{1 - \beta^2 \epsilon_0}{1 - \beta^2}},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_r \approx \frac{p_0'^2}{4v^3} (1 - \beta^2) \omega_L^2 & \left\{ (\omega_r^2 + \omega_L^2) \right. \\ & \times \left[\ln(1 - \beta^2)^{-1} - \beta^2 \right] - \frac{\omega_L^2 \beta^4}{2(1 - \beta^2)} \left. \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Для „собственного“ излучения при дополнительном условии $\omega_0 \ll \omega_r (1 - \beta \sqrt{\epsilon_0})$ имеем

$$\omega_2 < \omega < \omega_3, \quad \omega_{2,3} \approx \frac{\omega_0}{1 \pm \beta \sqrt{\epsilon_0}},$$

$$\Sigma_o \approx \frac{p_0'^2 \omega_0'^4}{3c^3} \sqrt{\epsilon_0} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 - \epsilon_0 \beta^2} \right)^3. \quad (17)$$

Данное выражение для Σ_o идентично точному выражению для полной мощности излучения движущегося диполя в недиспергирующей среде с показателем преломления $\sqrt{\epsilon_0}$ [2,6]. Это объясняется тем, что „собственный“ диапазон лежит в области малых частот, где проницаемость близка к ϵ_0 .

Отметим, что если движение источника является нерелятивистским ($\beta^2 \ll 1$), то мощность резонансного излучения приближенно равна

$$\Sigma_r \approx \frac{p_0'^2 \omega_r^2 \omega_L^2 \beta}{8c^3},$$

а соотношение между мощностями определяется выражением

$$\frac{\Sigma_r}{\Sigma_o} \approx \frac{3\omega_r^2 \omega_L^2 \beta}{8\omega_0'^4 \sqrt{\epsilon_0}}. \quad (18)$$

Поскольку в рассматриваемом диапазоне $\omega_r \gg \omega'_0$, то „резонансное“ излучение может преобладать над „собственным“, несмотря на наличие малого параметра β .

Рассмотрим теперь случай, когда $\omega_0 \ll \omega_r$, а $\beta \sqrt{\epsilon_0} > 1$, т.е. скорость движения осциллятора превышает скорость распространения низкочастотных волн.

При этом спектр излучения состоит только из одного диапазона частот

$$\omega_2 < \omega < \omega_r, \quad \omega_2 \approx \frac{\omega_0}{1 + \beta\sqrt{\epsilon_0}}. \quad (19)$$

Полная мощность излучения может быть приближенно рассчитана при дополнительном условии $\omega_0 \ll \omega_r(1 - \beta\sqrt{\epsilon_0})$. Она оказывается равной

$$\Sigma \approx \frac{p_0'^2}{4v^3} (1 - \beta^2) \left[\omega_L^2(\omega_r^2 + \omega_L^2) \ln \frac{\omega_r^2 + \omega_L^2}{\omega_L^2} - \frac{\omega_r^4}{2} (1 - \beta^2) - \omega_r^2 \omega_L^2 \right]. \quad (20)$$

Как видим, при наложенных ограничениях мощность излучения практически не зависит от частоты колебаний осциллятора.

4. Численные результаты

На рис. 1, *a-d* показана спектральная плотность энергии излучения в зависимости от безразмерной частоты $\Omega = \omega/\omega_0'$ при разных значениях резонансной и ленгмюровской частот и скорости движения источника. При этом не предполагалось наличие того или иного малого параметра (расчеты проводились по точным формулам). Каждый рисунок соответствует заданным значениям резонансной и ленгмюровской частот, приведенным в подписях к рисункам; скорость движения осциллятора указана около каждой кривой.

Рис. 1, *a* показывает типичную картину для такой ситуации, когда как резонансная, так и ленгмюровская частоты меньше, чем частота осциллятора: $\omega_r < \omega_0'$, $\omega_L < \omega_0'$. При этом имеются два частотных диапазона, причем доминирующим оказывается „собственное“ излучение, а излучение „резонансного“ типа незначительно.

Рис. 1, *b* иллюстрирует случай, когда $\omega_r < \omega_0'$, $\omega_L > \omega_0'$. При этом имеется только один („резонансный“) диапазон частот излучения.

Рис. 1, *c* типичен для случая, когда $\omega_r > \omega_0'$, $\omega_L < \omega_0'$. При этом могут реализоваться три возможности. Если скорость движения диполя меньше некоторой величины β_* (для использованных на рис. 1, *c* значений параметров $\beta_* \approx 0.433$), то имеются „резонансный“ и „собственный“ (относительно низкочастотный) диапазоны. Если $\beta_* < \beta < \beta_{**}$ (в нашем случае $\beta_{**} \approx 0.82$), то имеется только один частотный диапазон, включающий частоту осциллятора и граничащий с резонансной частотой. Если скорость осциллятора достаточно велика ($\beta > \beta_{**}$), то кроме этого диапазона имеется еще один диапазон, лежащий выше частоты резонанса.

Рис. 1, *d* иллюстрирует случай, когда $\omega_r > \omega_0'$, $\omega_L > \omega_0'$. При этом могут реализоваться две возможности: либо имеются два частотных диапазона (если скорость достаточно мала), либо только один диапазон.

На рис. 2, *a, b* приведены зависимости полной мощности излучения диполя от скорости его движения при разных резонансных и ленгмюровских частотах. Рис. 2, *a* соответствует случаю, когда резонансная частота меньше частоты осциллятора ($\Omega_r < 1$). Если ленгмюровская частота также меньше частоты осциллятора ($\Omega_L < 1$), то имеется как „собственное“, так и „резонансное“ излучение, причем первое является преобладающим. Зависимость мощности излучения от скорости в этой

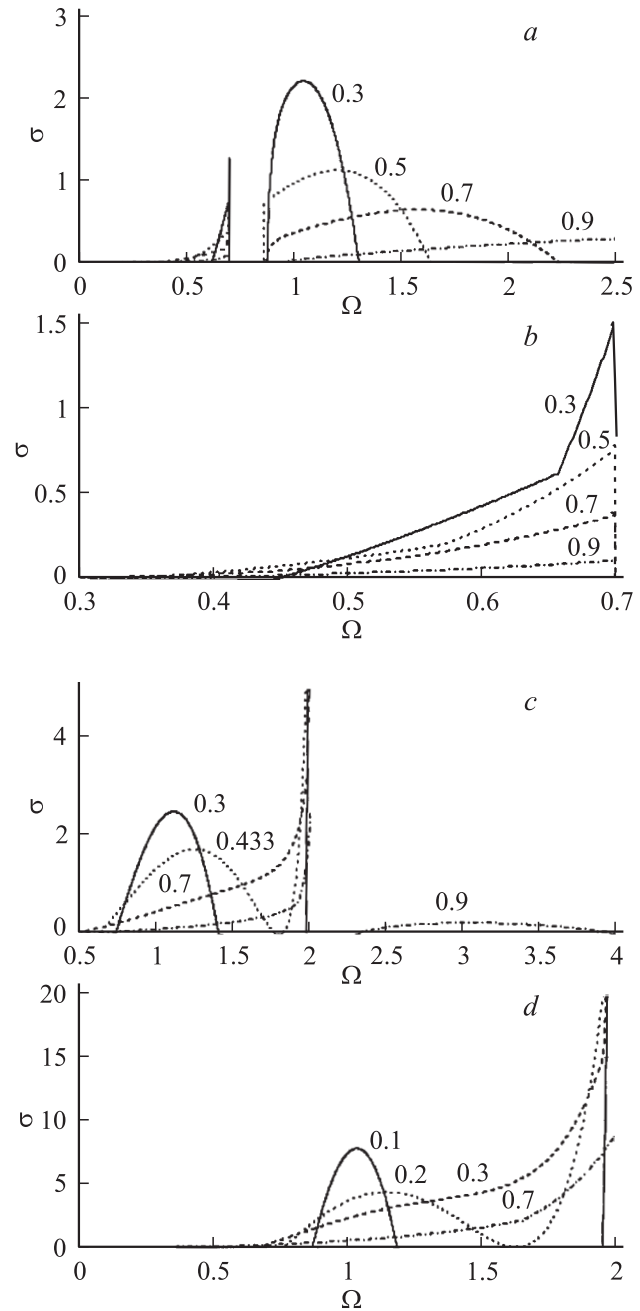


Рис. 1. Спектральная плотность мощности излучения (в единицах $\omega_0^3 p_0'^2 / 3c^3$) в зависимости от безразмерной частоты $\Omega = \omega/\omega_0'$. *a* — $\Omega_r = 0.7$, $\Omega_L = 0.5$; *b* — $\Omega_r = 0.7$, $\Omega_L = 2$; *c* — $\Omega_r = 2$, $\Omega_L = 0.5$; *d* — $\Omega_r = 2$, $\Omega_L = 2$. Значения скорости движения осциллятора указаны у кривых.

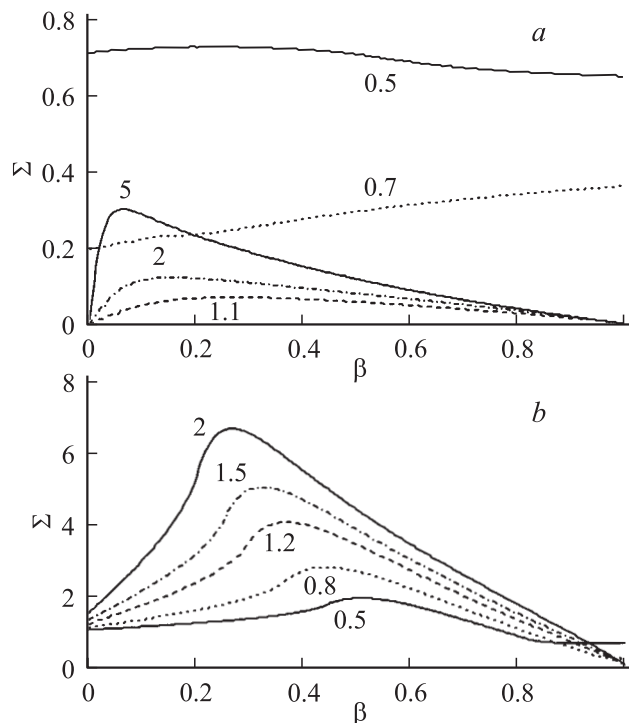


Рис. 2. Мощность излучения (в единицах $\omega_0^4 p_0^2 / 3c^3$) в зависимости от скорости движения диполя β . $\Omega_r = 0.7$ (a), 2 (b). Значения ленгмюровской частоты Ω_L указаны у кривых.

ситуации оказывается незначительной. Если же $\Omega_L > 1$, то генерируется только относительно слабое „резонансное“ излучение, имеющее достаточно выраженную зависимость от скорости с максимумом при некотором ее значении.

Рис. 2, b соответствует случаю, когда резонансная частота превышает частоту осциллятора. При этом зависимость мощности от скорости имеет максимум, величина которого повышается с ростом плазменной частоты.

В заключение подчеркнем, что, как следует из результатов данной работы, излучение осциллятора, движущегося в резонансно-диспергирующей среде, обладает рядом необычных свойств. При одних параметрах задачи в спектре излучения имеются два несвязанных частотных диапазона, а при других параметрах они сливаются в один диапазон. Зависимость мощности излучения от скорости движения источника оказывается различной при разных соотношениях между резонансной частотой, ленгмюровской частотой и частотой осциллятора. Сравнение полученных результатов с результатами для соответствующих задач в случаях недиспергирующей среды [2,6] и холодной плазмы [6] показывает, что наличие резонансной дисперсии приводит к иным, существенно более сложным, закономерностям, характеризующим излучение движущегося осциллятора.

Список литературы

- [1] Франк И.М. Излучение Вавилова–Черенкова. М.: Наука, 1988. 288 с.
- [2] Франк И.М. // Изв. АН СССР. 1942. Т. 6. № 1–2. С. 3–31.
- [3] Гинзбург В.Л., Франк И.М. // ДАН СССР. 1947. Т. 56. № 6. С. 583–586.
- [4] Гинзбург В.Л., Франк И.М. // Там же. № 7. С. 699–702.
- [5] Гарибян Г.М., Костанян Ф.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 12. С. 1857–1863.
- [6] Тюхтин А.В. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 67–73.
- [7] Daly P., Le K.S.H., Papas C.H. // IEEE Trans. on Antennas Propag. 1965. Vol. AP-13. N 4. P. 583–587.
- [8] Болотовский Б.М., Столяров С.Н. // Эйнштейновский сборник. 1978–1979. М.: Наука, 1983. С. 173–277.
- [9] Доильнищина Э.Г., Журавлев Ю.Б., Тюхтин А.В. // Вестник СПбГУ. 2001. Сер. 4. Вып. 4. С. 44–52.
- [10] Доильнищина Э.Г., Тюхтин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46. № 1. С. 21–30.
- [11] Доильнищина Э.Г., Тюхтин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. № 4. С. 301–310.
- [12] Stevens T.E., Wahlstrand J.K., Kuhl J. et al. // Science. 2001. Vol. 291. P. 627–630.
- [13] Carusotto I., Artoni M., La Rocca G.C. et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87. P. 064801-1–064801-4.
- [14] Kash M.M., Sautenkov V.A., Zibrov A.S. et al. // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 5229–5232.
- [15] Afanasiev G.N., Kartavenko V.G. // J. Phys. D. 1998. Vol. 31. P. 2760–2776.
- [16] Afanasiev G.N., Kartavenko V.G., Magar E.N. // Physica B. 1999. Vol. 269. P. 95–113.
- [17] Тюхтин А.В. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 14. С. 68–74.