01

Пространственная гравиметрия на основе метода инерциальной навигации

© А.С. Девятисильный

Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
690041 Владивосток, Россия
e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

(Поступило в Редакцию 12 ноября 2004 г.)

Дано обоснование способа, основанного на погружении задачи гравиметрии в задачу выставки трехкомпонентной инерциальной навигационной системы на неподвижном основании. Приведены результаты численного моделирования.

1. Известно, что измерения сил инерции на траектории вместе с достаточно точными модельными представлениями о гравитационном поле, в котором реализуется движение, обусловливают метод ее, траектории, определения — метод инерциальной навигации [1,2].

Если обратиться к ситуации, отличающейся тем, что поле неизвестно, но траектория задается (определяется вне метода инерциальной навигации, например с помощью спутниковой наквигационной системы (СНС)), то в рамках метода инерциальной навигации вполне закономерна постановка задачи об определении гравитационного поля, задачи весьма сложной, поскольку таким образом ставится вопрос о гравиметрии на траектории, т. е. на подвижном объекте.

В настоящей работе рассматривается случай вырожденной (в точку) траектории, что заметно упрощает задачу, сохраняя возможность ее интерпретации в рамках обозначенного метода. Физически это означает обращение к наземной гравиметрии на неподвижном основании, а технологически — к задаче выставки трехкомпонентной инерциальной навигационной системы ($3D$-ИНС) в условиях неполной информации о гравитационном поле, что существенно отличает обе задачи — и гравиметрии и выставки ИНС от их традиционных аналогов [3,4].

2. Метод инерциальной навигации предполагает моделирование в выбранной системе отсчета уравнений движения материальной точки, с которой отождествляется движущийся объект — динамических уравнений (Ньютона)

$$Dq = p, \qquad q(0) = q_0,$$
$$Dp = G(q) + f, \qquad p(0) = p_0 \tag{1}$$

и уравнений эволюции системы отсчета — кинематических уравнений (Эйлера–Пуассона)

$$DA = 0, \qquad A(0) = A_0. \tag{2}$$

В этих уравнениях, записанных в гамильтоновых образцах, q — радиус-вектор текущего положения точки на траектории; p — вектор импульсов, отождествляемый в данном случае с вектором абсолютной скорости точки; $D = d/dt + \hat{\omega}$ — оператор абсолютного дифференцирования; ω — абсолютная угловая скорость вращения выбранной системы отсчета (далее всюду будем иметь ввиду только прямоугольные координатные системы); $\hat{\omega}$ — кососимметрическая матрица, составленная из элементов вектора ω так, что, например, $\hat{\omega}q = \omega \times q$; $G(q)$ — вектор напряженности гравитационного поля; f — вектор удельных сил негравитационной природы; A — матрица преобразования векторов из инерциальной системы отсчета, назовем ее $o\xi = o\xi_1 o\xi_2 o\xi_3$, в выбранную вращающуюся — $ox = ox_1x_2x_3$, так что $x = A\xi$; точку o — начало системы отсчета поместим в центр масс Земли, кроме того, примем, что координатный трехгранник ox (с осями, параллельными осям сопровождающего трехгранника) ориентирован географически, т.е. его ось ox_3 направлена по вектору q, а ось ox_2 лежит в плоскости географического меридиана места и направлена на север.

Учитывая последнее и то, что рассматривается случай неподвижного основания $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, где $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = u\cos\varphi$, $\omega_3 = u\sin\varphi$, φ — географическая широта места объекта (пункта гравиметрии), u — значение угловой скорости вращения Земли.

При интегрировании уравнений (1) и (2) полагаются заданными начальные условия (q_0, p_0, A_0), а также текущие значения ω и f, которые измеряются с помощью гироскопов и ньютонометров (акселерометров) — инерциальных приборов, собственно и дающих название методу. Наличие погрешностей в данных и в измерениях ведет к погрешностям интегрирования — $\delta q, \delta p, \delta A$, уравнения эволюции которых в линейном приближении с учетом вида уравнений (1) и (2) можно представить следующим образом:

$$D\delta q = \delta p - \hat{\nu} q, \qquad \delta q(0) = \delta q_0,$$
$$D\delta p = \delta G(q) - \hat{\nu} p - \Delta f, \qquad \delta p(0) = \delta p_0,$$
$$D\beta = \nu, \qquad \beta(0) = \beta_0, \tag{3}$$

где ν и Δf — векторы инструментальных погрешностей гироскопических измерителей и ньютонометров; $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ — вектор малого угла, характеризующий погрешность интегрирования кинематических уравнений, так что $\delta A = \hat{\beta}$; погрешность моделирования напряженности гравитационного поля $\delta G(q)$ будет обсуждена ниже.

Заметим, что инерциальные измерения и интегрирование уравнений (1) и (2) выпоняются в осях приборного трехгранника $oy = oy_1y_2y_3$, жестко связанного с измерительной платформой и являющегося физической моделью трехгранника ox, так что $\delta q = (\delta y_1, \delta y_2, \delta y_3)^T$.

Если доступна информация о месте объекта (платформы) от СНС, то сравнение ее с аналогичной информацией, предоставляемой ИНС, в соответствии со всем изложенным выше приводит к вектору невязок двух решений вида

$$J = \delta q + \hat{\beta} q + \varepsilon, \tag{4}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ — вектор погрешностей определения места с помощью СНС.

Вернемся теперь к обсуждению погрешности моделирования напряженности гравитационнго поля $\delta G(r)$. При отсутствии внешней позиционной информации типа той, на которую указано выше, т.е. в случае автономной ИНС, $\delta G(q) = \big(\partial G(q)\partial q\big)\delta q + \Delta$ или с учетом существенного преобладания в модели поля центральной составляющей

$$\delta G(q) = -\frac{\mu}{r^3}\left(E - \frac{3qq^T}{r^2}\right)\delta q + \Delta, \tag{5}$$

где μ — гравитационный параметр Земли; $r = |q|$; E — единичная матрица; Δ — аномалия — отклонение напряженности поля в точке наблюдения от значения, предписываемого моделью.

Заметим, что при такой (вида (5)) интерпретации $\delta G(q)$ уравнения ошибок динамической группы (первые два уравнения в (3)) являются неустойчивыми, что не только уже само по себе ограничивает применение автономных 3D-ИНС, но и актуализирует проблему адекватности дискретной и непрерывной моделей при использовании современных цифровых вычислителей, сводя ее решение на весьма малый интервал времени.

В случае, который здесь рассматривается, доступности внешней информации о векторе q от СНС она может быть использована при формировании модели напряженности $G(r)$; тогда вместо (5) получаем

$$\delta G(q) = -\frac{\mu\delta q}{r^3} + \frac{3\mu q\varepsilon_3}{r^4} + \Delta. \tag{6}$$

Благодаря такому предварительному использованию внешней информации уравнения динамической группы (а значит собственно и 3D-ИНС) приобретают устойчивость (неасимптотическую), что облегчает дальнейшее численное моделирование и одновременно с этим практическую реализацию метода [4].

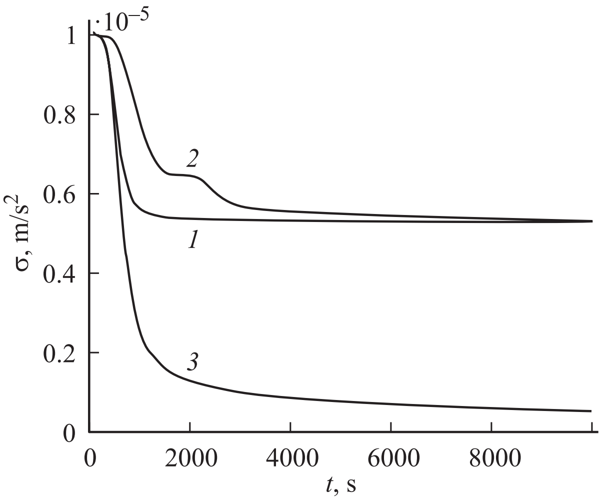
Подводя итоги модельным представлениям, отмечаем, что система дифференциальных и алгебраических уравнений (3) и (4) с учетом (6), дополненная уравнением $\dot{\Delta} = 0$, утверждающим гипотезу о постоянстве локальных аномалий поля на временно́м интервале наблюдения, является формальным описанием обратной задачи, цель решения которой состоит в определении значений совокупности векторов $\{\delta q, \delta p, \beta, \Delta\}$. Таким образом, задача гравиметрии погружена в более общую задачу — выставки 3D-ИНС на неподвижном основании.

3. Завершение формальной постановки обратной задачи требует проверки ее корректности, или анализа разрешимости задачи. Современная теория систем [6] отождествляет проблему разрешимости с проблемой наблюдаемости, суть которой состоит в установлении соответствия между размерностью пространства образов оператора задачи и размерностью декларируемого вектора желаемого решения. Строго (если точно придерживаться представлений Ж. Адамара о корректности [7]) с учетом ориентации способа решения на современные вычислительные средства и конечную точность представления чисел в них следует иметь в виду и необходимость процедурной поддержки указанного соответствия (т.е. обеспечение численной устойчивости решения), если принципиально таковое установлено.

Как показал анализ рассматриваемой здесь задачи (он включает в себя стандартную процедуру построения базиса пространства, порожденного оператором задачи), требуемое соответствие имеет место и нарушается только в одном случае — когда вектор угловой скорости вращения Земли ω лежит на оси ox_3, т.е. когда пункт наблюдения расположен на одном из географических полюсов Земли. Замечательно, то что при этом единственной ненаблюдаемой переменной становится β_3, т.е. имеет место неосуществимость задачи выставки ИНС в полном объеме (оценка совокупности векторов δq, δp и β) и полная осуществимость погруженной в нее задачи гравиметрии (оценка-вектор Δ).

4. Целостность формальных представлений рассматриваемой задачи в условиях конкретного метода ее решения проверялась численно, а именно было выполнено моделирование матричного дифференциального уравнения Риккати (78 уравнений), описывающего эволюцию дисперсионной матрицы погрешностей решения при реализации решающих процедур калмановской теории оптимального стохастического оценивания [6].

На рисунке представлены характерные графики эволюции среднеквадратических значений погрешностей (СКП) $\sigma(\Delta_1)$, $\sigma(\Delta_2)$, $\sigma(\Delta_3)$ оценивания компонент аномалии (Δ) вектора напряженности гравитационного поля на широте места наблюдения $\varphi = 45^\circ$ при СКП инерциальных измерителей — ньютонометров и гироскопов соответственно $\sigma_f = 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$ и $\sigma_\nu = 0.0001^\circ/\mathrm{h}$ (degree/hour) и СКП СНС позиционирования по каждой координатной оси $\sigma_r = 3.2\,\mathrm{m}$. Обращает на себя внимание то, что оценка вертикальной компоненты аномалии (Δ_3) качественно существенно выше горизонтальных (Δ_1 и Δ_2). Действительно, для установившихся значений имеют место соотношения $\sigma(\Delta_2)/\sigma(\Delta_1) \approx 1$ и $\sigma(\Delta_3)/\sigma(\Delta_1) \approx 0.1$.



Среднеквадратические значения погрешностей: *1* — $\sigma(\Delta_1)$, *2* — $\sigma(\Delta_2)$, *3* — $\sigma(\Delta_3)$.

Приводя данные вычислений для установившихся значений СКП оценки позиционных переменных ($\sigma(q_1) \approx \sigma(q_2) \approx 4m$ и $\sigma(q_3) \approx 0.4\,\mathrm{m}$), замечаем, что и для них $\sigma(q_3)/\sigma(q_1) \approx 0.1$. Очевидное совпадение соотношений для двух указанных типов переменных (Δ и q) объясняется существенным преобладанием центральной компоненты в векторе напряженности гравитационного поля.

Для полноты картины приведем данные численного моделирования, полученные для установившихся значений СКП оценки кинематических (угловых) переменных $\sigma(\beta_1) \approx \sigma(\beta_2) = 0.6 \cdot 10^{-6}$; $\sigma(\beta_3) = 15 \cdot 10^{-6}$.

5. Как видно из описанного, предложенный способ гравиметрии имеет вполне реальную перспективу развития и практической реализации, что связано, очевидно, с развитием измерительных и вычислительных технологий.

Список литературы

[1] *Ишлинский А.Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.
[2] *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.
[3] Инерциальная навигация / Под ред. К.Ф. О'Даннела. М.: Наука, 1969. 592 с.
[4] Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецовой. М.: Недра, 1981. 397 с.
[5] *Девятисильный А.С., Числов К.А.* // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 5. С7 112–115.
[6] *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
[7] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1972. 285 с.