01;04;10

Уравнения переноса и условие динамического равновесия релятивистского электронного пучка, распространяющегося в плотных и разреженных газоплазменных средах продольно внешнему магнитному полю

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Kolesnikov evg@mail.ru

(Поступило в Редакцию 29 октября 2004 г.)

С помощью кинетического уравнения для параксиального релятивистского электронного пучка, распространяющегося в плотных и разреженных газоплазменных средах продольно внешнему магнитному полю, получены уравнения переноса массы, импульса и энергии частиц поперечного сегмента пучка. Найдено вириальное уравнение, а также сформулировано условие динамического равновесия, обобщающее для рассматриваемых случаев известное условие Беннета.

Введение

В последние годы повышенное внимание исследователей привлекает изучение транспортировки релятивистских электронных пучков (РЭП) в плотных и разреженных газоплазменных средах [1–20]. Особое место в комплексе проблем, связанных с распространением РЭП в указанных средах, занимает вопрос о поперечной динамике рассматриваемых пучков. В работе [12] нами сформулировано кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения частиц поперечного сегмента параксиального моноэнергетического аксиально-симметричного релятивистского электронного пучка (РЭП), распространяющегося в плотных и разреженных газоплазменных средах продольно внешнему однородному стационарному магнитному полю. Целью настоящей работы является получение на основе указанного кинетического уравнения уравнений переноса массы, импульса и энергии, а также уравнений вириала и условия динамического равновесия. Сформулированные нами уравнения обобщают аналогичные уравнения для РЭП, распространяющегося в плотной газоплазменной среде в отсутствие внешнего магнитного поля, полученные в работе [5] на случай транспортировки РЭП в продольном однородном магнитном поле как в плотной плазме, так и в разреженной плазме в режиме ионной фокусировки (ИФ).

Постановка задачи

Рассмотрим аксиально-симметричный квазистационарный пучок релятивистских электронов с осью симметрии z, инжектируемый в однородную газоплазменную среду при наличии направленного вдоль оси z однородного стационарного магнитного поля с индукцией $\mathbf{B} = B_0\mathbf{i}_z$, где $\mathbf{i}_z$ — орт указанной оси. Представим пучок в виде совокупности тонких поперечных сегментов S^τ, каждый из которых инжектируется в момент времени $t = \tau$ (при $z = 0$) и содержит фиксированное число частиц.

Как показано нами в [12], в параксиальном приближении продольное движение частиц пучка в любом сегменте S^τ является детерминированным. В отличие от продольного движения поперечная динамика частиц носит стохастический характер, и состояние пучка в фазовом пространстве поперечных координат $\mathbf{r}_\perp$ и поперечных импульсов $\mathbf{p}_\perp$ может быть охарактеризовано с помощью функции распределения $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$. В соответствии с [5,12] в условиях, когда столкновения частиц пучка с нейтральными частицами газоплазменной среды приводят к многократному рассеянию на малые углы, а также в предположении об изотропности и упругом характере рассеяния временна́я эволюция функции распределения $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ частиц сегмента S^τ описывается уравнением

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\perp}{\gamma m} \circ \nabla_\perp f^\tau + \big[-e\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) + \Omega_b \mathbf{p}_\perp \times \mathbf{i}_z\big] \circ \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = \frac{m\gamma S}{2}\Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau. \quad (1)$$

В уравнении (1) коэффициент μ определен соотношением

$$\mu = 1 - \frac{1-\alpha_c}{\beta^2(1-\alpha_m)}, \quad (2)$$

где $\beta = v_z/c$ (v_z — продольная компонента скорости частиц пучка, которая полагается одинаковой у всех частиц пучка в силу параксиальности и моноэнергетичности РЭП; c — скорость света); α_c и α_m — соответственно коэффициенты зарядовой и мганитной (токовой) нейтрализации пучка; φ_0 — заданный потенциал электрического поля ионного фона (в режиме ИФ).

В соответствии с изложенным в работе [12] при транспортировке в плотной плазме коэффициентам α_c и α_m могут быть приписаны заданные постоянные значения, а потенциал $\varphi_0 = 0$. В то же время при транспортировке РЭП в режиме ИФ постоянные α_c и α_m имеют нулевые значения, а потенциал φ_0 не равен нулю. Другие величины в (1) имеют следующий смысл: $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор частиц пучка; m и e — соответственно масса покоя и заряд электрона; $\Omega_b = |e|B_0/(\gamma mc)$ — гирочастица пучка во внешнем магнитном поле; S — средняя скорость изменения кинетической энергии поперечного движения частиц пучка в результате многократного кулоновского рассеяния частиц РЭП на атомах и молекулах фонового газа, рассматриваемая как заданная характеристика рассеивающей среды и пучка [5,12,21–23]. Наконец, A_z — z-компонента векторного потенциала коллективного электромагнитного поля пучково-плазменной системы, которая в рассматриваемом случае параксиального квазистационарного пучка удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\perp A_z = -\frac{4\pi}{c}(1-\alpha_m)J_{bz}, \tag{3}$$

где J_{bz} — z-компонента плотности тока пучка.

Введем в рассмотрение радиус экранировки самосогласованного электромагнитного поля фоновой плазмой R_c, т. е. предположим, что

$$\varphi_0\big|_{r\in R_c} = A_z\big|_{r\geq R_{R_c}} \equiv 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (3), удовлетворяет граничному условию (4), имеет вид

$$A_z = -\frac{2}{c}I_b(1-\alpha_m) \times \int d\mathbf{r}'_\perp \ln\frac{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|}{R_c}\int d\mathbf{p}_\perp f^\tau(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{p}_\perp, t). \tag{5}$$

С учетом соотношения (5) уравнение (1) может быть рассмотрено как интегродифференциальное уравнение для функции распределения частиц сегмента пучка $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$, которое должно решаться при начальном условии

$$f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)\big|_{t=\tau} = f_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, \tau), \tag{6}$$

где $f_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, \tau)$ — заданная функция распределения частиц пучка по поперечным координатам и импульсам на выходе из инжектора.

Уравнения переноса

Из уравнения (1) могут быть получены уравнения для первых моментов функции распределения $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$, которыми определяются основные макроскопические характеристики пучка: масса, импульс, энергия (так называемые уравнения переноса).

При получении уравнений переноса будем предполагать, что область ненулевых значений функции распределения f^τ в пространстве поперечных импульсов содержится в ограниченной области Ω с границей $\partial\Omega$, т. е.

$$f^\tau\big|_{\mathbf{p}_\perp\in\Omega} \equiv 0. \tag{7}$$

Кроме того, воспользуемся теоремой Грина

$$\int\limits_\Gamma (v\Delta u - u\Delta v)d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial\Gamma}\left(v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right)\circ dS^* \tag{8}$$

(где $\partial\Gamma$ — граница области $\Gamma\subset R^n$; dS' — элементарная площадка поверхности $\partial\Gamma$, которой приписано направление положительной нормали $\mathbf{n}$), а также интегральными соотношениями

$$\int\limits_\Gamma (v\nabla u + u\nabla v)d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial\Gamma} uv\mathbf{n}\, dS^*, \tag{9}$$

$$\int\limits_\Gamma (v\nabla\circ\mathbf{w} + \mathbf{w}\circ\nabla v)d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial\Gamma} v\mathbf{w}\circ\mathbf{n}\, dS^*, \tag{10}$$

являющимися соответственно следствиями теоремы о градиенте и теоремы Гаусса–Остроградского.

Уравнение непрерывности

Проинтегрируем кинетическое уравнение (1) по пространству поперечных импульсов. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f^\tau d\mathbf{p}_\perp + \nabla_\perp\circ\int\frac{\mathbf{p}_\perp}{m\gamma}f^\tau d\mathbf{p}_\perp - e\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z)\circ\int\nabla_{\mathbf{p}_\perp}f^\tau d\mathbf{p}_\perp + \Omega_b\int\left(p_y\frac{\partial f^\tau}{\partial p_x} - p_x\frac{\partial f^\tau}{\partial p_y}\right)d\mathbf{p}_\perp = \frac{m\gamma S}{2}\int\Delta_{\mathbf{p}_\perp}f^\tau d\mathbf{p}_\perp, \tag{11}$$

где $\mathbf{p}_\perp = p_x\mathbf{i}_x + p_y\mathbf{i}_y$ $(\mathbf{i}_x\times\mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z)$.

Прежде всего отметим, что

$$\int f^\tau d\mathbf{p}_\perp = \chi(r_\perp, t), \qquad \int\frac{\mathbf{p}_\perp}{m\gamma}f^\tau d\mathbf{p}_\perp = \chi\,\widetilde{\frac{\mathbf{p}_\perp}{m\gamma}}. \tag{12}$$

С учетом (7) и (9) имеем

$$\int\nabla_{\mathbf{p}_\perp}f^\tau d\mathbf{p}_\perp = \int\mathbf{n}f^\tau dS_{\mathbf{p}_\perp} \equiv 0, \tag{13}$$

а в силу (7) и (10) получим

$$\int\left(p_y\frac{\partial f^\tau}{\partial p_x} - p_x\frac{\partial f^\tau}{\partial p_y}\right)d\mathbf{p}_\perp = -\int f^\tau\nabla_{\mathbf{p}_\perp}\circ\mathbf{w}_1(\mathbf{p}_\perp)d\mathbf{p}_\perp \equiv 0, \tag{14}$$

где $\mathbf{w}_1 = p_y\mathbf{i}_x - p_x\mathbf{i}_y$, причем $\nabla_{\mathbf{p}_\perp}\circ\mathbf{w}_1 \equiv 0$.

Наконец, с учетом (7) и (8) имеет место соотношение

$$\int \Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial f^\tau}{\partial \mathbf{n}} \circ d\mathbf{S}^* \equiv 0. \tag{15}$$

Подставляя (12)–(15) в (11), получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla_\perp \circ \left(\frac{\chi \widetilde{\mathbf{p}_\perp}}{m\gamma}\right) = 0, \tag{16}$$

где $\chi(\mathbf{r}_\perp, t)$ — плотность частиц пучка в сегменте S^τ, определяемая интегралом в первой формуле (12);

$$\widetilde{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{\chi} \int \mathbf{p}_\perp f^\tau d\mathbf{p}_\perp \tag{17}$$

— средний поперечный импульс частиц пучка в сегменте S^τ.

Заметим, что, поскольку в (16) $\tilde{\mathbf{p}}_\perp/(m\gamma) = \tilde{\mathbf{v}}_\perp$ ($\tilde{\mathbf{v}}_\perp$ — средняя поперечная скорость частиц РЭП), уравнение (16) представляет собой обычное уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения числа частиц рассматриваемого сегмента пучка.

Уравнение переноса импульса

Умножим кинетическое уравнение (1) на $\mathbf{p}_x$ и проинтегрируем полученное выражение по поперечным импульсам $\mathbf{p}_\perp$. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_x f^\tau d\mathbf{p}_\perp + \nabla_\perp \circ \int \frac{p_x \mathbf{p}_\perp}{m\gamma} f^\tau d\mathbf{p}_\perp - e\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) \circ \int p_x \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp + \Omega_b \int p_x \left(p_y \frac{\partial f^\tau}{\partial p_x} - p_x \frac{\partial f^\tau}{\partial p_y}\right) d\mathbf{p}_\perp = \frac{\gamma m S}{2} \int p_x \Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp. \tag{18}$$

Рассмотрим интегралы в левой и правой частях уравнения (18)

$$p_x f^\tau d\mathbf{p}_\perp = \chi \widetilde{p_x}; \quad \int \frac{p_x \mathbf{p}_\perp}{m\gamma} f^\tau d\mathbf{p}_\perp = \chi \frac{\widetilde{p_x \mathbf{p}_\perp}}{m\gamma}. \tag{19}$$

С учетом (7) и (9) имеем

$$\int p_x \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp = -\int f^\tau \nabla_{\mathbf{p}_\perp} p_x d\mathbf{p}_\perp = -\int\limits_{\Omega} f^\tau \mathbf{i}_x d\mathbf{p}_\perp = -\mathbf{i}_x \chi, \tag{20}$$

а в силу (7) и (10) находим

$$\int p_x \left(p_y \frac{\partial f^\tau}{\partial p_x} - p_x \frac{\partial f^\tau}{\partial p_y}\right) d\mathbf{p}_\perp = \int \mathbf{w}_2(\mathbf{p}_\perp) \circ \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp = -\int f^\tau \nabla_{\mathbf{p}_\perp} \circ \mathbf{w}_2 d\mathbf{p}_\perp = -\int p_y f^\tau d\mathbf{p}_\perp = -\chi \widetilde{p_y}, \tag{21}$$

где $\mathbf{w}_2(\mathbf{p}_\perp) = p_x p_y \mathbf{i}_x - p_x^2 t_y$, причем $\nabla_{\mathbf{p}_\perp} \circ \mathbf{w}_2 = p_y$.

Наконец, с учетом (7) и (8) получим

$$\int p_x \Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp = \int\limits_{\partial\Omega} \left(p_x \frac{\partial f^\tau}{\partial \mathbf{n}} - f^\tau \frac{\partial p_x}{\partial \mathbf{n}}\right) \circ d\mathbf{S}_{\mathbf{p}_\perp} \equiv 0. \tag{22}$$

Подстановка (19)–(22) в уравнение (18) дает

$$\frac{\partial \chi \widetilde{p_x}}{\partial t} + \nabla_\perp \circ \left(\chi \frac{\widetilde{p_x \mathbf{p}_\perp}}{m\gamma}\right) + e\chi \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0 - \beta\mu A_z) - \chi \Omega_b \widetilde{p_y} = 0. \tag{23}$$

Далее, умножая уравнение (1) на p_y и интегрируя по поперечным импульсам $\mathbf{p}_\perp$, после аналогичным преобразованием получим

$$\frac{\partial \chi \widetilde{p_y}}{\partial t} + \nabla_\perp \circ \left(\chi \frac{\widetilde{p_y \mathbf{p}_\perp}}{m\gamma}\right) + e\chi \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0 - \beta\mu A_z) - \chi \Omega_b \widetilde{p_x} = 0. \tag{24}$$

Уравнения (23) и (24) могут быть записаны в виде векторного уравнения

$$\frac{\partial \chi \widetilde{\mathbf{p}_\perp}}{\partial t} + \nabla_\perp \circ \left(\chi \frac{\widetilde{\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp}}{m\gamma}\right) + e\chi \nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) + \chi \Omega_b (\mathbf{i}_z \times \tilde{\mathbf{p}}_\perp) = 0. \tag{25}$$

Преобразуем теперь уравнение (25) к виду, допускающему простую физическую интерпретацию. Представим поперечный импульс $\mathbf{p}_\perp$ в виде

$$\mathbf{p}_\perp = \widetilde{\mathbf{p}_\perp} + \delta\mathbf{p}_\perp. \tag{26}$$

Тогда имеем

$$\nabla_\perp \circ (\chi \widetilde{\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp}) = \nabla_\perp \circ (\chi\, \mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp) + \nabla_\perp \circ (\chi\, \widetilde{\delta \mathbf{p}_\perp \delta \mathbf{p}_\perp}) + 2\nabla_\perp \circ (\chi\, \mathbf{p}_\perp \delta \mathbf{p}_\perp). \tag{27}$$

Как следует из (26), верно равенство $\widetilde{\delta\mathbf{p}_\perp} = 0$. Кроме того, можно записать

$$\chi\, \widetilde{\delta \mathbf{p}_\perp \delta \mathbf{p}_\perp} = m\gamma \int \delta\mathbf{p}_\perp \delta\mathbf{v}_\perp f^\tau d\mathbf{p}_\perp = m\gamma \tilde{\tilde{P}}_\perp, \tag{28}$$

где

$$\tilde{\tilde{P}}_\perp = \int (\mathbf{p}_\perp - \widetilde{\mathbf{p}_\perp})(\mathbf{v}_\perp - \widetilde{\mathbf{v}_\perp}) f^\tau d\mathbf{p}_\perp \tag{29}$$

— тензор напряжений.

Наконец, первый член в правой части (27) запишем в виде

$$\nabla_\perp \circ (\chi\, \widetilde{\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp}) = \widetilde{\mathbf{p}_\perp} \nabla_\perp \circ (\chi \widetilde{\mathbf{p}_\perp}) + \chi (\widetilde{\mathbf{p}_\perp} \circ \nabla_\perp) \widetilde{\mathbf{p}_\perp}. \tag{30}$$

Тогда с учетом (27)–(30), а также уравнения непрерывности (16) и соотношения $\widetilde{\mathbf{p}_\perp} = m\gamma \widetilde{\mathbf{v}_\perp}$ из (25) получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widetilde{\mathbf{v}_\perp} \circ \nabla_\perp\right) \widetilde{\mathbf{p}_\perp} = -\frac{\nabla_\perp \circ \tilde{\tilde{P}}_\perp}{\chi} + e\left[\mathbf{E}_\perp^{ef} + \frac{1}{c}(\widetilde{\mathbf{v}_\perp} \times \mathbf{B}_0)\right], \tag{31}$$

где $\mathbf{E}_\perp^{ef} = -\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z)$ — поперечная компонента напряженности эффективного электрического поля.

Отдельные члены (31) могут быть интерпретированы следующим образом. Левая часть (31): $(\partial/\partial t + \mathbf{v}_\perp \circ \nabla_\perp)\tilde{\mathbf{p}}_\perp = d\tilde{\mathbf{p}}_\perp/dt$ — полная производная импульса $\tilde{\mathbf{p}}_\perp$ вдоль траектории частицы пучка, движущейся со скоростью $\tilde{\mathbf{v}}_\perp$. Первое слагаемое в правой части (31) — гидродинамическая сила, обусловленная наличием разброса частиц пучка по поперечным импульсам, а второе слагаемое — электромагнитная сила, действующая со стороны эффективного электрического поля $\mathbf{E}^{ef}_\perp$ и внешнего магнитного пучка.

Уравнение энергии

Умножим кинетическое уравнение (1) на $p_\perp^2/(2m\gamma)$ и проинтегрируем полученное выражение по пространству поперечных импульсов. Тогда, учитывая явную зависимость лоренц-фактора частиц пучка γ от времени, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{p_\perp^2}{2m\gamma} f^\tau d\mathbf{p}_\perp + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\int \frac{p_\perp^2}{2m\gamma} f^\tau \mathbf{p}_\perp$$

$$+ \nabla_\perp \circ \int \frac{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}{2m^2\gamma^2} f^\tau d\mathbf{p}_\perp$$

$$- e\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) \circ \int \frac{p_\perp^2}{2m\gamma} \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp$$

$$+ \frac{\Omega_b}{2m\gamma}\int p_\perp^2 \left(p_y \frac{\partial f^\tau}{\partial p_x} - p_x \frac{\partial f^\tau}{\partial p_y}\right) d\mathbf{p}_\perp$$

$$= \frac{S}{4}\int p_\perp^2 \Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp. \tag{32}$$

Рассмотрим интегралы, входящие в уравнение (32). Отметим, что интегралы

$$\int \frac{p_\perp^2}{2m\gamma} f^\tau d\mathbf{p}_\perp = \chi\,\frac{\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma}, \tag{33}$$

$$\int \frac{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}{2m^2\gamma^2} f^\tau dp_\perp = \chi\,\frac{\widetilde{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}}{2m^2\gamma^2} = \chi\,\frac{\widetilde{\mathbf{v}_\perp p_\perp^2}}{2m\gamma}. \tag{34}$$

С учетом (7) и (9) и соотношения $\nabla_{\mathbf{p}_\perp} = 2\mathbf{p}_\perp$ получим

$$\int \frac{p_\perp^2}{2m\gamma} \nabla_{p_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp = -\frac{1}{m\gamma}\int \mathbf{p}_\perp f^\tau dp_\perp = -\chi\,\frac{\widetilde{\mathbf{p}_\perp}}{m\gamma}, \tag{35}$$

а в силу (7) и (10) имеем

$$\int p_\perp^2 \left(p_y \frac{\partial f^\tau}{\partial p_x} - p_x \frac{\partial f^\tau}{\partial p_y}\right) d\mathbf{p}_\perp$$

$$= \int \mathbf{w}_3(\mathbf{p}_\perp) \circ \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp$$

$$= -\int f^\tau \nabla_{p_\perp} \circ \mathbf{w}_3(\mathbf{p}_\perp) d\mathbf{p}_\perp = 0, \tag{36}$$

где $\mathbf{w}_3(\mathbf{p}_\perp) = p_\perp^2 p_y \mathbf{i}_x - p_\perp^2 p_x \mathbf{i}_y$, причем $\nabla_{\mathbf{p}_\perp} \circ \mathbf{w}_3(\mathbf{p}_\perp) \equiv 0$.

Наконец, с учетом (7) и (8) и соотношения $\Delta_{p_\perp} p_\perp^2 = 4$ получим

$$\int p_\perp^2 \Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau d\mathbf{p}_\perp = 4\int f^\tau d\mathbf{p}_\perp = 4\chi. \tag{37}$$

Подставляя (33)–(37) в (32), получим уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi \widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma}\right) = -\nabla_\perp \circ \left(\chi\,\frac{\widetilde{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}}{2m^2\gamma^2}\right)$$

$$-\frac{e\chi\widetilde{\mathbf{p}_\perp}}{m\gamma} \circ \nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) - \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{\chi\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma} + \chi S. \tag{38}$$

Первый член в правой части уравнения (38) характеризует скорость изменения средней энергии поперечного движения частиц единичного объема сегмента S^τ, связанного с наличием потока энергии с плотностью

$$q = \frac{\chi\,\widetilde{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}}{2m^2\gamma^2} = \frac{\chi\,\widetilde{\mathbf{v}_\perp p_\perp^2}}{2m\gamma}. \tag{39}$$

Второй член в правой части (38) может быть записан в виде

$$-\frac{e\chi\widetilde{\mathbf{p}_\perp}}{m\gamma} \circ \nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) = \mathbf{j}_\perp \circ \mathbf{E}^{ef}_\perp, \tag{40}$$

где $\mathbf{j}_\perp = e\chi\widetilde{\mathbf{p}_\perp}/(m\gamma) = e\chi\widetilde{\mathbf{v}_\perp}$.

Как видно из (40), этот член характеризует скорость изменения энергии поперечного движения, обусловленного работой сил, действующих на частицы пучка со стороны самосогласованного электромагнитного поля.

Наконец, последние члены в правой части (38) характеризуют скорости изменения энергии поперечного движения, вызываемого соответственно неупругими и упругими столкновениями частиц пучка с частицами среды.

В заключение отметим, что описанная процедура легко может быть обобщена на случай, когда область ненулевых значений функции распределения f^τ в пространстве поперечных импульсов является неограниченной, но f^τ достаточно быстро стремится к 0 при $p_\perp \to 0$. При этом интегрирование в (11), (18) и (34) производится сначала по ограниченной области Ω с использованием интегральных соотношений (8)–(10), а затем осуществляется переход к интегрированию по пространству поперечных импульсов как предельный переход при удаляющейся на бесконечность границе $\partial\Omega$ в области Ω. Нетрудно убедиться, что эта процедура приводит к уравнениям переноса (16), (25) и (38) тогда и только тогда, когда функция распределения f^τ с ростом $p_\perp$ убывает быстрее, чем $1/p_\perp^4$. В этом случае все интегралы по $\partial\Omega$ при $\partial\Omega \to \infty$ обращаются в 0, а все интегралы по пространству поперечных импульсов оказываются сходящимися.

Уравнение вириала. Интеграл среднего обобщения углового момента. Условие динамического равновесия

Умножим уравнение переноса импульса (уравнение (25)) скалярно на $(-r_\perp/2)$ и проинтегрируем полученное выражение по поперечным координатам. В результате получим

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \chi \mathbf{p}_\perp \circ \mathbf{r}_\perp d\mathbf{r}_\perp - \frac{1}{2}\int \nabla_\perp \left(\frac{\chi\, \widetilde{\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp}}{m\gamma}\right) \circ \mathbf{r}_\perp d\mathbf{r}_\perp = V, \tag{41}$$

где средний вириал

$$V \equiv -\frac{1}{2}\int \chi \mathbf{r}_\perp \circ [-e\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) + \Omega_b(\widetilde{\mathbf{p}_\perp} \times \mathbf{i}_z)]\, d\mathbf{r}_\perp. \tag{42}$$

При определении интегралов в (41) и (42) будем исходить из предположения, что в пространстве поперечных координат $\mathbf{r}_\perp$ частицы рассматриваемого сегмента пучка в любые моменты времени не выходят за пределы ограниченной области Γ с границей $\partial\Gamma$ и, следовательно, функция χ удовлетворяет условию

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t)\big|_{\mathbf{r}_\perp \in \Gamma} \equiv 0. \tag{43}$$

Рассмотрим сначала интеграл

$$\int \chi \widetilde{\mathbf{p}_\perp} \circ \mathbf{r}_\perp d\mathbf{r}_\perp = \frac{1}{2}\int \nabla_\perp \circ (\chi \widetilde{\mathbf{p}_\perp} r^2) d\mathbf{r}_\perp - \frac{1}{2}\int r^2 \nabla_\perp \circ (\chi \widetilde{\mathbf{p}_\perp}) d\mathbf{r}_\perp. \tag{44}$$

В силу теоремы Гаусса–Остроградского и условия (43) первый интеграл в правой части (44)

$$\int \nabla_\perp \circ (\chi \widetilde{\mathbf{p}_\perp} r^2) d\mathbf{r}_\perp = \int\limits_{\partial\Gamma} \chi r^2 \widetilde{\mathbf{p}_\perp} \circ \mathbf{n} dS_{r_\perp} \equiv 0, \tag{45}$$

а второй интеграл с учетом уравнения непрерывности (16) может быть записан в виде

$$-\frac{1}{2}\int r^2 \nabla_\perp \circ (\chi \tilde{\mathbf{p}}_\perp) d\mathbf{r}_\perp = \frac{m\gamma}{4}\frac{d\Re^2}{dt}, \tag{46}$$

где

$$\Re^2 \equiv 2\int \chi r^2 d\mathbf{r}_\perp. \tag{47}$$

Второй интеграл, фигурирующий в левой части (41), преобразуется следующим образом:

$$\int \nabla_\perp \left(\frac{\chi \widetilde{\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp}}{m\gamma}\right) \circ \mathbf{r}_\perp d\mathbf{r}_\perp = \int\limits_{\partial\Gamma} \frac{x\chi \widetilde{p_x \mathbf{p}_\perp}}{m\gamma} \circ \mathbf{n} dS_{r_\perp} + \int\limits_{\partial\Gamma} \frac{y\chi \widetilde{p_y \mathbf{p}_\perp}}{m\gamma} \circ \mathbf{n} dS_{r_\perp} - \int \frac{\chi(\widetilde{p_x^2} + \widetilde{p_y^2})}{m\gamma} d\mathbf{r}_\perp = -\int \frac{\chi \widetilde{p_\perp^2}}{m\gamma} d\mathbf{r}_\perp. \tag{48}$$

Подставляя (48) и (44) с учетом (45) и (48) в (41), получим уравнение

$$E_\perp - \frac{d}{dt}\left(\frac{m\gamma}{8}\frac{d\Re^2}{dt}\right) = V, \tag{49}$$

где $E_\perp \equiv \int \chi p_\perp^2/(2m\gamma) dr_\perp$ — средняя кинетическая энергия поперечного движения частицы сегмента пучка S^τ, а средний вириал V определен в (42).

Рассмотрим теперь интегралы, которыми определяется средний вириал (42). Прежде всего заметим, что в силу предполагаемой аксиальной симметричности задачи имеем

$$-\frac{1}{2}e\beta\mu \int \chi \mathbf{r}_\perp \circ \nabla_\perp A_z d\mathbf{r}_\perp = -e\beta\mu\pi \int\limits_0^\infty \chi r^2 \frac{dA_z}{dr} dr, \tag{50}$$

$$\frac{1}{2}e\int \chi \mathbf{r}_\perp \circ \nabla_\perp \varphi_0 = e\pi \int\limits_0^\infty \chi r^2 \frac{d\varphi_0}{dr}. \tag{51}$$

Для определения производных dA_z/dr и $d\varphi_0/dr$ в (50) и (51) рассмотрим уравнения Пуассона для потенциалов A_z и φ_0, которые запишем в виде

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_z}{dr}\right) = -4\pi e\beta(1-\alpha_m)\hat{N}_b \chi(r), \tag{52}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_0}{dr}\right) = 4\pi e \hat{N}_\Phi \chi_\Phi(r), \tag{53}$$

где $\hat{N}_b$ и $\hat{N}_\Phi$ — соответственно полные линейные плотности частиц пучка и ионного канала; $\chi_\Phi = n_\Phi(r)/\hat{N}_\Phi$ — заданная функция, характеризующая радиальный профиль распределения ионов и удовлетворяющая условию нормировки $\int \chi_\Phi(r) dr_\perp = 1$.

Интегрируя (52) и (53) при условии $r dA_z/dr|_{r=0} = r d\varphi_0/dr|_{r=0} = 0$, получим

$$\frac{dA_z}{dr} = -2e\beta(1-\alpha_m)\frac{N_b(r)}{r}, \tag{54}$$

$$\frac{d\varphi_0}{dr} = 2e\frac{N_\Phi(r)}{r}, \tag{55}$$

где

$$N_b(r) = 2\pi\hat{N}_b \int\limits_0^r r'\chi(r')dr', \tag{56}$$

$$N_\Phi(r) = 2\pi\hat{N}_\Phi \int\limits_0^r r'\chi_\Phi(r')dr'. \tag{57}$$

Как видно из (56) и (57), $N_b(r)$ и $N_\Phi(r)$ представляют собой линейные плотности частиц пучка и ионного фона в трубке радиусом r.

Подстановка (54), (56) в правую часть (50) дает

$$-\frac{1}{2}e\beta\mu \int \chi \mathbf{r}_\perp \circ \nabla_\perp A_z d\mathbf{r}_\perp = e^2\beta^2\kappa\hat{N}_b 4\pi^2 \int\limits_0^\infty dr\, r\chi(r) \int\limits_0^r dr' r'\chi(r'), \tag{58}$$

где постоянная κ определяется как $\kappa = (1-\alpha_m)\mu = (1-\alpha_m) - (1-\alpha_c)/\beta^2$ (величина μ определена в (2)).

Заметим, наконец, что с учетом (56) имеет место равенство

$$4\pi^2 \int_0^\infty dr r\chi(r) \int_0^r dr' r'\chi(r')$$
$$= 2\pi^2 \int_0^\infty dr r\chi(r) \int_0^\infty dr' r'\chi(r')$$
$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_\perp \chi(r) \int \mathbf{r}'_\perp \chi(r') = \frac{1}{2}. \quad (59)$$

Учитывая (59), получим окончательно

$$-\frac{1}{2} e\beta\mu \int \chi \mathbf{r}_\perp \circ \nabla_\perp A_z d\mathbf{r}_\perp = \frac{e^2\beta^2\kappa\hat{N}_b}{2}. \quad (60)$$

Аналогично подстановка (55) и (57) в правую часть (51) приводит к выражению

$$\frac{e}{2} \int \chi \mathbf{r}_\perp \circ \nabla_\perp \varphi_0 d\mathbf{r}_\perp = e^2 2\pi \int_0^\infty r\chi(r) N_\Phi(r) dr$$
$$= e^2 \int \chi(r) N_\Phi(r) d\mathbf{r}_\perp = e^2 \langle N_\Phi(r) \rangle. \quad (61)$$

Отметим несколько практически интересных частных случаев, когда величина $\langle N_\Phi(r) \rangle$ в правой части (61) имеет особенно простой вид. Во-первых, если в области, занятой пучком, объемная плотность ионов постоянна по радиусу и равна n_Φ^0, то можно записать

$$\langle N_\Phi(r) \rangle = \frac{\pi}{2} n_\Phi^0 \mathfrak{R}^2, \quad (62)$$

где величина $\mathfrak{R}^2$ и определяется интегралом (47).

В случае δ-образного распределения ионов на оси пучка с линейной плотностью $\hat{N}_\Phi$ имеем

$$\langle N_\Phi(r) \rangle = \hat{N}_\Phi. \quad (63)$$

Наконец, для подобных радиальных профилей пучка и ионного фона $(\chi(r) = \chi_\Phi(r))$

$$\langle N_\Phi(r) \rangle = \frac{\hat{N}_\Phi}{2}. \quad (64)$$

Последний интеграл в выражении (42) для среднего вириала может быть записан в виде

$$-\frac{\Omega_b}{2} \int \chi \mathbf{r}_\perp \circ (\widetilde{\mathbf{p}_\perp} \times \mathbf{i}_z) d\mathbf{r}_\perp$$
$$= -\frac{\Omega_b}{2} \int \chi (\mathbf{r}_\perp \times \widetilde{\mathbf{p}_\perp}) \circ \mathbf{i}_z d\mathbf{r}_\perp = -\frac{\Omega_b}{2} L, \quad (65)$$

где

$$L = \int \chi (\mathbf{r}_\perp \times \widetilde{\mathbf{p}_\perp}) \circ \mathbf{i}_z d\mathbf{r}_\perp = \int \chi r \widetilde{p}_\theta d\mathbf{r}_\perp \equiv \langle r p_\theta \rangle \quad (66)$$

— величина среднего углового момента частицы рассматриваемого сегмента пучка.

Подставляя (60), (61) и (65) в (42), получим выражение для среднего вириала V

$$V = e^2 \left(\frac{\beta^2\kappa\hat{N}_b}{2} + \langle N_\Phi(r) \rangle \right) - \frac{\Omega_b L}{2}, \quad (67)$$

где $\hat{N}_b$ — полная линейная плотность частиц пучка; $\kappa = (1 - \alpha_m) - (1 - \alpha_c)/\beta^2$; величина $\langle N_\Phi(r) \rangle$ определена в (61).

Рассмотрим теперь производную

$$\frac{dL}{dt} = \int r \frac{\partial(\chi\widetilde{p}_\theta)}{\partial t} d\mathbf{r}_\perp. \quad (68)$$

С учетом уравнения переноса импульса (25) и предположения об аксиальной симметричности пучка имеем

$$\int r \frac{\partial(\chi\widetilde{p}_\theta)}{\partial t} d\mathbf{r}_\perp = \Omega_b \int \chi r (\widetilde{\mathbf{p}_\perp} \times \mathbf{i}_z) \circ \mathbf{i}_\theta d\mathbf{r}_\perp$$
$$= -\Omega_b \int \chi r \widetilde{p}_r d\mathbf{r}_\perp = -\Omega_b \int \mathbf{r}_\perp \circ (\widetilde{\chi\mathbf{p}_\perp}) d\mathbf{r}_\perp. \quad (69)$$

Используя уравнение непрерывности (16) и граничное условие (43), получим

$$\int \mathbf{r}_\perp \circ (\widetilde{\chi\mathbf{p}_\perp}) d\mathbf{r}_\perp = \frac{m\gamma}{2} \int \nabla_\perp r^2 \circ \left(\frac{\widetilde{\chi\mathbf{p}_\perp}}{m\gamma} \right) d\mathbf{r}_\perp$$
$$= -\frac{m\gamma}{2} \int r^2 \nabla_\perp \circ \left(\frac{\widetilde{\chi\mathbf{p}_\perp}}{m\gamma} \right) d\mathbf{r}_\perp = \frac{m\gamma}{4} \frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}. \quad (70)$$

Тогда с учетом (70) уравнение (68) принимает вид

$$\frac{dL}{dt} = -\Omega_b \frac{m\gamma}{4} \frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}, \quad (71)$$

откуда следует равенство

$$\frac{d}{dt} \left(L + \Omega_b \frac{m\gamma}{4} \mathfrak{R}^2 \right) = 0. \quad (72)$$

Нетрудно убедиться, что интеграл (72) выражает закон сохранения среднего обобщенного углового момента частицы сегмента S^τ. Действительно, в рассматриваемом параксиальном приближении обобщенный угловой момент $\tilde{p}_\theta = r p_\theta + erA_\theta/c = r p_\theta + \Omega_b m\gamma r^2/2$, а его среднее значение

$$\widetilde{P}_\theta = \int f^\tau \left(r p_\theta + \frac{\Omega_b m\gamma r^2}{2} \right) d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp$$
$$= \int \chi r \widetilde{p}_\theta d\mathbf{r}_\perp + \frac{\Omega_b m\gamma}{2} \int \chi r^2 d\mathbf{r}_\perp = L + \frac{\Omega_b m\gamma}{4} \mathfrak{R}^2, \quad (73)$$

что совпадает с величиной, стоящей в (72) под знаком производной.

Интеграл (72) устанавливает связь между текущим значением среднего углового момента L и величиной $\mathfrak{R}^2$:

$$L = L_0 + \frac{m\gamma\Omega_b}{4} (\mathfrak{R}_0^3 - \mathfrak{R}^2), \quad (74)$$

где L_0 и $\mathfrak{R}_0$ — начальные значения соответствующих величин.

Подставляя выражение (67) в уравнение вириала (51), запишем это уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\gamma}{8}\,\frac{d\Re^2}{dt}\right) = E_\perp - e^2\left(\frac{\kappa\beta^2\hat{N}_b}{2} + \langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle\right) + \frac{\Omega_b L}{2}. \qquad (75)$$

Полагая в (75) производную $d\Re^2/dt \equiv 0$, получим необходимое условие динамического равновесия рассматриваемого сегмента пучка

$$E_\perp = \kappa T_B + e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle - \frac{\Omega_b L}{2}, \qquad (76)$$

где $T_B = e^2\beta^2 N_b/2 = e\beta J_{bz}/2c$ — так называемая температура Беннета.

Условие (76) является обобщением известного условия равновесия Беннета [5] на случай наличия внешнего магнитного поля и компенсирующего ионного фона.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., 1980. 167 с.

[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М., 1977. 277 с.

[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М., 1990. 331 с.

[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М., 1984. 432 с.

[5] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.

[6] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 8. P. 1327–1343.

[7] *Buchanan H.L.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 1. P. 221–231.

[8] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1983. Т. 9. № 5. С. 988–991.

[9] *Глазычев Л.В., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1990. Т. 16. № 5. С. 592–598.

[10] *Надеждин Е.Р.* // Физика плазмы. 1991. Т. 17. № 3. С. 327–335.

[11] *Fernsler R.F., Hubbard R.F., Lampe M.* // J. Appl. Phys. 1994. Vol. 75. N 7. P. 3278–3293.

[12] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 103–107.

[13] *Колесников Е.К., Савкин А.Д.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 1. С. 54–56.

[14] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // РиЭ. 1992. Т. 37. № 4. С. 694–699.

[15] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 68–73.

[16] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 127–129.

[17] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 76–78.

[18] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1988. Т. 14. № 5. С. 619–622.

[19] *Колесников Е.К.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 4. С. 360–367.

[20] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 11. С. 62–65.

[21] *Либов Р.* Введение в теорию кинетических уравнений. М., 1974. 371 с.

[22] *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947. 168 с.

[23] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М., 1978. 495 с.