

01;03

О возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно-осциллирующей во внешнем электростатическом поле электропроводной капли

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, М.В. Волкова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 1 декабря 2004 г.)

В аналитических асимптотических расчетах порядка $5/2$ по амплитуде деформации сферической формы капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, нелинейно-осциллирующей во внешнем однородном электростатическом поле E_0 , найдено выражение для напряженности поля в ее окрестности. Выяснилось, что напряженность суммарного электрического поля на вершинах капли превышает необходимую для зажигания коронного разряда уже при E_0 , на порядок меньшую критического значения, при котором реализуется неустойчивость капли по отношению к индуцированному заряду, т.е. при величине напряженности внешнего электростатического поля E_0 , регистрируемой в натуральных наблюдениях в грозовых облаках.

1. В связи с проблемой инициирования разряда молнии в грозовых облаках, начинающегося, согласно одной из моделей, с коронного разряда в окрестности крупной капли [1–3], представляет интерес расчет величины напряженности электрического поля в окрестности нелинейно-осциллирующей в однородном внешнем электростатическом поле заряженной капли воды. В такой общей постановке задача весьма громоздка для аналитического расчета, и ее целесообразно разбить на более простые для нелинейного анализа задачи. Так, в [3] проанализирована возможность зажигания коронного разряда в окрестности заряженной нелинейно-осциллирующей сферической капли и показано, что такой феномен может иметь место при достаточно больших, но в три раза меньших критического в смысле рэлеевской устойчивости ее зарядах. Тем не менее проблема остается, поскольку заряды величиной порядка третьей части от критического по Рэлею на облачных каплях при натуральных измерениях регистрируются чрезвычайно редко [4]. Аналогичные расчеты для капли в однородном внешнем электростатическом поле оказываются заметно более сложными ввиду того, что равновесная форма капли в таких условиях уже не сфера, а фигура, близкая к сфероиду. Указанное обстоятельство и послужило тормозом к исследованию нелинейных осцилляций капель во внешних полях, тогда как нелинейные осцилляции сферических заряженных капель за последние два десятка лет изучены достаточно подробно (см., например, [5–8] и указанную там литературу). Сфероидальность равновесной формы капли во внешнем однородном электростатическом поле при аналитических асимптотических расчетах ее осцилляций в сферической системе координат (расчеты в сфероидальной системе координат еще более громоздки и менее наглядны) приводит к появлению двух малых параметров: амплитуды равновесной сфероидальной де-

формации и амплитуды нелинейных осцилляций. Отметим, что все выполненные к настоящему времени работы по расчету осцилляций сфероидальных капель в однородном внешнем электростатическом поле выполнены лишь в линейном приближении по амплитуде осцилляций [9–14].

В качестве безразмерного параметра, характеризующего равновесную сфероидальную деформацию электропроводной капли во внешнем электростатическом поле, естественно принять эксцентриситет капли e . Отношение амплитуды ξ капиллярных осцилляций сфероидальной капли к радиусу равновеликой сферы R образуют второй малый параметр $\varepsilon \equiv (\xi/R)$, имеющий смысл безразмерной амплитуды осцилляций. Расчеты осцилляций сфероидальной капли в первом порядке малости по амплитуде ε в реальности должны учитывать и второй порядок малости по эксцентриситету e (по величине безразмерной напряженности электростатического поля) [9–14]. Иными словами, вся задача при учете разложений по обоим малым параметрам и сохранении в решении слагаемых $\sim \varepsilon \cdot e^2$ оказывается в какой-то мере нелинейной.

В асимптотических расчетах, проводимых с использованием разложений по нескольким малым параметрам, следует четко сопоставлять порядки малости параметров по отношению друг к другу. Так, если в рассматриваемой задаче принять, что $\varepsilon \sim e^2$, как это было сделано в [11–13], то при проведении расчетов в приближении $\sim \varepsilon \cdot e^2$ следует сохранять также слагаемые $\sim \varepsilon^2$. Это в [11–13] не было учтено, что делает результаты расчетов в этих работах некорректными.

В настоящей работе в предположении, что $\varepsilon \sim e^2$, проводился анализ нелинейных осцилляций незаряженной капли в однородном электростатическом поле с сохранением слагаемых $\sim \varepsilon \cdot e^2$ и $\sim \varepsilon^2$, а напряженность электростатического поля у поверхности капли

рассчитывается в приближении $\sim \varepsilon^{5/2}$, что необходимо для корректного учета взаимодействия стационарной сфероидальной деформации с осциллирующими модами.

2. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности нелинейно-осциллирующей незаряженной капли, находящейся в однородном электростатическом поле \mathbf{E}_0 . Примем, что жидкость является идеальной несжимаемой, идеально проводящей с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ .

В отсутствие внешнего поля капля имеет равновесную сферическую форму с радиусом R . Наличие слабого внешнего однородного электростатического поля \mathbf{E}_0 в окружающем каплю пространстве приводит к малому искажению сферической формы капли: к вытягиванию ее вдоль поля в фигуру, которую можно считать вытянутым сфероидом с точностью до слагаемых, пропорциональных квадрату эксцентриситета $e^2 = (9E_0^2 R / 16\pi\sigma)$. Уравнение образующей поверхности такой равновесной формы капли записывается в виде:

$$r(\theta) \equiv 1 + \frac{1}{3} e^2 \cdot P_2(\mu); \quad \mu \equiv \cos \theta, \quad (1)$$

где $P_2(\mu)$ — полином Лежандра.

Следует отметить, что безразмерная комбинация физических величин $W_e \equiv E_0^2 R / \sigma$ называется параметром Тейлора и характеризует устойчивость капли по отношению к поверхностному заряду, индуцированному внешним однородным электростатическим полем E_0 . Критическая для реализации неустойчивости величина параметра $W_E \equiv W_e^*$ равна ≈ 2.62 [10].

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ равновесная слабо сфероидальная капля с эксцентриситетом e , образующая которой определена соотношением (1), претерпевает осесимметричное возмущение $\xi(\theta, t)$ фиксированной амплитуды ξ , существенно меньшей радиуса капли ($\xi/R) \equiv \varepsilon \ll 1$, вследствие чего капля начинает осциллировать в окрестности равновесной сфероидальной формы. Зададимся целью найти образующую формы капли при $t > 0$ как функцию времени. Примем, что уравнение образующей поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $\rho = \sigma = R = 1$, имеет вид (за всеми величинами оставляем прежние обозначения)

$$\begin{aligned} r(\theta, t) &\equiv r(\theta) + \xi(\theta, t) \\ &\equiv 1 + \frac{1}{3} e^2 \cdot P_2(\mu) + \xi(\theta, t) \equiv 1 + f(\theta, t); \\ e^2 &= \frac{9E_0^2}{16\pi}; \quad |\xi| \ll 1; \quad |f| \ll 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Вызванное искажением равновесной поверхности движение жидкости в капле будем полагать потенциальным с потенциалом поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$; само поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ при этом определяется через градиент потенциала $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}(\psi(\mathbf{r}, t))$. Учитывая, что скорости гидродинамических движений жидкости в капле

много меньше скорости распространения электромагнитных взаимодействий, электрическое поле в окрестности капли будем считать электростатическим и станем описывать его с помощью потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$, с которым напряженность поля \mathbf{E} связана известным соотношением $\mathbf{E} = -\text{grad}(\Phi)$.

Математическая формулировка задачи об аналитическом асимптотическом расчете нелинейных осцилляций капли электропроводности жидкости во внешнем однородном электростатическом поле имеет вид

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (3)$$

$$r \rightarrow 0; \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad (4)$$

$$r \rightarrow \infty; \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -E_0 r \cos(\theta); \quad (5)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta};$$

$$\Delta p - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + p_E = p_\sigma; \quad (6)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (7)$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3\pi},$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (8)$$

$$\int_V \mathbf{e}_r \cdot r^3 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (9)$$

$$\oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) dS = 0,$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (10)$$

$$t = 0: \quad \xi(\theta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\mu),$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = 0; \quad \sum_{i \in \Xi} h_i = 1. \quad (11)$$

Поскольку условия (8), (9) должны выполняться в любой момент времени $t \geq 0$, при $t = 0$ они определяют амплитуды нулевой ξ_0 и первой ξ_1 мод в разложении начального возмущения $\xi(\theta)$ в ряд по полиномам Лежандра, т.е. амплитуды нулевой и первой мод не могут быть произвольны, но будут определяться видом начальной деформации.

В выражения (6)–(11) введены обозначения: Δp — перепад постоянных давления внутри и вне капли в состоянии равновесия;

$$p_E = \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi)^2$$

— давление электрического поля; $p_\sigma = \text{div}_S \mathbf{n}$ — давление сил поверхностного натяжения (div_S — поверхностная дивергенция); \mathbf{n} — единичный вектор нормали к

поверхности (2); ε — безразмерная амплитуда начального возмущения формы поверхности капли, являющаяся малым параметром задачи; h_i — коэффициенты, определяющие парциальный вклад i -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; Ξ — множество значения номеров изначально возбужденных колебательных мод; ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые из условий (8) и (9) в начальный момент времени, с точностью до слагаемых порядка малости $\sim \varepsilon \cdot e^2$ и $\sim \varepsilon^2$ равные

$$\begin{aligned}\xi_0 &\approx - \sum_{i \in \Xi} \left[\varepsilon^2 \frac{h_i^2}{(2i+1)} + \varepsilon \cdot e^2 \frac{2}{15} h_i \cdot \delta_{i,2} \right] + O(\varepsilon^3); \\ \xi_1 &\approx - \sum_{i \in \Xi} \left[\varepsilon^2 \frac{9ih_i - 1h_i}{(2i-1)(2i+1)} + \varepsilon \cdot e^2 \frac{9}{35} h_i \cdot \delta_{i,3} \right] + O(\varepsilon^3); \\ &\quad (12)\end{aligned}$$

$\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Для удобства дальнейших разложений и для того, чтобы иметь возможность в конечных выражениях без труда выделить слагаемые, обязанные своим происхождением сфероидальности равновесной формы, введем формальный параметр β таким образом, что $e^2 \approx \beta \cdot \varepsilon$. Поскольку, согласно принятому предположению, $e^2 \sim \varepsilon$, то очевидно, что $\beta \sim 1$. Этот параметр нужен только для того, чтобы указывать, что будучи умноженным на ε , он может быть записан как e^2 . Кроме того, напомним, что при отыскании равновесной формы капли в поле было получено соотношение между эксцентриситетом и напряженностью электрического поля, имеющее в безразмерных переменных вид

$$e^2 = \frac{9}{16\pi} E_0^2.$$

3. Для отыскания решения поставленной задачи воспользуемся методом многих масштабов, как это делалось в задачах этого типа в [3,5–8]. Искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представим в виде разложений по степеням малого параметра ε и будем считать зависящими не просто от времени t , а от разных его масштабов, определенных через малый параметр ε : $T_m \equiv \varepsilon^m t$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Ограничиваясь рассмотрением поставленной задачи в квадратичном приближении, в рамках которого можно определить зависимость искомых величин лишь от двух временных масштабов T_0 и T_1 , запишем

$$\begin{aligned}\xi(\theta, t) &= \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \psi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \psi^{(2)}(\theta, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon^{1/2} (\Phi^{(0)}(r, \theta) + \varepsilon \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) \\ &\quad + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(r, \theta, T_0)) + O(\varepsilon^{7/2}).\end{aligned}\quad (13)$$

Разложение для потенциала электрического поля ведется по полуцелым степеням параметра ε , поскольку

$\varepsilon \sim E_0^2$, и, следовательно, $\varepsilon^{1/2} \sim E_0$. Компонента потенциала $\varepsilon^{1/2} \cdot \Phi^{(0)}(r, \theta)$ определяется в окрестности равновесной слабо сфероидальной формы капли

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1/2} \cdot \Phi^{(0)}(r, \theta) &= \left(\frac{16\pi}{9} \varepsilon \cdot \beta \right)^{1/2} \frac{1}{r^2} (1 - r^3) \cos \theta \\ &\equiv E_0 \frac{1}{r^2} (1 - r^3) \cos \theta,\end{aligned}$$

а добавки $\Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)$ и $\Phi^{(2)}(r, \theta, T_0)$ связаны с искажением равновесной поверхности капли.

Для входящих в динамическое граничное условие (6) давлений электрического поля p_E и сил поверхностного натяжения p_σ примем следующие разложения:

$$\begin{aligned}p_E &= p_E^{(eq)} + \varepsilon^2 p_E^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^3); \\ p_\sigma &= p_\sigma^{(eq)} + \varepsilon p_\sigma^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 p_\sigma^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^3),\end{aligned}\quad (14)$$

где компоненты

$$p_E^{(eq)} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left(\nabla \Phi^{(0)} \right)^2 \Big|_{r=r(\theta)}$$

и

$$p_\sigma^{(eq)} = \text{div}_S \overline{\mathbf{n}^{(eq)}} \Big|_{r=r(\theta)}$$

не зависят от возмущения $\xi(\theta, t)$, а являются давлениями в равновесной сфероидальной поверхности капли, т.е. удовлетворяют равновесному балансу давлений

$$r = r(\theta) : \quad \Delta p + p_E^{(eq)} = p_\sigma^{(eq)}$$

и, следовательно, взаимно компенсируются.

Подставляя разложения (13), (14) в систему (3)–(11), можно получить набор краевых задач разных порядков малости для определения функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$ и $\Phi^{(m)}$ ($m = 1, 2$). Очевидно, что линейным уравнениям (3) должна удовлетворять каждая из функций $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$.

Решения уравнений (3) для функций первого и второго порядков малости, удовлетворяющие условиям (4), (5), запишем в виде

$$\begin{aligned}\psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(m)}(T_0, T_1) \cdot r^{(n)} \cdot P_n(\mu) \quad (m = 1; 2); \\ \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0) \cdot r^{-(n+1)} \cdot P_n(\mu).\end{aligned}$$

Последовательные поправки к равновесной поверхности капли также представим в виде разложений по полиномам Лежандра

$$\xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1) \cdot P_n(\mu) \quad (m = 1; 2).$$

4. В итоге для формы поверхности колеблющейся незаряженной капли, находящейся во внешнем однородном электрическом поле, получим аналитическое

выражение

$$\begin{aligned}
 r(\theta, t) &= 1 + \frac{1}{3} \varepsilon^2 P_2(\mu) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)}(t) P_n(\mu) \\
 &+ \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) + O(\varepsilon^3); \\
 M_n^{(1)}(t) &= \delta_{n,i} \cdot h_i \cos \left[\left(\omega_n - \frac{\varepsilon^2}{2\omega_n} G1(n) \right) \cdot t \right]; \\
 M_0^{(2)}(t) &= - \sum_{i \in \Xi} \left[\frac{2}{15} \beta \cdot \delta_{i,2} h_i \cos(\omega_i t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{h_i^2}{(2i+1)} (\cos(\omega_i t))^2 \right]; \\
 M_1^{(2)}(t) &= - \sum_{i \in \Xi} \left[\frac{9}{35} \beta \cdot \delta_{i,3} h_i \cos(\omega_i t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{9 \cdot i \cdot h_{i-1} h_i}{(2i-1)(2i+1)} \cos(\omega_{i-1} t) \cos(\omega_i t) \right] \quad (\forall n \geq 2); \\
 M_n^{(2)}(t) &= \sum_{i \in \Xi} h_i \cdot \beta \cdot \left\{ \delta_{i,n+2} \mu_{n+2} [\cos(\omega_{n+2} t) - \cos(\omega_n t)] \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{i,n-2} \mu_{n-2} [\cos(\omega_{n-2} t) - \cos(\omega_n t)] \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \cdot \left\{ \lambda_{ijn}^{(+)} [\cos((\omega_i + \omega_j)t) - \cos(\omega_n t)] \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_{ijn}^{(-)} [\cos((\omega_i - \omega_j)t) - \cos(\omega_n t)] \right\}; \\
 \mu_{n+2} &= \frac{G2(n)}{(\omega_n^2 - \omega_{n+2}^2)}; \quad \mu_{n-2} = \frac{G3(n)}{(\omega_n^2 - \omega_{n-2}^2)}; \\
 \lambda_{lmn}^{(\pm)} &= \frac{(\gamma_{lmn} \pm \omega_l \cdot \omega_m \cdot \eta_{lmn})}{[\omega_n^2 - (\omega_l \pm \omega_m)^2]}; \\
 G1(n) &\equiv \frac{n}{3} \left[(3n(n+1) - 10) K_{2,n,n} \right. \\
 &\quad \left. + 12(n K_{1,n-1,n} K_{1,n,n-1} + (n+2) K_{1,n+1,n} K_{1,n,n+1}) - 8 \right]; \\
 G2(n) &\equiv \frac{1}{3} \left[(n^3 + 3n^2 - 10n - 8) K_{2,n+2,n} \right. \\
 &\quad \left. + 12n(n+2) K_{1,n+1,n} K_{1,n+2,n+1} \right]; \\
 G3(n) &\equiv \frac{n}{3} \left[(5n^2 - 21n + 14) K_{2,n-2,n} \right. \\
 &\quad \left. + 12n K_{1,n-1,n} K_{1,n-2,n-1} \right]; \\
 \gamma_{lmn} &= K_{lmn} [\omega_m^2 (n-m+1) + 2n(m(m+1) - 1)] + \alpha_{lmn} \frac{1}{m} \omega_m^2; \\
 \eta_{lmn} &= K_{lmn} \left(\frac{n}{2} - m + 1 \right) + \alpha_{lmn} \frac{1}{m} \left(1 + \frac{n}{2l} \right); \\
 \omega_n^2 &= n(n-1)(n+2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{lmn} &= -\sqrt{l(l+1)m(m+1)} C_{l0m0}^{n0} C_{l(-1)m1}^{n0}; \\
 K_{lmn} &= [C_{l0m0}^{n0}]^2; \quad (15)
 \end{aligned}$$

C_{l0m0}^{n0} , $C_{l(-1)m1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана; $\delta_{m,n}$ — символ Кронекера.

В полученных соотношениях бросается в глаза, что положение внутренних нелинейных резонансов, определяемых условием обращения в нуль знаменателей в коэффициентах $\lambda_{lmn}^{(\pm)}$, не зависит от степени сфероидальности (от величины эксцентриситета) равновесной вытянуто-сфероидальной формы капли. Данное обстоятельство указывает на необходимость проведения (для обеспечения адекватности обчитываемой математической модели реальям) расчетов следующего порядка малости.

5. Заметим, что для определения формы нелинейно-осциллирующей капли с точностью до слагаемых порядка $\sim \varepsilon^2$ в разложении (13) для электростатического потенциала достаточно вычислять только поправку $\Phi^{(1)}$, поскольку электростатическое поле влияет на форму капли через давление p_E , а добавка к давлению, вызванная возмущением $\xi(\theta, t)$ и квадратичная по амплитуде этого возмущения ε , имеет вид

$$p_E^{(2)}(\xi) = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((\nabla \Phi^{(0)})^2 \right) \cdot \xi^{(1)} + 2 \nabla \Phi^{(0)} \cdot \nabla \Phi^{(1)} \right],$$

т. е. полностью определяется через $\Phi^{(0)}$ и $\Phi^{(1)}$.

Поставим перед собой задачу рассчитать величину напряженности электростатического поля $\mathbf{E} = -\text{grad}(\Phi)$ на поверхности нелинейно-осциллирующей капли. Несложно убедиться в том, что выражение для модуля напряженности E , выписанное с точностью до слагаемых порядка $\sim \varepsilon^{3/2}$ включительно, не учитывает наиболее интересный эффект: взаимодействие сфероидальной равновесной формы капли и возмущения поверхности капли $\xi(\theta, t)$, связанного с ее колебаниями. В самом деле, выражение для напряженности поля у поверхности капли, рассчитанное в этом приближении,

$$\begin{aligned}
 E \approx & -\varepsilon^{1/2} \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} + \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\beta}{3} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \right) \right) \right] + O(\varepsilon^{5/2}),
 \end{aligned}$$

не содержит слагаемых, пропорциональных произведению сфероидальной деформации на амплитуду возмущения профиля поверхности.

Чтобы учесть обсуждаемый эффект, необходимо при расчете напряженности поля E учесть слагаемые порядка $\sim \varepsilon^{5/2}$, что в свою очередь требует вычисления поправки $\Phi^{(2)}$ в разложении (13) для электростатического потенциала.

6. Замкнутая электростатическая задача состоит из уравнения (3) для потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$, граничных и дополнительных условий (5), (7), (10). Решение ищется в

виде разложения (13), подставляя которое в электростатическую задачу (3), (5), (7), (10), несложно получить задачи различных порядков малости для определения добавок $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ к потенциалу.

Напомним, что компонента потенциала $\varepsilon^{1/2}\Phi^{(0)}(r, \theta)$ по определению описывает поле в окрестности незаряженной равновесной слабо сфероидальной капли, помещенной во внешнее однородное поле. Точное выражение для потенциала такого поля получено в [15] и, будучи разложенным в ряд по степеням эксцентриситета e (а следовательно, по степеням параметра ε , поскольку $e^2 = \beta\varepsilon$), в сферических координатах может быть представлено в виде

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) \approx \left(\frac{16\pi}{9}\beta\right)^{1/2} \times \left[\Phi^{(0,0)}(r, \theta) + \varepsilon \cdot \beta\Phi^{(0,1)}(r, \theta) + O(\varepsilon^2)\right];$$

$$\Phi^{(0,0)}(r, \theta) \equiv \frac{1}{r^2}(1 - r^3)\cos(\theta);$$

$$\Phi^{(0,1)}(r, \theta) \equiv \frac{1}{20r^4}(8r^2 - 3 + 15\cos(2\theta))\cos(\theta).$$

Поиск потенциала электростатического поля в окрестности нелинейно осциллирующей слабосфероидальной капли осуществляется в сферической системе координат с началом координат в центре масс капли, и, следовательно, граничные условия (5), (7) могут быть разложены в ряд Тейлора в окрестности равновеликой капле сферической поверхности радиуса R . При этом граничное условие (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t)|_{r=1+f(\theta, t)} &\approx \Phi(\mathbf{r}, t)|_{r=1} + (f(\theta, t) \cdot \nabla)\Phi(\mathbf{r}, t)|_{r=1} \\ &+ \frac{1}{2}(f(\theta, t) \cdot \nabla)^2\Phi(\mathbf{r}, t)|_{r=1} + O(\varepsilon^3) = 0; \\ f(\theta, t) &\equiv \frac{1}{3}e^2 \cdot P_2(\mu) + \xi(\theta, t). \end{aligned} \quad (16)$$

а) В порядке малости $\sim \varepsilon^{3/2}$ для поправки к потенциалу $\Phi^{(1)}$ будем иметь задачу

$$\Delta\Phi^{(1)} = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(1)} \rightarrow 0;$$

$$r = 1: \quad \Phi^{(1)} = -\frac{\partial\Phi^{(0,0)}}{\partial r}\xi^{(1)};$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1} + \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0,0)}}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\Phi^{(0,0)}}{\partial r}\right)\Big|_{r=1} \xi^{(1)}\right) \sin(\theta)d\theta = 0;$$

имеющую решение

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \left(\frac{16\pi}{9}\beta\right)^{1/2} \left[3 \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(1)}(t) \cdot r^{-(n+1)} \cdot P_n(\mu)\right];$$

$$H_n^{(1)}(t) = \left(K_{1,n+1,n} \cdot M_{n+1}^{(1)}(t) + K_{1,n-1,n} \cdot M_{n-1}^{(1)}(t)\right). \quad (17)$$

б) В порядке малости $\sim \varepsilon^{5/2}$ электростатическая задача для поправки к потенциалу $\Phi^{(2)}$ запишется в виде

$$\Delta\Phi^{(2)} = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(2)} \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \Phi^{(2)} &= -\frac{\partial\Phi^{(0,0)}}{\partial r}\xi^{(2)} - \left[\frac{\partial^2\Phi^{(0,0)}}{\partial r^2} \left(\frac{\beta}{3}P_2(\mu) + \frac{1}{2}\xi^{(1)}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta\frac{\partial\Phi^{(0,1)}}{\partial r}\right] \cdot \xi^{(1)} - \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} \left(\frac{\beta}{3}P_2(\mu) + \xi^{(1)}\right); \\ \int_0^\pi \left[\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0,0)}}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\Phi^{(0,0)}}{\partial r}\right)\xi^{(2)} \right. \\ &\quad \left. + \beta \cdot \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0,1)}}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\Phi^{(0,1)}}{\partial r}\right)\xi^{(1)} + \left(\frac{\partial^3\Phi^{(0,0)}}{\partial r^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4\frac{\partial^2\Phi^{(0,0)}}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\Phi^{(0,0)}}{\partial r}\right) \left(\frac{\beta}{3}P_2(\mu) + \frac{1}{2}\xi^{(1)}\right) \cdot \xi^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}\right) \left(\frac{\beta}{3}P_2(\mu) + \xi^{(1)}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{3} \cdot \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0,0)}}{\partial r\partial\theta}\xi^{(1)} + \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\theta}\right) \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial\theta} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0,0)}}{\partial r\partial\theta} \left(\xi^{(1)} + \frac{\beta}{3}P_2(\mu)\right) + \beta\frac{\partial\Phi^{(0,1)}}{\partial\theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\theta}\right) \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}\right] \Big|_{r=1} \sin(\theta)d\theta = 0. \end{aligned}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\Phi^{(2)}(r, \theta, t) = \left(\frac{16\pi}{9}\beta\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2)}(t) \cdot r^{-(n+1)} \cdot P_n(\mu);$$

$$H_n^{(2)}(t) = 3 \left[K_{1,n+1,n} \cdot M_{n+1}^{(2)}(t) + K_{1,n-1,n} \cdot M_{n-1}^{(2)}(t)\right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(K_{1,i+1,i} \cdot M_{i+1}^{(1)}(t) + K_{1,i-1,i} M_{i-1}^{(1)}(t)\right) \right.$$

$$\left. - (K_{i,j,n+1} K_{1,n+1,n} + K_{i,j,n-1} K_{1,n-1,n}) \cdot M_i^{(1)}(t)\right)$$

$$\times (i+1)K_{i,j,n} \cdot M_j^{(1)}(t) + \beta \left[\left(K_{1,n+1,n} \left((n+3)K_{2,n,n} - \frac{4}{5}\right) \right. \right.$$

$$\left. + (n+5)K_{1,n+1,n+2}K_{2,n+2,n}\right) \cdot M_{n+1}^{(1)}(t) + \left(K_{1,n-1,n} \right.$$

$$\left. \times \left((n+3)K_{2,n,n} - \frac{4}{5}\right) + (n+1)K_{1,n-1,n-2}K_{2,n-2,n}\right) \cdot M_{n-1}^{(1)}(t)$$

$$\left. + (n+5)K_{1,n+3,n+2}K_{2,n+2,n}M_{n+3}^{(1)}(t) \right.$$

$$\left. + (n+1)K_{1,n-3,n-2}K_{2,n-2,n}M_{n-3}^{(1)}(t)\right]. \quad (18)$$

В полученных выражениях для $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$, $\Phi^{(2)}(r, \theta, t)$ при анализе сумм подразумевается, что значения нижнего индекса у амплитуд $M_n^{(m)}(t)$ ($m = 1, 2$) не могут быть отрицательными, а в случае их появления соответствующие слагаемые нужно отбрасывать.

в) Окончательное выражение для электростатического потенциала в окрестности нелинейно-осциллирующей электропроводной капли в требуемом порядке малости примет вид

$$\Phi(r, \theta, t) = \frac{E_0}{r^2} \cos(\theta) \cdot \left[1 - r^3 + \frac{e^2}{20r^2} (8r^2 - 3 + 15 \cos(2\theta)) \right] + E_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[3\varepsilon H_n^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \cdot H_n^{(2)}(t) \right] \cdot r^{-(n+1)} \cdot P_n(\mu). \quad (19)$$

7. Выражение для напряженности электрического поля в окрестности капли легко найти на основе соотношения $\mathbf{E} = -\text{grad}(\Phi)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = E_0 \left\{ \left[1 + \frac{2}{r^3} + \frac{e^2}{5r^5} (4r^2 - 3 + 15 \cos(2\theta)) \right] \cos(\theta) \right. \\ \left. + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[3H_n^{(1)}(t) + \varepsilon \cdot H_n^{(2)}(t) \right] \cdot (n+1)r^{-(n+2)} \cdot P_n(\mu) \right\} \mathbf{n}_r \\ + E_0 \left\{ \left(-1 + \frac{1}{r^3} + \frac{e^2}{20r^5} (8r^2 - 3 + 15 \cos(2\theta)) \right) \sin(\theta) \right. \\ \left. + \frac{3e^2}{2r^5} \sin(2\theta) \cos(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[3\varepsilon H_n^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \cdot H_n^{(2)}(t) \right] \right. \\ \left. \times (n+1)r^{-(n+2)} - \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \right\} \mathbf{n}_\theta. \end{aligned}$$

Непосредственно на поверхности электропроводной капли $r(\theta, t) = 1 + f(\theta, t)$ отлична от нуля лишь нормальная к поверхности составляющая напряженности, имеющая в сферической системе координат вид

$$\begin{aligned} E_n(\theta, t) = 3E_0 \cos(\theta) + 3E_0 \cos(\theta) \left(e^2 \left(\cos(\theta)^2 - \frac{3}{5} \right) \right. \\ \left. - \varepsilon \cdot 2\xi^{(1)}(\theta, t) - \varepsilon^{3/2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} \\ + E_0 \left[e^2 \frac{1}{5} \cos(\theta) \left(\frac{e^2}{4} (315 \cos(\theta)^4 - 256 \cos(\theta)^2 + 37) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon \cdot (75 \cos(\theta)^2 - 43) \cdot \xi^{(1)} \right) + \varepsilon^2 \cdot \frac{3}{2} \left(\cos(\theta) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(4\xi^{(2)} - 8 \cdot (\xi^{(1)})^2 + \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right) - 2 \sin(\theta) \cdot \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \right) \right. \\ \left. - \varepsilon^{5/2} \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right] \right] \Big|_{r=1} \\ + \varepsilon^{3/2} \cdot \left[e^2 \frac{1}{6} (1 - 3 \cos(\theta)^2) \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right. \\ \left. - 6 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right] \Big|_{r=1}; \end{aligned}$$

$$\xi^{(1)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)}(t) P_n(\mu); \quad \xi^{(2)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu), \quad (20)$$

где функции $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$, $\Phi^{(2)}(r, \theta, t)$ определяются выражениями (17), (18).

При записи (20) использовалось разложение границы вида (16).

8. На рис. 1, *a, b* приведены результаты расчетов напряженности электрического поля у поверхности капли по (20) в виде зависимости: *a* — от времени величины напряженности электрического поля на одной из вершин капли (на другой вершине поле отличается только знаком); *b* — от угла θ величины напряженности электрического поля в различные моменты времени. При расчетах принималось, что безразмерная напряженность внешнего однородного электростатического поля равна ≈ 0.167 , что для капель воды радиусом $100 \mu\text{m}$ приводит к размерной величине $E_0 \approx 1.2 \text{ kV/cm}$ (такие поля регистрируются при натуральных измерениях в грозовых облаках [4]). Электростатического поле указанной величины обеспечивает равновесную сфероидальную дефор-

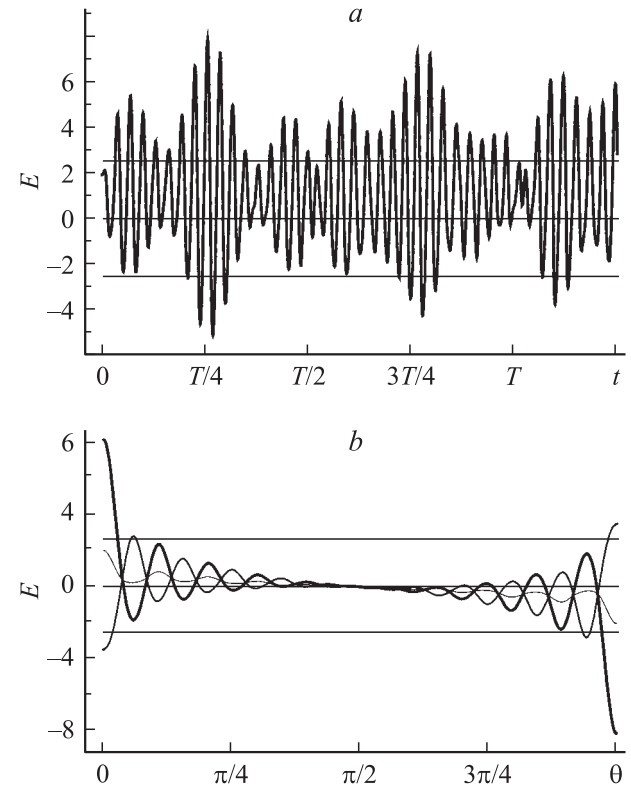


Рис. 1. *a* — зависимость от безразмерного времени величины безразмерной напряженности электрического поля E на одной из вершин капли, когда начальная деформация определена суперпозицией основной и двадцатой мод, рассчитанная при $E_0 \approx 0.167$, $h_2 = 0.75$, $h_{20} = 0.25$; *b* — зависимость от угла θ величины напряженности электрического поля в различные моменты времени. Тонкая линия — зависимость для начального момента времени; линия средней величины — для $t = 0.75T$; жирная — для $t = 0.5645T$ (время достижения амплитудой своего максимального значения на оси симметрии). T — период осцилляций основной моды.

мацию капли с квадратом эксцентриситета $e^2 \approx 5 \cdot 10^{-3}$. Принималось также, что начальная деформация формы капли, приводящая к возникновению нелинейных осцилляций, определена суперпозицией основной ($n = 2$) и двадцатой ($n = 20$) мод. Осцилляции основной моды (сфероидальные осцилляции) облачных капель с амплитудой порядка радиуса капли регистрируются при натурных измерениях [16] и объясняются взаимодействием капли с отрывающимися от ее поверхности вихрями при

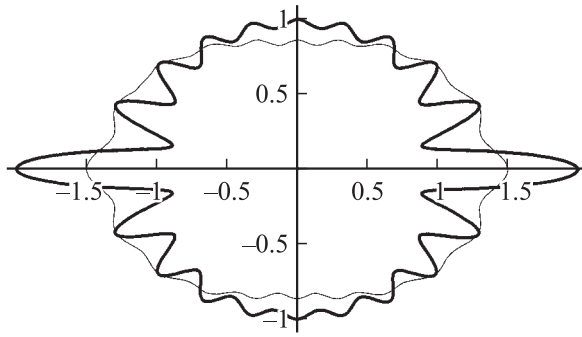


Рис. 2. Образующая капли в момент времени, когда амплитуда напряженности электрического поля достигает своего максимума (нанесено жирной линией). Начальная форма капли (нанесено тонкой линией) определена суперпозицией виртуально возбужденных основной и двадцатой мод. Расчеты выполнены при тех же значениях физических параметров, которые были использованы в расчетах к рис. 1.

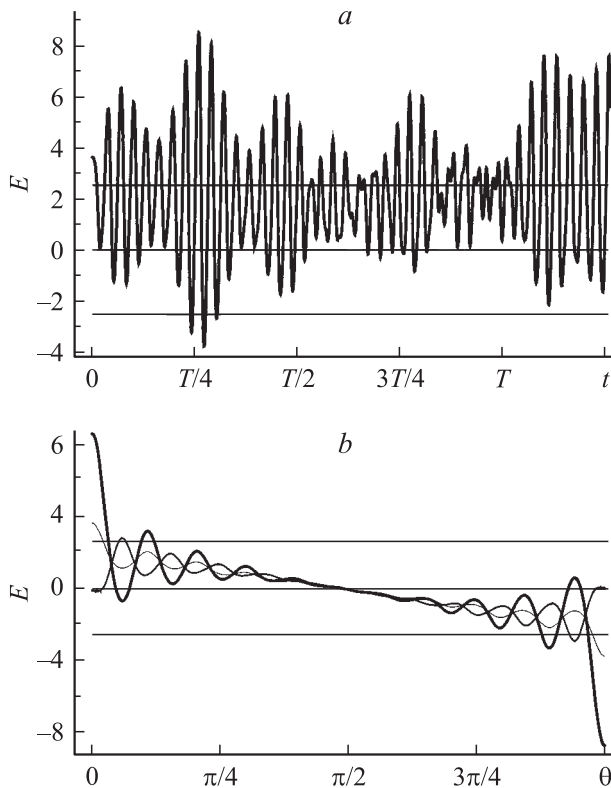


Рис. 3. *a, b* — те же зависимости, что на рис. 1, рассчитанные при $E_0 \approx 0.53$ и вдвое меньшей амплитуде осцилляций.

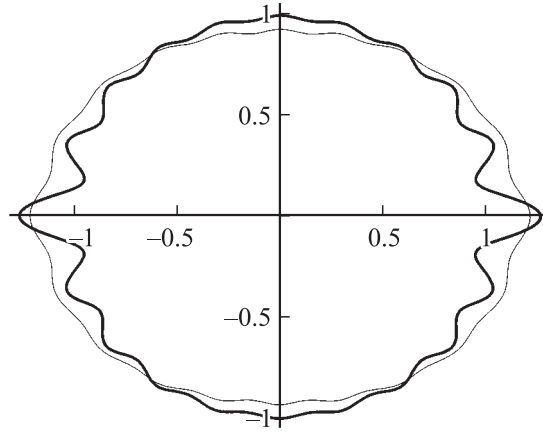


Рис. 4. То же, что на рис. 2. Расчеты проведены при тех же значениях физических параметров, которые были использованы в расчетах к рис. 3.

турбулентном обтекании капли потоком воздуха. Что касается высоких мод, то их возбуждение для крупных (радиусом $R \approx 100 \mu\text{m}$) капель грозовых облаков обеспечивается столкновениями с существенно более мелкими капельками (радиусом $r \approx 10 \mu\text{m}$), концентрация которых в облаках максимальна [4]. При расчетах принималось, что безразмерная амплитуда осцилляций основной моды равна ≈ 0.3 , а амплитуда осцилляций двадцатой моды, определена отношением радиусов сталкивающихся капель и имеет величину $(r/R) \approx 0.1$. На рис. 2 приведена образующая осесимметричной капли при указанных значениях параметров в различные моменты времени.

Прямые линии при $E = \pm 2.52$ на рис. 1 отмечена безразмерная напряженность поля, критическая для зажигания коронного разряда. Несложно видеть, что в окрестности вершин капли напряженность поля индуцированного на ней заряда будет достаточно высока для зажигания коронного разряда. Примечательно, что напряженность внешнего однородного электростатического поля, при котором проведены расчеты, соответствует лишь десятой части от критического в смысле реализации неустойчивости капли по отношению к индуцированному заряду [10,17].

На рис. 3, *a, b* приведены зависимости, аналогичные показанным на рис. 1, *a, b*, рассчитанные при напряженности внешнего однородного электростатического поля E_0 , в $\sqrt{10}$ раз большей, чем была использована при расчетах рис. 1, но при вдвое меньшей амплитуде осцилляций. На рис. 4 приведена образующая капли, соответствующая расчетам рис. 3.

Заключение

Напряженность электрического поля у вершин нелинейно-осциллирующей во внешнем однородном электростатическом поле E_0 капли электропроводной жидкости может превышать критическое для зажигания коронного

разряда значение при величине E_0 , регистрируемой в натуральных измерениях в грозовых облаках. Сказанное делает актуальным детальное рассмотрение возможности инициирования разряда молнии с коронного разряда в окрестности крупной капли.

Список литературы

- [1] Дьячук В.А., Мучник В.М. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [2] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
- [4] Облака и облачная атмосфера. Справочник / Под ред. И.П. Мазин, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитов. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
- [5] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [6] Feng Z. // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [7] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
- [8] Ширяева С.О., Жаров А.Н., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 10–20.
- [9] Cheng K.J. // Phys. Lett. 1985. Vol. A112. N 11. P. 392–396.
- [10] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [11] Feng Z.C. // Quart. Appl. Math. 1990. Vol. 47. N 3. P. 555–567.
- [12] Feng Z.C., Beard K.V. // Proc. R. Soc. (London). 1990. Vol. 430. P. 133–150.
- [13] Feng Z.C., Beard K.V. // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 227. P. 429–447.
- [14] Ширяева С.О. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 12–20.
- [15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 661 с.
- [16] Beard K.V. // Rev. Geophys. 1987. Vol. 25. N 3. P. 357–370.
- [17] Taylor G.I. // Proc. R. Soc. (London). 1964. Vol. A280. P. 383–397.