01;03

О влиянии вязкости жидкости нелинейно-осциллирующей заряженной капли на положения внутренних резонансов

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 10 ноября 2004 г.)

Впервые в асимптотических расчетах второго порядка малости по величине осесимметричной начальной деформации заряженной капли вязкой жидкости найдено аналитическое выражение для образующей ее формы, которая как функция времени представляется бесконечным рядом по корням дисперсионного уравнения и конечной суммой по номерам мод, определяющих начальную деформацию. Некоторые из компонент аналитического выражения образующей содержат в знаменателях разности частот мод, которые при определенных величинах заряда могут становиться весьма малыми, что соответствует проявлению внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия мод. Аналитическое и численное исследование влияния вязкости жидкости на частоты осцилляций показало, что резонансные значения собственных зарядов капли с ростом вязкости смещаются в сторону больших значений. На спектр мод, возбуждающихся за счет нелинейного их взаимодействия, вязкость жидкости влияния не оказывает.

1. Задача исследования капиллярных осцилляций и устойчивости заряженных капель представляет интерес в связи с многочисленными академическими и прикладными проблемами, а потому она неоднократно решалась в линейной и нелинейной постановках. Но если в линейной постановке строгое решение задачи для капли вязкой жидкости отыскивается без особенных трудностей; то все нелинейные анализы, которые стали проводиться около двадцати лет назад, после появления мощных пакетов аналитических компьютерных вычислений (а это около полусотни публикаций), выполнены лишь для идеальной жидкости (см., например, [1] и указанную там литературу). Наиболее вероятная причина такого положения дел в крайней громоздкости математических расчетов нелинейных осцилляций капель вязкой жидкости [2]. Тем не менее учет вязкости в задачах данного класса представляется весьма важным, поскольку позволяет приблизить анализируемые математические модели нелинейных осцилляций к реальности.

В нижеследующем изложении проводится исследование влияния вязкости жидкости на положения внутренних нелинейных резонансов осциллирующей заряженной капли. Чтобы уменьшить громоздкость выкладок, рассуждения ограничиваются анализом полученного с сохранением интегральных слагаемых аналитического выражения образующей нелинейно-осциллирующей капли вязкой жидкости для начальных деформаций формы простейшего вида и анализом положений внутренних нелинейных резонансов в простейшем их виде, а именно вырожденных.

2. Пусть имеется сферическая капля радиуса r_0 идеально проводящей несжимаемой вязкой жидкости с плотностью ρ, кинематической вязкостью ν, коэффициентом поверхностного натяжения σ, несущая электрический заряд Q. Уравнение поверхности капли, совершающей осесимметричные колебания, в любой момент времени t запишем в сферической системе координат r, ϑ, φ с началом в центре капли в виде

$$F(r,\vartheta,t) = r - r_0 - \xi(\vartheta,t) = 0. \quad (1)$$

Начальную деформацию капли зададим соотношением

$$t = 0: \qquad \xi = \varepsilon \sum_{m\in\Omega} h_m P_m(\mu); \quad \mu \equiv \cos(\vartheta), \quad (2)$$

где ε — малый параметр, пропорциональный амплитуде начальной деформации; $P_m(\mu)$ — полином Лежандра порядка m; Ω — множество индексов мод, определяющих начальную деформацию капли; h_m — константы, характеризующие парциальный вклад m-й моды в начальную деформацию капли $\sum\limits_{m\in\Omega} h_m = O(1)$.

Поле скоростей течения жидкости в капле обозначим $\mathbf{U}(r,\vartheta,t)$, поле давлений — $p(r,\vartheta,t)$, потенциалы электрического поля в окрестности капли и на ее поверхности обозначим $\phi(r,\vartheta,t)$ и $\phi_S(t)$ соответственно.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных колебаний заряженной капли, форма которой определяется (1), (2), вязкой несжимаемой электропроводной жидкости имеет вид [1]

$$\partial_t\mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta\mathbf{U}; \quad \mathrm{div}\,\mathbf{U} = 0; \quad \Delta\phi = 0;$$

$$t=0: \ \ \mathbf{U}=0; \quad r\to 0: \ \ \mathbf{U}<\infty; \quad r\to+\infty: \ \ \nabla\phi\to 0;$$

$$r = r_0 + \xi(\vartheta,t): \quad \partial_t F + (\mathbf{U}\cdot\nabla)F = 0;$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{U} = 0;$$

$$-p + 2\rho\nu\,\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U} - \frac{1}{8\pi}(\nabla\phi)^2 + \sigma(\nabla\cdot\mathbf{n}) = 0; \quad \phi = \phi_S(t);$$

$$\int\limits_S \mathbf{n}\cdot\nabla\phi\, dS = -4\pi Q;$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi \,|\, r = r_0 + \xi;\ 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\};$$

$$\int_V r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4\pi}{3} r_0^3;$$

$$V = \{r, \vartheta, \varphi \,|\, 0 \le r \le r_0 + \xi;\ 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\};$$

$$\int_V \mathbf{r}\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 0, \qquad (3)$$

где символ ∂_t означает частную производную по переменной t; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали к касательной.

Поскольку выписанная система уравнений является нелинейной, то для отыскания ее решения в рамках метода прямого разложения [3] все искомые величины задачи представим в виде разложений по малому параметру ε

$$\xi(\vartheta, t) = \varepsilon\xi^{(1)}(\vartheta, t) + \varepsilon^2\xi^{(2)}(\vartheta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\mathbf{U}(r, \vartheta, t) = \varepsilon U_r^{(1)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_r + \varepsilon^2 U_r^{(2)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_r + \varepsilon U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_\vartheta + \varepsilon^2 U_\vartheta^{(2)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_\vartheta + O(\varepsilon^3);$$

$$p(r, \vartheta, t) = p^{(0)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon p^{(1)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon^2 p^{(2)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\phi(r, \vartheta, t) = \phi^{(0)}(r, t) + \varepsilon\phi^{(1)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon^2\phi^{(2)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\phi_S(t) = \phi_S^{(0)}(t) + \varepsilon\phi_S^{(1)}(t) + \varepsilon^2\phi_S^{(2)}(t) + O(\varepsilon^3), \qquad (4)$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$ — орты сферической системы координат.

3. Подставляя разложения (4) в систему уравнений (3) и приравнивая коэффициенты при различных степенях малого параметра, получим набор задач для отыскания нулевого, первого и второго порядков малости.

а) В нулевом порядке будем иметь

$$\Delta\phi^{(0)} = 0; \qquad r \to +\infty: \quad \nabla\phi^{(0)} \to 0;$$

$$r = r_0: \qquad \phi^{(0)} = \phi_S^{(0)}(t); \quad \int_{-1}^{1} r_0^2 \partial_r \phi^{(0)} d(\cos\vartheta) = -2Q;$$

$$p^{(0)} + \frac{Q^2}{8\pi r_0^4} = \frac{2\sigma}{r_0}.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\phi^{(0)} = \frac{Q}{r}; \quad \phi_S^{(0)} = \frac{Q}{r_0}. \qquad (5)$$

б) В первом порядке малости получим задачу

$$\partial_t U_r^{(1)} = -\frac{1}{\rho}\partial_r p^{(1)} + \nu\left(\frac{1}{r^2}\partial_{\vartheta\vartheta}U_r^{(1)} + \frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r^2}\partial_\vartheta U_r^{(1)} - \frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_\vartheta^{(1)} - \frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r}\partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} - \frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r^2}U_\vartheta^{(1)}\right);$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(1)} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\partial_\vartheta p^{(1)} + \nu\left(\partial_{rr}U_\vartheta^{(1)} + \frac{2}{r}\partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_r^{(1)}\right);$$

$$\partial_r U_r^{(1)} + \frac{2}{r}U_r^{(1)} + \frac{1}{r}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} + \frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r}U_\vartheta^{(1)} = 0; \quad \Delta\phi^{(1)} = 0;$$

$$t = 0: \qquad \mathbf{U}^{(1)} = 0; \quad \xi^{(1)} = \varepsilon\sum_{m\in\Omega} h_m P_m(\mu);$$

$$r \to 0: \qquad \mathbf{U}^{(1)} < \infty; \qquad r \to +\infty: \quad \nabla\phi^{(1)} \to 0;$$

$$r = r_0: \qquad \phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t); \quad \partial_t\xi^{(1)} = U_r^{(1)};$$

$$\partial_r U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r}\partial_\vartheta U_r^{(1)} - \frac{1}{r}U_\vartheta^{(1)} = 0;$$

$$-p^{(1)} + 2\rho\nu\partial_r U_r^{(1)} - \frac{1}{4\pi}\partial_r\phi^{(0)}\left(\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(0)}\right) - \frac{\sigma}{r_0^2}(2 + \Delta_\Omega)\xi^{(1)} = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}\left(r_0\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\left(r_0\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)}\right)\right)d(\mu) = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}\xi^{(1)}d(\mu) = 0; \quad \int_{-1}^{1}\xi^{(1)}P_1(\mu)\,d(\mu) = 0, \qquad (6)$$

где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа.

Решение задачи (6) нетрудно найти в виде [1]

$$\xi^{(1)}(\vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega}\xi_n^{(1)}(t)\,P_n(\mu);$$

$$U_r^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega}U_{rn}^{(1)}(r, t)\,P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega}U_{\vartheta n}^{(1)}(r, t)\,\partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$p_n^{(1)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega}p_n^{(1)}(r, t)\,P_n(\mu), \qquad (7)$$

где

$$\xi_n^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{+\infty}a_{\xi_n}(S_n^{(j)})\exp(S_n^{(j)}t);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r, t) = \sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_n(S_n^{(j)})\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} + b_n(S_n^{(j)})\frac{1}{r}\frac{j_n(\chi_n^{(j)}r)}{j_n(\chi_n^{(j)}r_0)}\right) \times \exp(S_n^{(j)}t);$$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r, t) = \sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_n(S_n^{(j)})\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} + b_n(S_n^{(j)})\left(\frac{1}{r}\frac{j_n(\chi_n^{(j)}r)}{j_n(\chi_n^{(j)}r_0)} + \frac{\chi_n^{(j)}}{n+1}\frac{j_{n+1}(\chi_n^{(j)}r)}{j_n(\chi_n^{(j)}r_0)}\right)\right)\frac{\exp(S_n^{(j)}t)}{n};$$

$$a_{\xi_n}(S_n^{(j)}) = \left(S_n^{(j)} + 2(n-1)(2n+1)\frac{\nu}{r_0^2} + 2(n-1)^2(n+1) \times \frac{\nu}{\eta_n^{(0)}(\chi_n^{(j)})r_0^2}\right)\frac{h_n}{\partial_{S_n^{(j)}}D_n(S_n^{(j)})};$$

$$a_n(S_n^{(j)}) = \left(\left(2(n^2-1) + (r_0\chi_n^{(j)})^2\right)\frac{1}{2\chi_n^{(j)}r_0}\frac{j_n(\chi_n^{(j)}r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(j)}r_0)} - 1\right) \times \frac{h_n}{\eta_n^0(\chi_n^{(j)})}\frac{\omega_n^2}{\partial_{S_n^{(j)}}D_n(S_n^{(j)})};$$

$$b_n(S_n^{(j)}) = 2(n^2-1)\left(1 - \frac{2}{\chi_n^{(j)} r_0}\,\frac{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)}\right)^{-1} \times \frac{h_n \omega_n^2 \nu}{r_0 S_n^{(j)} \partial_{S_n^{(j)}} D_n(S_n^{(j)})}; \quad \chi_n^{(j)} = \sqrt{\frac{S_n^{(j)}}{\nu}};$$

$$\partial_{S_n^{(j)}} D_n(S_n^{(j)}) = 2S_n^{(j)} + 2(n-1)(2n+1)\,\frac{\nu}{r_0^2} + (n-1)^2(n+1) \times \frac{\nu}{r_0^2}\left(2 + \frac{(2n+1)\chi_n^{(j)} r_0}{2}\,\frac{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)} + \frac{(\chi_n^{(j)} r_0)^2}{2} \times \left(1 - \left(\frac{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)}\right)^2\right)\right)\frac{1}{\eta_n^0(\chi_n^{(j)})};$$

$$D_n(S_n^{(j)}) = (S_n^{(j)})^2 + 2(n-1)(2n+1)\,\frac{S_n^{(j)}\nu}{r_0^2} + 2(n-1)^2(n+1)\,\frac{S_n^{(j)}\nu}{r_0^2}\left(1 - \frac{\chi_n^{(j)} r_0}{2}\,\frac{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)}\right)^{-1} + \omega_n^2;$$

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho r_0^3}\,n(n-1)(n+2-W); \quad W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma r_0^3};$$

$$\eta_n^0(\chi_n^{(j)}) = 1 - \frac{r_0 \chi_n^{(j)}}{2}\,\frac{j_n(\chi_n^{(j)} r_0)}{j_{n+1}(\chi_n^{(j)} r_0)},$$

где $S_n^{(j)}$ — корень дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(j)}) = 0$, $j_n(\chi_n^{(j)} r_0)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода порядка n от аргумента $\chi_n^{(j)} r_0$ [4].

в) Для отыскания компонент решения второго порядка малости будем иметь

$$\partial_t U_r^{(2)} + U_r^{(1)}\partial_r U_r^{(1)} + \frac{1}{r}\,U_\vartheta^{(1)}\partial_\vartheta U_r^{(1)} - \frac{1}{r}\,(U_\vartheta^{(1)})^2 = -\frac{1}{\rho}\,\partial_r p^{(2)} + \nu\left(\frac{1}{r^2}\,\partial_{\vartheta\vartheta} U_r^{(2)} + \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta)}{r^2}\,\partial_\vartheta U_r^{(2)} - \frac{1}{r}\,\partial_{r\vartheta} U_\vartheta^{(2)} - \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta)}{r}\,\partial_r U_\vartheta^{(2)} - \frac{1}{r^2}\,\partial_\vartheta U_\vartheta^{(2)} - \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta)}{r^2}\,U_\vartheta^{(2)}\right);$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(2)} + U_r^{(1)}\partial_r U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r}\,U_\vartheta^{(1)}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r}\,U_r^{(1)} U_\vartheta^{(1)} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta p^{(2)} + \nu\left(\partial_{rr} U_\vartheta^{(2)} + \frac{2}{r}\,\partial_r U_\vartheta^{(2)} - \frac{1}{r}\,\partial_{r\vartheta} U_r^{(2)}\right);$$

$$\partial_r U_r^{(2)} + \frac{2}{r}\,U_r^{(2)} + \frac{1}{r}\,\partial_\vartheta U_\vartheta^{(2)} + \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta)}{r}\,U_\vartheta^{(2)} = 0; \quad \Delta\phi^{(2)} = 0;$$

$$t = 0: \quad \mathbf{U}^{(2)} = 0; \quad \xi^{(2)} = -\frac{1}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\frac{h_m^2}{2m+1}\,P_0(\mu) - \frac{9}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\frac{(m+1)h_m h_{m+1}}{(2m+1)(2m+3)}\,P_1(\mu);$$

$$r \to 0: \quad \mathbf{U}^{(2)} < \infty; \qquad r \to +\infty: \quad \boldsymbol{\nabla}\phi^{(2)} \to 0;$$

$$r = r_0: \quad \phi^{(2)} + \xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)} + \frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\partial_{rr}\phi^{(0)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(1)} = \phi_S^2(t);$$

$$\int_{-1}^{1}\Big[r_0^2\partial_r\phi^{(2)} + r_0\xi^{(1)}\big(r_0\partial_{rr}\phi^{(1)} + 2\partial_r\phi^{(1)}\big) + r_0\xi^{(2)}\big(r_0\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)}\big) + (\xi^{(1)})^2\left(\frac{1}{2}\,r_0^2\partial_{rrr}\phi^{(0)} + 2r_0\partial_{rr}\phi^{(0)} + \partial_r\phi^{(0)}\right) - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(1)}\Big]\,d(\mu) = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}\big(r_0\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2\big)\,d(\mu) = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}\big(2r_0\xi^{(2)} + 3(\xi^{(1)})^2\big)P_1(\mu)\,d(\mu) = 0;$$

$$-\partial_t\xi^{(2)}(\vartheta,t) + U_r^{(2)} + \partial_r U_r^{(1)}\xi^{(1)}(\vartheta,t) - \frac{1}{r_0}\,U_\vartheta^{(1)}\partial_\vartheta\xi^{(1)}(\vartheta,t) = 0.$$

$$\frac{1}{r_0}\,\partial_\vartheta U_r^{(2)} + \partial_r U_\vartheta^{(2)} - \frac{1}{r_0}\,U_\vartheta^{(2)} + \left(\frac{1}{r_0}\,\partial_{r\vartheta} U_r^{(1)} - \frac{1}{r_0^2}\,\partial_\vartheta U_r^{(1)} + \partial_{rr} U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r_0}\,\partial_r U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r_0^2}\,U_\vartheta^{(1)}\right)\xi^{(1)}(\vartheta,t) - 2\left(\frac{1}{r_0^2}\,\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} + \frac{1}{r_0^2}\,U_r^{(1)} - \frac{1}{r_0}\,\partial_r U_r^{(1)}\right)\partial_\vartheta\xi^{(1)}(\vartheta,t) = 0;$$

$$-p^{(2)} - \frac{\sigma}{r_0^2}\,(2+\Delta_\Omega)\xi^{(2)} + \frac{2\sigma}{r_0^3}\,\xi^{(1)}(1+\Delta_\Omega)\xi^{(1)} - \frac{1}{8\pi}\Big[2\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)} + (\xi^{(1)})^2\big((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2 + \partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)}\big) + \frac{1}{r_0^2}\,(\partial_\vartheta\phi^{(1)})^2 + (\partial_r\phi^{(1)})^2 + 2\partial_r\phi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)} + 2\xi^{(1)}\big(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)} + \partial_{rr}\phi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)}\big)\Big] + 2\rho\nu\partial_r U_r^{(2)} - \big(\partial_r p^{(1)} - 2\rho\nu\partial_{rr} U_r^{(1)}\big)\xi^{(1)}(\vartheta,t) - 2\rho\nu\left(\frac{1}{r_0^2}\,\partial_\vartheta U_r^{(1)} + \frac{1}{r_0}\,\partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r_0^2}\,U_\vartheta^{(1)}\right)\partial_\vartheta\xi^{(1)}(\vartheta,t) = 0. \tag{8}$$

Подставляя в систему (8) величины нулевого (5) и первого (7) порядков малости, получим систему неоднородных дифференциальных уравнений в частных призводных, для решения которой воспользуемся преобразованием Лапласа

$$f(S) = \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-St)\,dt = \mathscr{F}[f(t)].$$

Изображения Лапласа величин второго порядка малости разложим по бесконечному набору полиномов Лежандра или их производным

$$\xi^{(2)}(\vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n^{(2)}(S)\, P_n(\mu);$$

$$\phi^{(2)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n^{(2)}(r, S)\, P_n(\mu);$$

$$U_r^{(2)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_{rn}^{(2)}(r, S)\, P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(2)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_{\vartheta n}^{(2)}(r, S)\, \partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$p^{(2)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n^{(2)}(r, S)\, P_n(\mu). \qquad (9)$$

Подставляя разложения (5), (7), (9) в (8), можно получить неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка для отыскания $U_{rn}^{(2)}(r, S)$ (остальные неизвестные функции могут быть выражены через $U_{rn}^{(2)}(r, S)$)

$$\left(\partial_{rr} + \frac{4}{r}\partial_r - \frac{(n-1)(n+2)}{r^2}\right)\left(\partial_{rr} + \frac{4}{r}\partial_r - \frac{(n-1)(n+2)}{r^2} - \frac{S}{\nu}\right)$$
$$\times U_{rn}^{(2)}(r, S) = \frac{n(n+1)}{\nu} \sum_{k,m\in\Omega} \sum_{l,g=1}^{+\infty} \frac{f_{kmn}^{lg}(r, S_k^{(l)}, S_m^{(g)})}{S - S_k^{(l)} - S_m^{(g)}}; \qquad (10)$$

$$f_{kmn}^{lg}(r, S_k^{(l)}, S_m^{(g)}) = f_{kmn}^1 a_k(S_k^{(l)}) a_m(S_m^{(g)}) r^{m+k-5}/r_0^{m+k-2}$$
$$+ \left(f_{kmn}^2 (\chi_m^{(g)} r)^2 + f_{kmn}^3\right) a_k(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) r^{k-5}$$
$$\times j_m(\chi_m^{(g)} r)/\left(r_0^{k-1} j_m(\chi_m^{(g)} r_0)\right) + \left(f_{kmn}^4 (\chi_m^{(g)} r)^2 + f_{kmn}^5\right)$$
$$\times a_k(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) \chi_m^{(g)} r^{k-4} j_{m+1}(\chi_m^{(g)} r)/\left(r_0^{k-1} j_m(\chi_m^{(g)} r_0)\right)$$
$$+ \left(f_{kmn}^2 (\chi_m^{(g)} r)^2 + f_{kmn}^1\right) b_k(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) j_k(\chi_k^{(l)} r)$$
$$\times j_m(\chi_m^{(g)} r)/\left(r^5 j_k(\chi_k^{(l)} r_0) j_m(\chi_m^{(g)} r_0)\right) + \left(f_{kmn}^4 (\chi_m^{(g)} r)^2\right.$$
$$\left. + f_{kmn}^6 (\chi_k^{(l)} r)^2 + f_{kmn}^5\right) b_k(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) \chi_m^{(g)} j_k(\chi_k^{(l)} r)$$
$$\times j_{m+1}(\chi_m^{(g)} r)/\left(r^4 j_k(\chi_k^{(l)} r_0) j_m(\chi_m^{(g)} r_0)\right) + f_{kmn}^7 b_k(S_k^{(l)})$$
$$\times b_m(S_m^{(g)}) \chi_k^{(l)} \chi_m^{(g)} j_{k+1}(\chi_k^{(l)} r)$$
$$\times j_{m+1}(\chi_m^{(g)} r)/\left(r^3 j_k(\chi_k^{(l)} r_0) j_m(\chi_m^{(g)} r_0)\right);$$

$$f_{kmn}^1 = (m-1)\Big(\left(m^2 + k(m+2) - 2\right)\Gamma_{kmn}/\left(m(m+1)\right)$$
$$+ 2\Gamma_{mkn}/\left(k(k+1)\right) + \Big(\left(k(m+4) + m - 2\right)\Lambda_{kmn}$$
$$+ \left(k(m-2) + m + 4\right)\Lambda_{mkn}\Big)/\left(k(k+1)m(m+1)\right) - K_{kmn}$$
$$- (k^2 + 2m + 1)\alpha_{kmn}/\left(k(k+1)m(m+1)\right)\Big);$$

$$f_{kmn}^4 = \Gamma_{kmn}/\left(m(m+1)\right);$$

$$f_{kmn}^2 = (m+k)\Gamma_{kmn}/\left(m(m+1)\right) + (\Lambda_{kmn} + \Lambda_{mkn})/\left(km(m+1)\right);$$

$$f_{kmn}^3 = (k+m-2)\left(\Gamma_{kmn} + \Gamma_{mkn} - K_{kmn} + (\Lambda_{kmn} + \Lambda_{mkn} - \alpha_{kmn})/(km)\right);$$

$$f_{kmn}^5 = \Gamma_{kmn} + \Gamma_{mkn} - K_{kmn} + (k-2)(\Lambda_{kmn} + \Lambda_{mkn} - \alpha_{kmn})/\left(km(m+1)\right);$$

$$f_{kmn}^6 = \Gamma_{mkn}/\left(k(k+1)\right) + (\Lambda_{kmn} + \Lambda_{mkn})/\left(k(k+1)m(m+1)\right);$$

$$\chi_k^{(l)} = \sqrt{S_k^{(l)}/\nu};$$

$$f_{kmn}^7 = (2\Lambda_{kmn} - 4\Lambda_{mkn} + \alpha_{kmn})/\left(k(k+1)m(m+1)\right);$$

$$\chi_m^{(g)} = \sqrt{S_m^{(g)}/\nu};$$

$$\alpha_{kmn} = -C_{k0m0}^{n0} C_{k(-1)m1}^{n0} \sqrt{k(k+1)m(m+1)};$$

$$\Gamma_{kmn} = (2n+1)\alpha_{nmk}/\left(n(n+1)(2k+1)\right);$$

$$K_{kmn} = \left(C_{k0m0}^{n0}\right)^2; \quad \Lambda_{kmn} = (2n+1)\left(\sum_{j=1}^{[m/2]} \alpha_{n,k,m-2j} - m^2\alpha_{nkm}/(2m+1)\right)\Big/\left(n(n+1)\right);$$

$C_{k0m0}^{n0}, C_{k(-1)m1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана.

Уравнение (10) имеет ограниченное при $r \to 0$ решение вида

$$U_{rn}^{(2)}(r, S) = A_n(S) r^{n-1} + B_n(S)\frac{1}{r} j_n(\chi r)$$
$$+ \sum_{k,m\in\Omega} \sum_{l,g=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{S - S_k^{(l)} - S_m^{(g)}} \int_0^r \left\{ \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{S}\left(\frac{\tau^{n+3}}{r^{n+2}} - \frac{r^{n-1}}{\tau^{n-2}}\right)\right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{S}\sqrt{\nu}} \frac{\tau^3}{r}\left(j_n(\chi r) y_n(\chi\tau) - y_n(\chi r) j_n(\chi\tau)\right)\right\}$$
$$\times f_{kmn}^{lg}(\tau, S_k^{(l)}, S_m^{(g)}) d\tau, \qquad (11)$$

где $y_n(\chi r)$ — сферическая модифицированная функция Бесселя второго рода порядка n [4]; $A_n(S), B_n(S)$ — произвольные постоянные; $\chi = \sqrt{S/\nu}$.

Подставляя (11) в граничные условия, получаем систему трех линейных алгебраических уравнений относительно величин $A_n(S)$, $B_n(S)$, $\xi_n^{(2)}(S)$. Решая эту систему, можно найти коэффициенты $A_n(S)$, $B_n(S)$, $\xi_n^{(2)}(S)$, которые имеют весьма громоздкий вид. Учитывая это обстоятельство и цели проводимого исследования, приведем только выражение для $\xi_n^{(2)}(S)$

$$\xi_0^{(2)}(S) = -\frac{1}{r_0} \sum_{m\in\Omega} \frac{1}{2m+1} \mathscr{F}\left[\left(\xi_m^{(1)}(t)\right)^2\right];$$

$$\xi_1^{(2)}(S) = -\frac{9}{r_0} \sum_{m\in\Omega} \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} \mathscr{F}\left[\xi_m^{(1)}(t)\, \xi_{m+1}^{(1)}(t)\right];$$

$$\xi_n^{(2)}(S) = \sum_{k,m\in\Omega} \sum_{l,g=1}^{+\infty} \frac{\xi_{kmn}^{lg}(S, S_k^{(l)}, S_m^{(g)})}{D_n(S)(S - S_k^{(l)} - S_m^{(g)})}; \quad n \geq 2, \qquad (12)$$

где

$$\xi^{lg}_{kmn}(S, S^{(l)}_k, S^{(g)}_m) = \Bigg((\chi r_0)^2 + (n-1)(3n+1) + \frac{(n^2-1)}{\eta^0_n(\chi)}\Big(2n - 1 - \frac{r_0\chi}{2}\,\frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)}\Big)\Bigg)$$

$$\times \frac{2n(n+1)}{2n+1}\,\frac{r_0^{n-3}}{\chi^2}\int\limits_0^{r_0}\frac{f^{lg}_{kmn}(r, S^{(l)}_k, S^{(g)}_m)}{r^{n-2}}\,dr - \Bigg((\chi r_0)^2 + 2(n+1)\big(n(n-3)-1\big)$$

$$+ \frac{2(n+1)}{\eta^0_n(\chi)}\Big(n(2n^2+n-1) + 1 - n(n+2)\,\frac{r_0\chi}{2}\,\frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)}\Big)\Bigg)$$

$$\times \frac{n}{2n+1}\,\frac{1}{\chi^2}\,\frac{1}{r_0^{n+4}}\int\limits_0^{r_0} r^{n+3} f^{lg}_{kmn}(r, S^{(l)}_k, S^{(g)}_m)dr - n(n+1)\frac{j_n(\chi r_0)}{\eta^0_n(\chi)}\Big(2(\chi r_0)^2 + 4n(n-1)(n+2)$$

$$- \chi r_0\big((\chi r_0)^2 + 2(n-1)(2n+1)\big)\frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)}\Big)\frac{(-1)^n}{\chi r_0^3}\int\limits_0^{r_0} r^3 y_n(\chi r) f^{lg}_{kmn}(r, S^{(l)}_k, S^{(g)}_m)dr$$

$$+ \frac{n(n+1)}{\eta^0_n(\chi)}\Bigg(\Big((n+1)(\chi r_0)^2 + 4n(n-1)(n+2) - \chi r_0\big((\chi r_0)^2 + 2(n-1)(2n+1)\big)\frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)}\Big)y_n(\chi r_0)$$

$$- (n-1)(\chi r_0)^2\frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)}\,y_{n+1}(\chi r_0)\Bigg)\frac{(-1)^n}{\chi r_0^3}\int\limits_0^{r_0} r^3 j_n(\chi r) f^{lg}_{kmn}(r, S^{(l)}_k, S^{(g)}_m)dr$$

$$+ \Bigg(\frac{\eta^1_n(\chi)}{\eta^0_n(\chi)}\,n(n+1)\Big(\frac{2\Lambda_{kmn}}{m} - \frac{2(m-2)(m-1)\Gamma_{kmn}}{m} - 2(m-2)\Gamma_{mkn}\Big)$$

$$- \frac{\big(D_n(S) - \omega_n^2\big)r_0^2}{\nu^2\chi^2}\Big(\frac{\alpha_{kmn}}{m} - (m-1)K_{kmn}\Big)\Bigg)\frac{\nu}{r_0^4}a_{\xi k}(S^{(l)}_k)\big(a_m(S^{(g)}_m)r_0 + b_m(S^{(g)}_m)\big)$$

$$+ \Big(\frac{4(m-1)\alpha_{kmn}}{m} - \big((\chi^{(g)}_m r_0)^2 + 2(m-2)(m-1)\big)K_{kmn}\Big)\frac{n\nu}{r_0^3}\,a_{\xi k}(S^{(l)}_k)\,a_m(S^{(g)}_m)$$

$$+ \Bigg(\big((\chi^{(g)}_m r_0)^2 + 2(m^2-1)\big)\,\frac{2\alpha_{kmn}}{m(m+1)} - \big((\chi^{(g)}_m r_0)^2 + (m-2)(m-1)\big)2K_{kmn}$$

$$- \frac{\eta^1_n(\chi)}{\eta^0_n(\chi)}\,\frac{(n+1)(m-2)}{m(m+1)}(\chi^{(g)}_m r_0)^2\Gamma_{kmn}\Bigg)\frac{n\nu}{r_0^4}a_{\xi k}(S^{(l)}_k)b_m(S^{(g)}_m)$$

$$+ \frac{n\sigma}{2r_0^4\rho}\Big(\Big(4(k^2+k-1) + \big(3 + k(m+1) + m(2n-2m-7)\big)W\Big)K_{kmn} + W\alpha_{kmn}\Big)a_{\xi k}(S^{(l)}_k)a_{\xi m}(S^{(g)}_m)$$

$$+ \Bigg(\frac{\eta^1_n(\chi)}{\eta^0_n(\chi)}\Big(\frac{2\Lambda_{kmn}}{m(m+1)} - \big((\chi^{(g)}_m r_0)^2 + 2(m^2+m+2)\big)\frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)} - 2\Gamma_{mkn}\Big)n(n+1)$$

$$- \frac{(D_n(S) - \omega_n^2)r_0^2}{S\nu}\Big(\frac{\alpha_{kmn}}{m(m+1)} - K_{kmn}\Big) + 8nK_{kmn} - \frac{4n\alpha_{kmn}}{m(m+1)}\Bigg)a_{\xi k}(S^{(l)}_k)b_m(S^{(g)}_m)\chi^{(g)}_m\frac{\nu}{r_0^3}\,\frac{j_{m+1}(\chi^{(g)}_m r_0)}{j_m(\chi^{(g)}_m r_0)}$$

$$- \Big(\Gamma_{kmn} + \frac{(km-k+m+3)\Lambda_{kmn}}{k(k+1)m(m+1)} + \frac{2(m-1)\Lambda_{mkn}}{k(k+1)m(m+1)}\Big)\frac{n}{r_0}\,a_k(S^{(l)}_k)a_m(S^{(g)}_m) - \Big(\Gamma_{kmn} + \Gamma_{mkn} + \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)}\,(\chi^{(g)}_m r_0)^2$$

$$+ \frac{\Lambda_{kmn} + \Lambda_{mkn}}{km}\Big)\frac{n}{r_0^2}a_k(S^{(l)}_k)b_m(S^{(g)}_m) - \Big(\Gamma_{kmn} + \frac{\Gamma_{kmn}}{m(m+1)}\,(\chi^{(g)}_m r_0)^2 + \frac{(km-k+m+3)\Lambda_{kmn}}{k(k+1)m(m+1)}$$

$$+ \frac{2(m-1)\Lambda_{mkn}}{k(k+1)m(m+1)}\Big)\frac{n}{r_0^3}b_k(S^{(l)}_k)b_m(S^{(g)}_m) - \frac{n}{r_0^2}\Big(\frac{\Lambda_{kmn}+\Lambda_{mkn}}{km(m+1)}\Big)\chi^{(g)}_m\big(r_0 a_k(S^{(l)}_k) + b_k(S^{(l)}_k)\big)b_m(S^{(g)}_m)\,\frac{j_{m+1}(\chi^{(g)}_m r_0)}{j_m(\chi^{(g)}_m r_0)}$$

$$- \frac{n}{r_0^2}\,\frac{\Lambda_{kmn}}{k(k+1)m(m+1)}\,\chi^{(l)}_k\chi^{(g)}_m\,b_k(S^{(l)}_k)\,b_m(S^{(g)}_m)\frac{j_{k+1}(\chi^{(l)}_k r_0)}{j_k(\chi^{(l)}_k r_0)}\,\frac{j_{m+1}(\chi^{(g)}_m r_0)}{j_m(\chi^{(g)}_m r_0)};$$

$$\eta^1_n(\chi) = n - \frac{r_0\chi}{2}\,\frac{j_n(\chi r_0)}{j_{n+1}(\chi r_0)}.$$

4. Из вида выражений (12) видно, что оно имеет бесконечное счетное число особых точек, которые определяются из условий $D_n(S)=0$ и $S-S_k^{(l)}-S_m^{(g)}=0$ и являются простыми полюсами. Кроме того, выражение (12) при $S\to\infty$ стремится к нулю, что позволяет в формуле обратного преобразования Лапласа

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(S)\exp(St)\,dS$$

интеграл вдоль прямой $\operatorname{Re}S=\gamma$ заменить контурным интегралом, охватывающим всю левую часть комплексной плоскости и применить к этому интегралу теорему о вычетах. В результате формула обращения примет вид

$$f(t)=\sum_{j=1}^{+\infty}\operatorname{res}\big(F(S_n^{(j)})\exp(S_n^{(j)}t)\big), \tag{13}$$

где суммирование ведется по всем корням уравнений $D_n(S)=0$ и $S-S_k^{(l)}-S_m^{(g)}=0$.

Применяя формулу (13) для коэффициента $\xi_n^{(2)}(S)$, найдем

$$\xi_n^{(2)}(t)=\sum_{k,m\in\Omega}\sum_{l,g,j=1}^{+\infty}\frac{\xi_{kmn}^{lg}(S_n^{(j)},S_k^{(l)},S_m^{(g)})}{(S_n^{(j)}-S_k^{(l)}-S_m^{(g)})\partial_{S_n^{(j)}}D_n(S_n^{(j)})}\exp(S_n^{(j)}t)$$

$$+\sum_{k,m\in\Omega}\sum_{l,g=1}^{+\infty}\frac{\xi_{kmn}^{lg}(S_k^{(l)}+S_m^{(g)},S_k^{(l)},S_m^{(g)})}{D_n(S_k^{(l)}+S_m^{(g)})}\exp\big((S_k^{(l)}+S_m^{(g)})t\big);$$

$$n\geq 2, \tag{14}$$

где $S_n^{(j)}$ — корень дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(j)})=0$.

Коэффициенты $\xi_0^{(2)}(t)$, $\xi_1^{(2)}(t)$ будут иметь вид

$$\xi_0^{(2)}(t)=-\frac{1}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\sum_{l,g=1}^{+\infty}\frac{a_{\xi m}(S_m^{(l)})a_{\xi m}(S_m^{(g)})}{2m+1}\times\exp\big((S_m^{(l)}+S_m^{(g)})t\big);$$

$$\xi_1^{(2)}(t)=-\frac{9}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\sum_{l,g=1}^{+\infty}\frac{(m+1)a_{\xi m}(S_m^{(l)})a_{\xi m+1}(S_{m+1}^{(g)})}{(2m+1)(2m+3)}\times\exp\big((S_m^{(l)}+S_{m+1}^{(g)})t\big).$$

Используя явный вид коэффициентов $\xi_n^{(1)}(t)$, $\xi_n^{(2)}(t)$, а также разложения (4), (7) и (9), выпишем аналитическое выражение для образующей нелинейно-осциллирующей заряженной капли вязкой жидкости с учетом слагаемых до второго порядка малости включительно

$$r(\vartheta,t)=r_0+\varepsilon\sum_{n\in\Omega}\sum_{j=1}^{+\infty}a_{\xi n}(S_n^{(j)})\exp(S_n^{(j)}t)P_n(\mu)$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\sum_{l,g=1}^{+\infty}\frac{a_{\xi m}(S_m^{(l)})a_{\xi m}(S_m^{(g)})}{2m+1}\exp\big((S_m^{(l)}+S_m^{(g)})t\big)P_0(\mu)$$

$$-\frac{9\varepsilon^2}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\sum_{l,g=1}^{+\infty}\frac{(m+1)a_{\xi m}(S_m^{(l)})a_{\xi m+1}(S_{m+1}^{(g)})}{(2m+1)(2m+3)}\times\exp\big((S_m^{(l)}+S_{m+1}^{(g)})t\big)P_1(\mu)$$

$$+\varepsilon^2\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k,m\in\Omega}\Bigg\{\sum_{l,g,j=1}^{+\infty}\frac{\xi_{kmn}^{lg}(S_n^{(j)},S_k^{(l)},S_m^{(g)})}{(S_n^{(j)}-S_k^{(l)}-S_m^{(g)})\partial_{S_n^{(j)}}D_n(S_n^{(j)})}\times\exp(S_n^{(j)}t)$$

$$+\sum_{l,g=1}^{+\infty}\frac{\xi_{kmn}^{lg}(S_k^{(l)}+S_m^{(g)},S_k^{(l)},S_m^{(g)})}{D_n(S_k^{(l)}+S_m^{(g)})}\exp\big((S_k^{(l)}+S_m^{(g)})t\big)\Bigg\}P_n(\mu).$$

Бросается в глаза (см. (10), (12), (14) и (15)) отличительная особенность полученного выражения — его громоздкость. В непростом выражении (15) уже громоздкие коэффициенты ξ_{kmn}^{lg} (см. (12)) выражаются через интегралы от не менее громоздких функций неоднородности f_{kmn}^{lg} уравнений (10). Сказанное означает большую сложность прямого использования выражения (15). Даже в случае начальных деформаций капли простейшего вида (одномодовых) расчетные трудности весьма значительны даже для не слишком высоких мод (когда спектр мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, не слишком широк). Поэтому решение (15) проиллюстрировано (рис. 1) расчетом нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости для начальной деформации, определяющейся низшей из мод, деформирующих каплю, основной ($n=2$).

5. Важной проблемой нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости является определение зависимости спектра мод, возбуждающихся за счет их нелинейного взаимодействия, от вязкости. Чтобы разобраться с этой проблемой, отметим, что спектр возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия мод определяется функцией неоднородности f_{kmn}^{lg} в правой части уравнения (10), через которую интегральным образом выражаются коэффициенты ξ_{kmn}^{lg}, определяющие поправки второго порядка малости в (15).

При численных расчетах по (15) выяснилось, что функция неоднорости в дифференциальном уравнении (10) может иметь более простой вид, поскольку коэффициенты f_{kmn}^1, f_{kmn}^3, f_{kmn}^5, f_{kmn}^7 удовлетворяют свойствам

$$f_{kkn}^1=0,\quad f_{kmn}^1=-f_{mkn}^1,\quad f_{kmn}^3=0,\quad f_{kmn}^5=0,$$

$$f_{kkn}^7=0,\quad f_{kmn}^7=-f_{mkn}^7,$$

по крайней мере в том случае, когда изначально возбуждается любой набор мод из интервала от 2

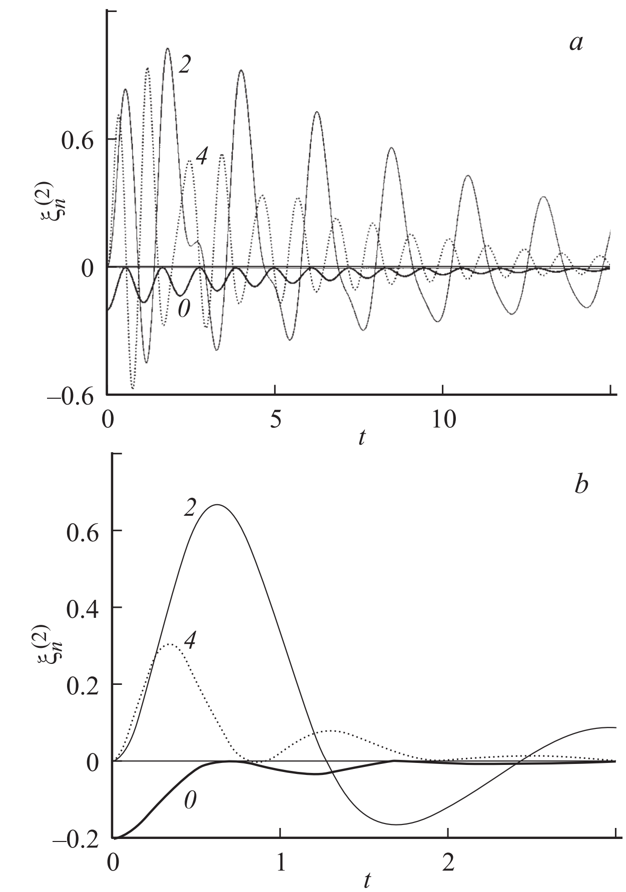

Рис. 1. Зависимости безразмерных амплитуд мод капли вязкой жидкости, возбуждающихся во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, от безразмерного времени при начальном возбуждении основной ($n = 2$) моды при $W = 0$ и различных значениях безразмерной вязкости. Цифра у кривой — номер моды. Обезразмеривание здесь и далее проведено по правилу: $\rho = 1$, $r_0 = 1$, $\sigma = 1$; $\nu = 0.02$ (a), 0.2 (b).

до 20, т. е. для любых $k, m \in \Omega$ и $n \geq 2$, когда $\Omega \subseteq \Omega_0$, $\Omega_0 = \{k \mid 2 \leq k \leq 20,\ k \in N\}$. Отметим, что указанный диапазон мод представляет наибольший интерес, поскольку более высокие моды весьма быстро затухают, а потому не могут играть существенной роли в физически значимых приложениях. Учитывая выписанные соотношения, функцию $f^{lg}_{kmn}(r, S_k^{(l)}, S_m^{(g)})$ в правой части уравнения (10) можно записать в более компактном виде

$$f^{lg}_{kmn}(r, S_k^{(l)}, S_m^{(g)}) = f^4_{kmn}(\chi_m^{(g)})^3 a_k(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) \frac{r^{k-2}}{r_0^{k-1}} \times \frac{j_{m+1}(\chi_m^{(g)} r)}{j_m(\chi_m^{(g)} r_0)} + f^2_{kmn}(\chi_m^{(g)})^2 b_m(S_m^{(g)}) \left(a_k(S_k^{(l)}) \frac{r^{k-3}}{r_0^{k-1}} + b_k(S_k^{(l)}) \frac{1}{r^3} \frac{j_k(\chi_k^{(l)} r)}{j_k(\chi_k^{(l)} r_0)} \right) \frac{j_m(\chi_m^{(g)} r)}{j_m(\chi_m^{(g)} r_0)} + \left(f^4_{kmn}(\chi_m^{(g)})^3 + f^6_{kmn}(\chi_k^{(l)})^2 \chi_m^{(g)} \right) b_k(S_k^{(l)}) b_m(S_m^{(g)}) \frac{1}{r^2} \frac{j_k(\chi_k^{(l)} r)}{j_k(\chi_k^{(l)} r_0)} \frac{j_{m+1}(\chi_m^{(g)} r)}{j_m(\chi_m^{(g)} r_0)}.$$

При начальном возбуждении хотя бы одной моды во втором порядке малости вследствие условия постоянства объема капли будет возбуждаться нулевая мода. Возбуждение первой моды во втором порядке малости будет иметь место, только тогда, когда в первом порядке малости будут возбуждаться две соседние моды с номерами, отличающимися на единицу [5,6]. Амплитуды более высоких мод ($n \geq 2$), определяемые выражением (15), пропорциональны коэффициентам K_{kmn}, α_{kmn}, Γ_{kmn}, Γ_{mkn}, Λ_{kmn}, Λ_{mkn}, первые части из которых пропорциональны коэффициентам Клебша–Гордана

$$C^{n0}_{k0m0}, C^{k0}_{n0m0}, C^{m0}_{n0k0}; \quad k, m \in \Omega; \quad n \geq 2, \qquad (16)$$

а последние два представлются в виде суммы двух слагаемых, первое из которых — это суммы вида

$$\sum_{j=1}^{[m/2]} \alpha_{n,k,m-2j}, \quad \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_{n,m,k-2j}; \quad k, m \in \Omega; \quad n \geq 2, \quad (17)$$

а второе пропорционально коэффициентам C^{k0}_{n0m0}, C^{m0}_{n0k0}. Коэффициенты же (16) отличны от нуля только при условиях, когда сумма $k + m + n$ — четное число и выполнено соотношение треугольника $|k - m| \leq n \leq k + m$. Коэффициенты

$$\alpha_{n,k,m-2j}, \quad j = 1, 2, \ldots, [m/2];$$

$$\alpha_{n,m,k-2j}, \quad j = 1, 2, \ldots, [k/2]; \quad k, m \in \Omega \qquad (18)$$

будут отличны от нуля соответственно при условиях $\min\{|k - m + 2j|\} \leq n \leq k + m - 2$, $j = 1, 2, \ldots, [m/2]$ и $\min\{|m - k + 2j|\} \leq n \leq m + k - 2$, $j = 1, 2, \ldots, [k/2]$. Так, если изначально возбуждается одна мода с номером n_1, т. е. $\Omega = \{n_1\}$, тогда коэффициенты (16) будут отличны от нуля при четных значениях n, удовлетворяющих условию $2 \leq n \leq 2n_1$, а коэффициенты (18) — при $2 \leq n \leq 2n_1 - 2$. Следовательно, в этом случае во втором порядке малости будут возбуждаться нулевая мода и четные моды с номерами $2 \leq n \leq 2n_1$. Если же изначально будут возбуждаться две моды с номерами n_1 и n_2, т. е. $\Omega = \{n_1, n_2\}$, тогда, если n_1 и n_2 одновременно четные или нечетные, из коэффициентов (16) и (18) будут отличны от нуля только те, для которых n четно и удовлетворяет условиям $2 \leq n \leq \max\{2n_1, 2n_2\}$ и $2 \leq n \leq \max\{2n_1, 2n_2\} - 2$. Если одно из чисел n_1, n_2 будет четным, а другое нечетным, то среди коэффициентов (16) отличными от нуля будут те, для которых n четно и удовлетворяет условию $2 \leq n \leq \max\{2n_1, 2n_2\}$ либо n нечетное, такое что $|n_1 - n_2| \leq n \leq n_1 + n_2$. Из коэффициентов (18) отличными от нуля будут коэффициенты с четным n, удовлетворяющим условию $1 \leq n \leq \max\{2n_1, 2n_2\} - 2$, и нечетным n, удовлетворяющим условию $3 \leq n \leq n_1 + n_2 - 2$. Отметим, что последнее условие при нечетных n сформулировано для выражений (18). В действительности для того чтобы моды с нечетными номерами $3 \leq n \leq n_1 + n_2 - 2$ присутствовали в спектре второго порядка, необходимо, чтобы были отличными от нуля коэффициенты f_{kmn}^{lg} в (10). Перебирая различные числовые значения n_1 и n_2 в интервале от 2 до 20, одно из которых четно, а другое нечетно, можно сделать вывод, что для $3 \le n < |n_1 - n_2|$ коэффициенты (17) всегда равны нулю, поскольку во всех случаях суммы (17) имеют взаимно уничтожающиеся слагаемые.

Таким образом, спектр мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости, для капли вязкой жидкости совпадает с таковым для капли идеальной жидкости [7–9].

6. Из выражения (15) видно, что решение задачи о капиллярных колебаниях вязкой несжимаемой жидкости имеет резонансный характер: некоторые из компонент аналитического выражения для образующей содержат знаменатели, становящиеся при определенных условиях весьма малыми. В частности, из (15) видно, что для нелинейно взаимодействующих мод может иметь место комбинационный трехмодовый резонанс при $\operatorname{Re} S_n^{(j)} \ll \operatorname{Im} S_n^{(j)}$, когда обращается в нуль мнимая часть стоящей в знаменателе разности безразмерных (при $\rho = 1$, $r_0 = 1$, $\sigma = 1$) частот $\operatorname{Im}(S_n^{(j)} - S_k^{(l)} - S_m^{(g)}) = 0$, где $S_n^{(j)}$ — уровень уравнения $D_n(S_n^{(j)}) = 0$. Напомним, что для идеальной жидкости условия резонанса сводятся к обращению в нуль разности частот (являющихся вещественными) взаимодействующих мод.

Уравнение $D_n(S_n^{(j)}) = 0$ имеет бесконечно много корней, среди которых два корня при докритическом в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду значении W являются комплексно-сопряженными: $S_n^{(1)} = -\delta_n + i\varpi_n$, $S_n^{(2)} = -\delta_n - \varpi_n$, где $\delta_n = -\operatorname{Re}(S_n^{(1)}) = -\operatorname{Re}(S_n^{(2)})$ — декремент затухания, $\varpi_n = \operatorname{Im}(S_n^{(1)}) = -\operatorname{Im}(S_n^{(2)})$ — частота колебаний. Остальные корни уравнения $D_n(S_n^{(j)}) = 0$ являются действительными отрицательными. При закритическом значении W все корни являются действительными и среди них по крайней мере один больше нуля. Следовательно, при докритическом значении W может иметь место резонанс, если $\varpi_n = \varpi_k + \varpi_m$. В условиях резонанса ряд (15) в знаменателе будет содержать выражения вида $S_n^{(1)} - S_k^{(1)} - S_m^{(1)} = S_n^{(2)} - S_k^{(2)} - S_m^{(2)} = -\delta_n + \delta_k + \delta_m$, численное значение которых будет зависеть от величины вязкости жидкости и будет стремиться к нулю при $\nu \to 0$.

Остановимся более детально на двух вырожденных нелинейных резонансах между 4- и 6-й модами и между 5- и 8-й модами. Вырожденные резонансы реализуются, когда в начальный момент времени возбуждается только одна мода, например с номером k. При этом резонанс имеет место при выполнении равенства

$$\varpi_n = 2\varpi_k. \tag{19}$$

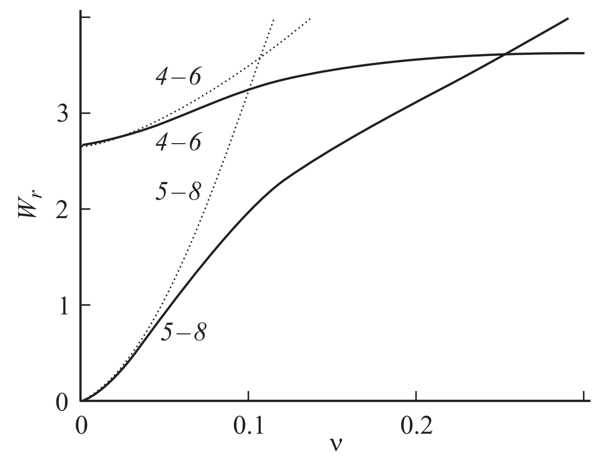

Рис. 2. Зависимости резонансных значений параметра W_r от безразмерной вязкости жидкости ν для двух вырожденных резонансов: *4–6* — резонанс между 4-й и 6-й модами, *5–8* — резонанс между 5-й и 8-й модами. Сплошная кривая — точное решение, пунктир — рассчитанное по выражению (15).

Из условия (19) можно найти зависимость между резонансным значением W_r и вязкостью жидкости капли ν (рис. 2). Видно, что увеличение вязкости жидкости приводит к увеличению резонансного значения параметра Рэлея W_r по крайней мере для резонансов.

a) Для случая малой вязкости жидкости этот вывод можно аргументировать приближенными расчетами, когда справедливо соотношение [4]

$$j_n(\chi) = \frac{\exp(\chi)}{2\chi}\left(1 - \frac{n(n+1)}{2\chi} + \frac{n(n^2-1)(n+2)}{8\chi^2} + O\left(\frac{1}{\chi^3}\right)\right); \quad \chi \to \infty,$$

используя которое, найдем приближенное выражение для первого корня уравнения $D_n(S_n^{(j)}) = 0$ в виде $S_n^{(1)} = -\delta_n + i\varpi_n$, где декремент затухания δ_n и частота ϖ_n имеют вид

$$\delta_n = (n-1)(2n+1)\frac{\nu}{r_0^2} - \sqrt{2}\,(n-1)^2(n+1)\frac{\nu^{3/2}}{r_0^3\sqrt{\omega_n}} + o(\nu^2); \tag{20}$$

$$\varpi_n = \omega_n - \sqrt{2}\,(n-1)^2(n+1)\frac{\nu^{3/2}}{r_0^3\sqrt{\omega_n}} - (n-1)^2(4n+5)\frac{\nu^2}{2r_0^4\omega_n} + o(\nu^2). \tag{21}$$

Подставляя выражение (21) в (19), нетрудно найти зависимость резонасного значения параметра W_r от

Минимальные величины индексов суммирования в (14), обеспечивающие удовлетворительную аппроксимацию ряда конечным числом его первых слагаемых при $n = k = m = 2$ и различных значениях безразмерной (при $\rho = 1,\ r_0 = 1,\ \sigma = 1$) вязкости жидкости ν и параметра W

ν	$W = 0$	$W = 2$	$W = 3$	$W = 3.5$
0.01	22	20	15	10
0.02	16	12	9	6
0.03	10	8	7	5
0.05	8	6	5	4
0.07	6	5	4	3
0.1	4	4	3	3
0.2	3	3	3	3
0.5	3	3	3	2
1.5	2	2	2	2
2.0	2	1	1	1

вязкости жидкости

$$W_r = W_r^{(0)} + \frac{8\sqrt{2}(k-1)kn(k-n)(n-1)\Big(2(k-1)^2(k+1)\sqrt{\omega_n^{(0)}} - (n-1)^2(n+1)\sqrt{\omega_k^{(0)}}\Big)}{r_0^3\sqrt{\omega_n^{(0)}}\sqrt{\omega_k^{(0)}}\Big(4k(k-1)-n(n-1)\Big)\Big(8(k-1)k\omega_k^{(0)} - (n-1)n\omega_n^{(0)}\Big)}\,\nu^{3/2} - \frac{4k\big(k(4k-3)-6\big) - n\big(n(4n-3)-6\big)+15}{4(k-1)k-(n-1)n}\,\frac{\rho\nu^2}{r_0\sigma}, \tag{22}$$

где $W_r^{(0)}$ и $\omega_n^{(0)}$ — резонанстное значение параметра W и частота капиллярных колебаний, определенные для идеальной жидкости, которые имеют вид

$$W_r^{(0)} = \frac{4k(k-1)(k+2) - n(n-1)(n+2)}{4k(k-1) - n(n-1)};$$

$$\omega_n^{(0)} = \sqrt{\sigma n(n-1)(n+2-W_r^{(0)})/(\rho r_0^3)}.$$

Подставляя выражение (22) в (20) и (21), нетрудно найти приближенные выражения для резонансных значений декремента затухания и частоты осцилляций

$$\delta_n = (n-1)(2n+1)\,\frac{\nu}{r_0^2} - \sqrt{2}\,(n-1)^2(n+1)\,\frac{\nu^{3/2}}{r_0^3\sqrt{\omega_n^{(0)}}};$$

$$\varpi_n = \omega_n^{(0)} - \frac{2\sqrt{2}(k-1)(n-1)\big(n(k^2-1)(\omega_n^{(0)})^{3/2} - 4k(n^2-1)(\omega_k^{(0)})^{3/2}\big)}{\big(n(n-1)\omega_n^{(0)} - 8k(k-1)\omega_k^{(0)}\big)\sqrt{\omega_k^{(0)}}\sqrt{\omega_n^{(0)}}} \times \frac{\nu^{3/2}}{r_0^3} - \left(\frac{(n-1)^2(4n+5)}{2\omega_n^{(0)}r_0^4} + \frac{4k\big(k(4k-3)-6\big) - n\big(n(4n-3)-6\big)+15}{8(k-1)k(k-n)}\,\frac{\rho\omega_n^{(0)}}{\sigma r_0}\right)\nu^2. \tag{23}$$

Выражения (20)–(23) хорошо описывают зависимости резонансных значений физических параметров от вязкости только при малых ее значениях, как это видно из рис. 2 и 3. В условиях резонанса, разности комплексных частот $S_n^{(1)} - 2S_k^{(1)} = S_n^{(2)} - 2S_k^{(2)} = -\delta_n + 2\delta_k$ при $\nu \neq 0$ всегда остаются конечными, что указывает на конечность амплитуд резонансных мод (рис. 4 и 5).

Вязкость жидкости влияет не только на величины резонансных частот и резонансных значений параметра Рэлея, но и на условия сходимости ряда (14). Так, при увеличении вязкости жидкости капли минимальное число корней дисперсионного уравнения, которое необходимо учесть для удовлетворительной сходимости ряда (14) (минимальное количество первых членов ряда, которыми можно заменить бесконечный ряд (14), чтобы разница между точным и приближенным решением укладывалась в толщину линий на приведенных рисунках), значительно уменьшается, что хорошо видно из таблицы. Этот факт делает актуальным поиск более

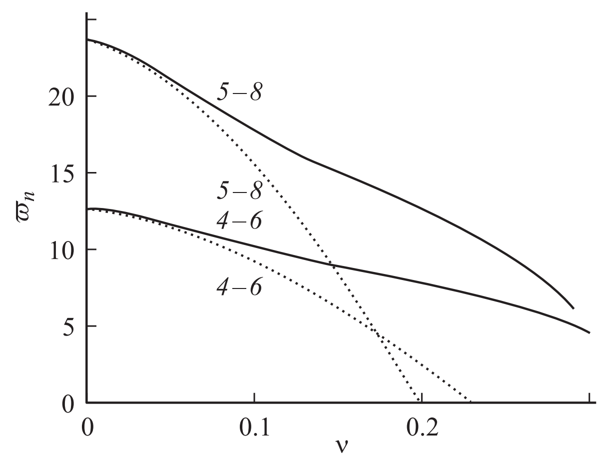

Рис. 3. Зависимость безразмерной резонансной частоты ϖ_n от безразмерной вязкости жидкости ν. Сплошная кривая — точное решение, пунктир — рассчитанное по выражению (17).

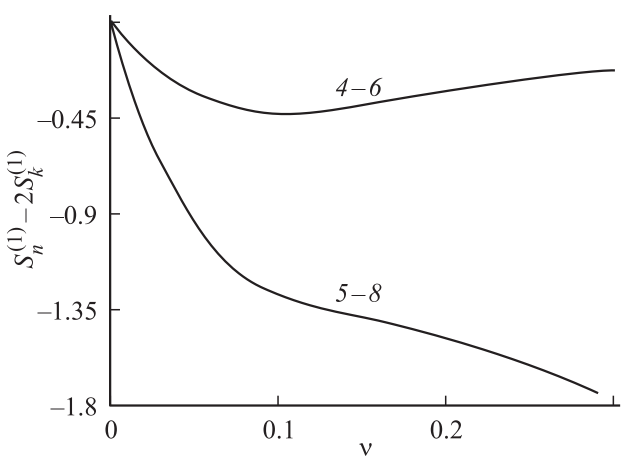

Рис. 4. Зависимости резонансного значения разности безразмерных частот $S_n^{(1)} - 2S_k^{(1)}$ от безразмерной вязкости ν.

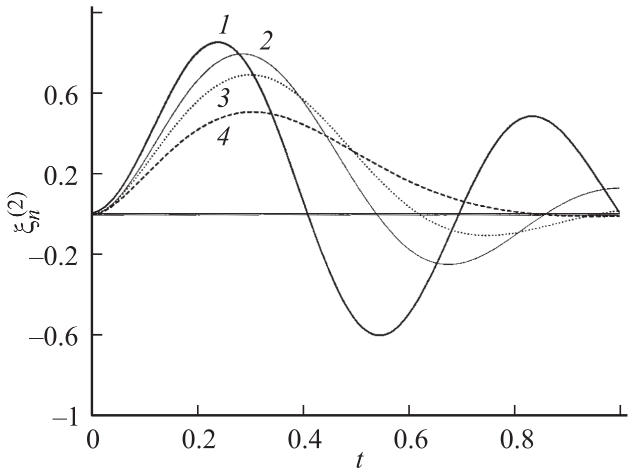

Рис. 5. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_n^{(2)}$ от безразмерного времени t, рассчитанные по выражению (14), при различных значениях безразмерной вязкости ν в условиях разонанса между 4-й и 6-й модами. $\nu = 0.05$ (*1*), 0.1 (*2*), 0.15 (*3*), 0.25 (*4*).

компактного выражения для $\xi_n^{(2)}(t)$ при умеренной и большой вязкостях, т. е. при условиях, когда в выражении (14) можно ограничиться одним или двумя в зависимости от величины ν первыми корнями дисперсионного уравнения (первыми двумя слагаемыми; см., например, [1]).

Заключение

Учет реальной вязкости жидкости заряженной капли при рассмотрении задачи о нелинейных осцилляциях ее поверхности не приводит к расширению спектра мод, формирующих поверхность капли, по сравнению со случаем идеальной жидкости, но вызывает сдвиг резонансных значений электрического заряда на капле в сторону больших величин и ограничивает амплидуты резонансных мод в положениях точных резонансов.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ МК-2946-2004-1) и гранта РФФИ (№ 03-01-00760).

Список литературы

[1] *Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 1. С. 22–31.
[2] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И.* Препринт ИМИ РАН № 31. Ярославль, 2001. 87 с.
[3] *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
[4] *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
[5] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
[6] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.
[7] *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
[8] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН МЖГ 2001. № 3. С. 173–184.
[9] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.