01;09

Усовершенствование метода крупных частиц, применяемого при численном решении задач сверхвысокочастотной электроники

© А.М. Долов, С.П. Кузнецов

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН,
410019 Саратов, Россия
e-mail: kuznetsov@sgu.ru

(Поступило в Редакцию 21 сентября 2004 г.)

Предлагается идея усовершенствования метода крупных частиц, применяемого при численном моделировании (в одномерном приближении) процессов в электронных приборах, таких как лампа бегущей волны. При фиксированном количестве крупных частиц объем вычислений практически не меняется, а точность достигаемая в режимах сильной нелинейности, существенно повышается.

При численном моделировании процессов в электронных приборах СВЧ, таких как лампа бегущей волны (ЛБВ), лампа обратной волны (ЛОВ), гиротроны и др., широко применяется подход, в рамках которого электронный поток заменяют совокупностью „крупных частиц“, число которых относительно невелико по сравнению с количеством электронов в реальном потоке. В простейшем виде этот метод появляется уже в первых работах Нордсика и Вайнштейна, посвященных численному решению уравнений одномерной нелинейной теории ЛБВ [1–3]. В безразмерной форме без учета пространственного заряда и потерь энергии в замедляющей системе эти уравнения имеют вид [4,5]

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} = -\operatorname{Re}\operatorname{F}e^{i\theta}, \quad \theta\Big|_{\xi=0} = \theta_0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\xi} + ibF = J, \quad F\Big|_{\xi=0} = F_0, \qquad (2)$$

$$J = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta_0. \qquad (3)$$

Первое соотношение — это уравнение движения электронов, в котором θ обозначает фазу частицы относительно волны, F — нормированную комплексную амплитуду волны, ξ — безразмерную координату. Второе соотношение — уравнение возбуждения волны, в котором параметр b характеризует рассинхронизм волны и электронного пучка, а в правой части фигурирует нормированная комплексная амплитуда первой гармоники высокочастотного тока J. Эти уравнения дополнены начальными условиями для частиц и поля на входе в пространство взаимодействия. В выражении для гармоники тока через величины θ, относящееся к частицам пучка, интегрирование ведется по начальной фазе частиц θ_0. Более подробное обсуждение безразмерных величин и их связь с размерными можно найти, например, в [4].

Содержание метода крупных частиц сводится в данном случае к тому, что вместо непрерывного распределения электронов по начальной фазе рассматривается набор из конечного числа частиц K, которые на входе в пространство взаимодействия имеют фазы $\theta_k^0 = 2\pi k/K$. При этом вычисление интеграла (3), которым выражается комплексная амплитуда первой гармоники тока сгруппированного пучка, заменяется вычислением суммы

$$J = -\frac{2}{K}\sum_{k=0}^{K-1} e^{i\theta_k}. \qquad (4)$$

Формально вычисление интеграла (3) по формуле (4) отвечает методу прямоугольников, который в курсах математического анализа обсуждается как простейший метод численного интегрирования и обычно не рекомендуется к использованию из-за большой вычислительной погрешности. Однако в данном случае, когда интегрирование проводится для периодической функции на интервале, точно равном периоду, погрешность оказывается относительно малой и не отличается от той, какую дает казалось бы усовершенствованный метод трапеций, основанный на линейной интерполяции подынтегральной функции между равноотстоящими точками на оси начальных фаз. Фактически метод вычисления интеграла по формуле (4) начинает плохо работать в области сильной нелинейности, когда относительное смещение соседних крупных частиц становится порядка 1. Формально говоря, при этом следует уменьшать шаг интегрирования по начальной фазе, т. е. увеличивать число частиц, причем все в большей и большей степени по мере роста нелинейности. На практике, однако, это обстоятельство часто просто игнорируют, поскольку получаемые в такой ситуации результаты все же не становятся полностью неприемлемыми. В самом деле существенную погрешность с точки зрения вклада в гармонику тока вносит относительно малое число частиц (скажем, порядка трех), и она остается на уровне $1/K$. Тем не менее при рассмотрении тонких вопросов, таких как анализ типа динамического режима при численном решении нестационарных задач, устойчивости стационарных режимов и др. указанные погрешности могут стать принципиальными, что ведет к необходимости радикального увеличения числа частиц, что, впрочем, неэффективно в силу закона медленного убывания погрешности $1/K$.

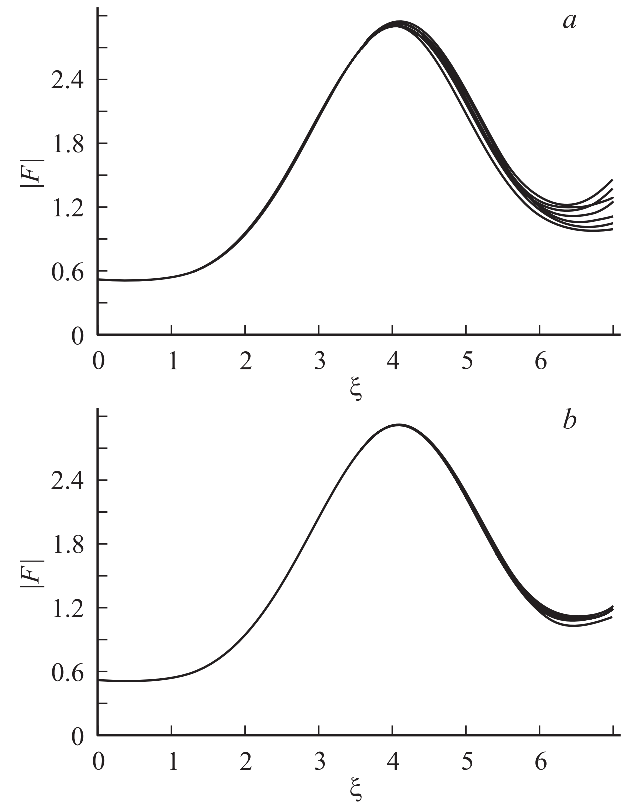

Рис. 1. Распределение амплитуды поля волны по длине системы при разных значениях начальной фазы входного сигнала. Обычный метод крупных частиц при $K = 20$ (a), 60 (b).

Идея усовершенствования метода, предлагаемая нами, состоит в том, чтобы отказаться от стандартного подхода к численному выполнению интегрирования и использовать линейную интерполяцию выражения, стоящего в показателе экспоненты, а не всей подынтегральной функции. На физическом языке это означает следующее. Вместо того чтобы считать заряд сосредоточенным в местах локализации частиц, мы полагаем его равномерно распределенным между любыми двумя частицами, фазовые координаты которых отслеживаются в процессе выполнения вычислений. На каждом участке θ_0 от $2\pi k/K$ до $2\pi(k+1)/K$ интеграл от экспоненты с показателем, линейно зависящим от аргумента, вычисляется аналитически. В итоге задача приводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2\theta_k}{\partial\xi^2} = -\mathrm{Re}\left(F\exp(i\theta_k)\right), \quad \theta_k\big|_{\xi=0} = \frac{2\pi k}{K}, \quad \frac{\partial\theta_k}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\xi} + ibF = J, \quad F\big|_{\xi=0} = F_0, \tag{6}$$

$$J = -\frac{2}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\frac{\sin\left((\theta_k-\theta_{k+1})/2\right)}{(\theta_k-\theta_{k+1})/2}\exp\left(i(\theta_k+\theta_{k+1})/2\right), \tag{7}$$

причем при вычислении суммы следует принять во внимание, что в соответствии с уравнениями движения, как легко видеть, $\theta_K \equiv \theta_0 + 2\pi$.

Представляется проблематичным дать формальную математическую оценку погрешности схемы, так как она определяется характером зависимости фигурирующей в уравнениях функции $\theta(\theta_0)$, которая в нелинейном режиме сама определяется в ходе вычислений. Поэтому для демонстрации возросшей эффективности метода обратимся к численному эксперименту.

На рис. 1 и 2 представлены результаты решения уравнений одномерной нелинейной теории ЛБВ. Это графики зависимости безразмерной амплитуды поля волны $|F|$ от безразмерной координаты ξ, причем рис. 1 получен с использованием традиционного метода крупных частиц, а рис. 2 — с помощью предлагаемой нами модификации. Набор кривых на каждом графике отвечает разным значениям фазы входного сигнала $F_0 = A_0 e^{i\varphi}$ с фиксированным модулем $A_0 = 0.5$ и аргументом φ, выбираемым в пределах от 0 до $2\pi/K$. Число частиц K взято равным 20 на диаграммах (a) и 60 на диаграммах (b).

В отсутствие дискретизации (см. уравнения (1)–(3), в которых вместо суммы фигурирует интеграл) зависимости от начальной фазы быть вообще не должно, что можно показать аналитически. В то же время при численном решении задачи наблюдаемый разброс в зависимости от фазы дает представление о погрешности метода, обусловленной дискретизацией пучка. При уровне

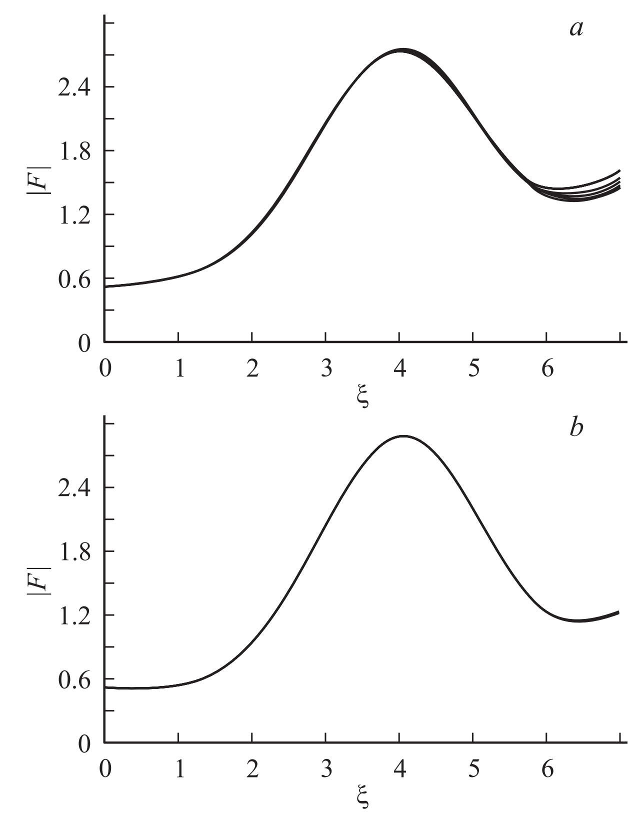

Рис. 2. То же, что и на рис. 1. Усовершенствованный метод при $K = 20$ (a), 60 (b).

нелинейных эффектов, отвечающих первому минимуму амплитуды поля, погрешность традиционного метода достаточно велика, хотя и уменьшается с увеличением числа крупных частиц. Модифицированный метод уже при $K = 20$ дает результаты, примерно соответствующие тем, которые в традиционной схеме получаются при $K = 60$.

Если бы речь шла только о решении уравнений элементарной нелинейной теории ЛБВ (1)–(3), то многократное увеличение числа частиц, обеспечивающее достижение достаточно высокой точности, не представляло бы проблемы при современном уровне компьютерной техники. Однако во многих случаях, например при решении нестационарных задач электроники СВЧ [6–8], в особенности с учетом пространственного заряда, указанная в данной заметке модификация метода крупных частиц может оказаться полезной. Особенно это существенно для анализа устройств СВЧ электроники методами нелинейной динамики, когда в рамках численных расчетов требуется проделать достаточно полный анализ типов колебательных режимов при переборе параметров, бифуркационный анализ, исследование устойчивости стационарных режимов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 03-02-16192).

Список литературы

[1] *Nordsieck A.* // Proc. IRE. 1953. Vol. 41. P. 630–637.
[2] *Вайнштейн Л.А.* // РиЭ. 1957. Т. 2. № 7. С. 883–894.
[3] *Вайнштейн Л.А.* // РиЭ. 1957. Т. 2. № 8. С. 1027–1047.
[4] *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973. 400 с.
[5] *Кац А.М., Ильина Е.М., Манькин И.А.* Нелинейные явления в СВЧ приборах типа О с длительным взаимодействием. М.: Сов. радио, 1975. 296 с.
[6] *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н.* // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 7. С. 1037–1052.
[7] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 12. С. 1575–1583.
[8] *Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Нусинович Г.С.* // РиЭ. 1987. Т. 32. № 5. С. 1031–1039.