Журнал технической физики, 2005, том 75, вып. 6

01;05

Электрическое поле и распределение заряда на поверхности диэлектрика в вакууме

© В.К. Беляев

Национальный технический университет Украины „Киевский политехнический институт“,
03056 Киев, Украина
e-mail: bel_vk@ua.fm

(Поступило в Редакцию 3 августа 2004 г.)

Установившееся распределение свободного заряда на поверхности диэлектрика в вакууме, возникающее в сильном электрическом поле, может быть найдено решением краевой задачи для напряженности электростатического поля с условием заданного угла наклона вектора напряженности на границе раздела вакуум–диэлектрик. Получено общее решение поставленной краевой задачи для плоскопараллельного электрического поля в случае прямолинейных границ раздела. Рассмотрены закономерности формирования заряда и поля, вытекающие из полученного решения. Для ряда типичных частных случаев приведены решения для напряженности электрического поля и выражения плотности заряда в элементарных функциях. Получены выражения для степенного закона напряженности поля и для критического угла наклона электрода к поверхности диэлектрика, определяющие поведение напряженности и распределения заряда в области контакта вакуум–диэлектрик–электрод.

Введение

На поверхности диэлектрика в вакууме в сильном продольном электрическом поле возникает свободный электрический заряд. Указанное явление является одним из определяющих электрическую прочность вдоль поверхности вакуумной опорной изоляции [1,2]. Учет искажений поля, вызванных появившимся зарядом, необходим как при проектировании вакуумного оборудования, так и при интерпретации результатов экспериментальных исследований [3–5]. Появление свободного заряда связывают с вторично-эмиссионными процессами на поверхности диэлектрика, при прохождении вдоль нее лавин вторичных электронов. Лавины вторичных электронов рождаются в области контакта поверхности диэлектрика с отрицательным электродом, при достижении в этой области критической величины напряженности поля. Электроны, двигаясь вдоль диэлектрика в продольном электрическом поле, взаимодействуют с поверхностью диэлектрика и приводят к возникновению на ней положительного свободного заряда. Электрическое поле поверхностного заряда изменяет траектории электронов и энергию их взаимодействия с поверхностью, что в свою очередь приводит к изменению распределения заряда. Распределение заряда устойчиво стабилизируется, если средняя энергия взаимодействия электронов с поверхностью становится равной меньшему из двух возможных значений энергии (W_1), при которых коэффициент вторичной электронной эмиссии поверхности диэлектрика равен единице. Условие стабильности величины заряда получено при анализе траектории движения усредненного электрона с учетом косинусного распределения угла вылета вторичных электронов с поверхности диэлектрика [6]. Это условие можно записать как условие для составляющих электрического поля на поверхности

$$E_n/E_\tau = M = \mathrm{const},$$

$$|M| = \sqrt{2W_0/(W_1 - W_0)} = \mathrm{tg}(\pi \cdot \beta_\sigma), \qquad (1)$$

где E_n и E_τ — нормальная и тангенциальная составляющие вектора напряженности электрического поля на поверхности диэлектрика; M — постоянная, абсолютное значение которой определяется вторично-эмиссионными свойствами поверхности диэлектрика; W_0 — энергия выхода электронов с поверхности диэлектрика; β_σ — меньшее значение угла между направлением вектора напряженности и поверхностью диэлектрика, выраженное в долях π (рис. 1).

В соответствии с указанным условием свободный заряд на поверхности диэлектрика распределяется таким образом, что во всех точках поверхности поддерживается заданное значение отношения нормальной и тангенциальной составляющих вектора напряженности поля, т. е. задан угол наклона вектора напряженности.

Приведенное условие стабильности (1) можно использовать для расчета электрического поля в системе и установившегося распределения заряда на поверхности диэлектрика. Возникающая задача расчета электростатического поля по условию заданного угла наклона вектора напряженности отличается от обычно решаемых краевых задач электрофизики 1-, 2-, 3-го рода и требует иного подхода при решении.

В работе получено аналитическое решение сформулированной задачи для плоскопараллельного электрического поля напряженностью $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y$ в случае прямолинейных границ раздела диэлектриков и электродов (рис. 1). Две диэлектрические среды (одна из них — ваккум) занимают пространство между электродами таким образом, что граница раздела диэлектриков

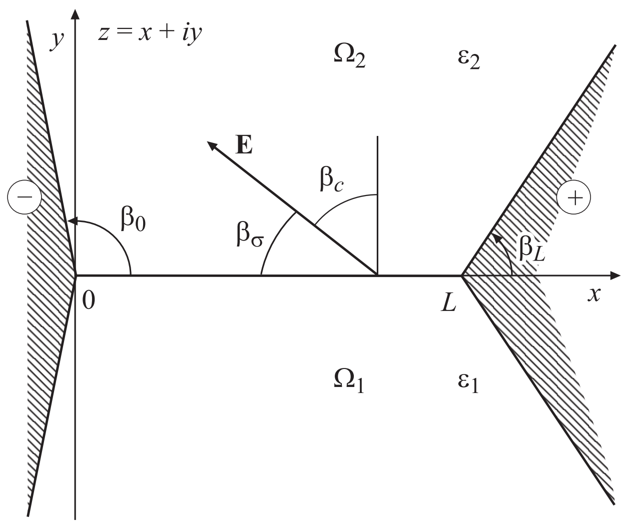

Рис. 1. Модель к расчету плоскопараллельного поля с условием стабильности заряда (*1*) на границе раздела диэлектриков.

(ГРД) длиной L делит междуэлектродное пространство на две области Ω_1 и Ω_2. К электродам приложено постоянное напряжение U, создающее в промежутке электрическое поле со средней напряженностью вдоль ГРД $E_0 = U/L$. Считаем, что условие (1) выполняется со стороны области Ω_2 (вакуум). Сначала рассмотрим решение для случая известного распределения заряда на ГРД, которое используется при анализе решения основной задачи.

1. На поверхности диэлектрика распределен заряд заданной конфигурации

В случаях, когда на поверхности диэлектрика распределен заряд с известной фиксированной конфигурацией, расчет электрического поля сводится к решению уравнений электростатики

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 0$$

с обычными условиями согласования на границе раздела однородных сред, учитывающими наличие свободного заряда с известной плотностью σ,

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma, \qquad E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

где E_{kn} и $E_{k\tau}$ $(k = 1, 2)$ — нормальная и тангенциальная составляющие вектора напряженности электрического поля в области Ω_k, ε_k — диэлектрическая проницаемость среды области Ω_k.

Уравнения электростатики позволяют ввести в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ кусочно-аналитическую функцию комплексной напряженности $E_k(z) = E_{kx} - iE_{ky}$ $(k = 1, 2)$. Функция E_2 аналитична в верхней области, а E_1 — в нижней области. Для введенной функции после отображения в каноническую область строится краевая задача, решение которой можно получить, используя методы теории аналитических функций [7]. В случае электродов произвольной формы (не обязательно прямолинейных), но симметричных относительно ГРД решение уравнений поля с учетом условий на границах будет иметь вид

$$E_2(z) = \frac{-f'(z)}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{1-f^2(z)}} \times \int_0^L \frac{\sigma(x)\sqrt{1-f^2(x)}}{f(x)-f(z)}\,dx - E_0\,\frac{L\cdot f'(z)}{\pi\sqrt{1-f^2(z)}},$$

$$E_1(z) = \overline{E_2(\overline{z})}. \tag{2}$$

Здесь функция $f(z)$ конформно отображает верхнюю область Ω_2, в которой разыскивается поле, на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ таким образом, что точка $z = 0$ переходит в точку $\zeta = -1$, а точка $z = L$ — в $\zeta = +1$; $f'(z)$ — производная функция отображения $f(z)$.

Первое слагаемое в выражении (2) обусловлено свободным зарядом на ГРД, а второе представляет собой решение однородной задачи $(\sigma(x) = 0)$ и полностью определяется геометрией рассматриваемой области.

В случае прямолинейных границ рассматриваемых областей (рис. 1)

$$E_k(z) = \frac{C\cdot(-1)^{k+1}\big(1+f(z)\big)^{\alpha_1}}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cdot L\big(1-f(z)\big)^{\alpha_3}} \times \int_0^L \frac{\sqrt{1-f^2(x)}\cdot\sigma(x)d(x)}{f(x)-f(z)} - E_0\,C\,\frac{\big(1+f(z)\big)^{\alpha_1}}{\big(1-f(z)\big)^{\alpha_3}},$$

$$g(\zeta) = \frac{L}{\pi\cdot C}\int_{-1}^{\zeta}(1+\zeta)^{\beta_0-1}\cdot(1-\zeta)^{-\beta_L}d\zeta,$$

$$C = \frac{2^{\beta_0-\beta_L}}{\pi}\,B(\beta_0, 1-\beta_L),$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \beta_0, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} - \beta_L, \tag{3}$$

где $g(\zeta)$ — функция отображения верхней полуплоскости на рассматриваемую область (обратная $f(z)$); β_0 и β_L — углы наклона к направлению вдоль поверхности диэлектрика электродов: отрицательного, проходящего через точку 0, и положительного, проходящего через точку L; $B(\ )$ — бета-функция.

Напряженность на границе раздела областей определяют, используя формулы Сохоцкого–Племеля [8,9]. В точке $(x_0, y = 0)$ на границе раздела диэлектриков (со стороны области Ω_2)

$$E_2(x_0, 0) = \frac{-C}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)L} \frac{\left(1 + f(x_0)\right)^{\alpha_1}}{\left(1 - f(x_0)\right)^{\alpha_3}} \times \int_0^L \frac{\sqrt{1 - f^2(x)}\,\sigma(x)d(x)}{f(x) - f(x_0)} - E_0 C \frac{\left(1 + f(x_0)\right)^{\alpha_1}}{\left(1 - f(x_0)\right)^{\alpha_3}} - \frac{i \cdot \sigma(x_0)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \qquad (4)$$

Первые два слагаемые определяют x-составляющую, а последнее — y-составляющую напряженности поля на поверхности диэлектрика. Выражение (4) показывает, что свободный заряд с плотностью σ на плоской границе раздела двух диэлектриков (граница симметричных областей) создает поле с нормальной составляющей напряженности, равной $E_n = E_y = \sigma/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Справедливость указанного соотношения строго показана в [7] и легко объясняется качественно: в соответствии с симметрией рассматриваемой задачи в отсутствие свободного заряда σ ГРД совпадает с силовой линией поля в межэлектродном пространстве. Нормальная составляющая напряженности поля на ГРД может создаваться только дополнительно внесенным свободным зарядом, распределенным по границе, на что собственно и указывает последнее соотношение.

Путем точного вычисления сингулярного интеграла, фигурирующего в решении (в канонической области интеграл типа Коши по границе -1, 1), можно получить выражения напряженности в явном виде. Для случая электродов, перпендикулярных ГРД ($\beta(z) = \beta_0 = \beta_L = \pi/2$), выражения напряженности поля для нескольких характерных форм распределения заряда $\sigma(x)$ (позволяют моделировать распределения практически любой формы) приведены в [7].

2. На поверхности диэлектрика выполняется условие стабильности заряда (1), конфигурация заряда неизвестна

Решение задачи о нахождении напряженности плоскопараллельного электрического поля по условию заданного наклона вектора напряженности получено путем сведения к краевой задаче Римана для кусочно-аналитической функции.

Рассматривая напряженность электрического поля в области с двумя диэлектриками, ограниченными наклонными электродами (рис. 1), и полагая, что на границе раздела диэлектриков со стороны области Ω_2 выполняется условие (1), получим следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{E_{2y}(z)}{E_{2x}(z)} = M = -\operatorname{tg}(\pi\beta_\sigma), \quad z \in \text{ГРД},\\ &E_{2y}(z) = -\operatorname{ctg}(\pi\beta_0)E_{2x}(z),\\ &\qquad z \in \text{отрицательному электроду},\\ &E_{2y}(z) = -\operatorname{ctg}(\pi\beta_L)E_{2x}(z),\\ &\qquad z \in \text{положительному электроду}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Приведенные условия (5) соответствуют однородной краевой задаче Гильберта [8,9] для аналитической функции $E_2(z) = E_{2x} - iE_{2y}$ в области Ω_2. В теории аналитических функций подобная задача носит также название краевой задачи о наклонной производной.

После отображения рассматриваемой области на верхнюю полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ (используем функцию отображения $f(z)$, обратную $g(\zeta)$) получим следующую задачу Гильберта для функции $F_2(\zeta) = F_{2\xi} + iF_{2\eta} = E_2\big(g(\zeta)\big)$:

$$\left.\begin{aligned} &F_{2\eta} = -MF_{2\xi} && |\xi| < 1, \quad \eta = 0,\\ &F_{2\eta} = \operatorname{ctg}(\pi\beta_0)F_{2\xi} && \xi < -1, \quad \eta = 0,\\ &F_{2\eta} = \operatorname{ctg}(\pi\beta_L)F_{2\xi} && \xi > 1, \quad \eta = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Задачу Римана [8,9] для функции $F(\zeta)$, соответствующую задаче Гильберта (6), получим, осуществив аналитическое продолжение функции на всю плоскость в соответствии с принципом симметрии (черта над функцией означает комплексное сопряжение),

$$F(\zeta) = \begin{cases} F_2(\zeta) & \text{при} \quad \operatorname{Im}(\zeta) > 0,\\ \overline{F_2(\bar{\zeta})} & \text{при} \quad \operatorname{Im}(\zeta) < 0. \end{cases}$$

Задача Римана

$$F^+(\xi) = G(\xi)\,F^-(\xi),$$

$$G(\xi) = \left\{\begin{aligned} &G_1 = \frac{\operatorname{tg}(\pi\beta_0) + i}{\operatorname{tg}(\pi\beta_0) - i}, && \xi < -1, \quad \eta = 0,\\ &G_2 = \frac{1 - iM}{1 + iM} = \frac{1 + \operatorname{tg}(\pi\beta_\sigma)}{1 - \operatorname{tg}(\pi\beta_\sigma)}, && \xi < 1, \quad \eta = 0,\\ &G_3 = \frac{\operatorname{tg}(\pi\beta_L) + i}{\operatorname{tg}(\pi\beta_L) - i}, && \xi > 1, \quad \eta = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Здесь $F^+(\xi)$ и $F^-(\xi)$ — предельные значения функций $F(\zeta)$ при подходе к границе соответственно слева и справа (по отношению к положительному направлению обхода), $G(\xi)$ — коэффициент краевой задачи Римана. Решение $F(\zeta)$ должно быть ограничено на бесконечности, причем $F(\zeta \to \infty) \neq 0$ при $\beta_0 = \beta_L$ и $F(\zeta \to \infty) = 0$ при $\beta_0 \neq \beta_L$ (рассматриваем $\beta_0 \geq \beta_L$).

Варианты поведения напряженности поля в характерных точках

Соотношение между углами	Характер поведения напряженности поля		
	$z=0$, отрицательный электрод	$z=L$, положительный электрод	$z\to\infty$
1) $\beta_0>\beta_L\geq\beta_c$	$\to\infty$	0	$\to 0$
2) $\beta_0>\beta_c>\beta_L$	$\to\infty$	$\to\infty$	$\to 0$
3) $\beta_c\geq\beta_0>\beta_L$	0	$\to\infty$	$\to 0$
4) $\beta=\beta_0=\beta_L\geq\beta_c$	$\to\infty$	0	Ограничена и $\neq 0$
5) $\beta=\beta_0=\beta_L<\beta_c$	0	$\to\infty$	Ограничена и $\neq 0$

Сформулированная задача является однородной краевой задачей Римана с разрывным коэффициентом и прямолинейной бесконечной границей, совпадающей с действительной осью 0ξ. Общее решение задачи находим, определяя каноническую функцию (индекс задачи равен 0) [9]. Коэффициенты в общем решении получаем, используя условие ограниченности решения на бесконечности и интегральное соотношение, которому должно отвечать решение задачи:

$$\int_0^L E_x(x)dx=-E_0L$$

или в канонической области

$$\int_{-1}^{1} F_\xi(\xi)g'(\xi)d\xi=-E_0L,$$

где $g'(\xi)$ — производная функция отображения $g(\xi)$.

Полученное таким образом решение задачи Римана (7) определяется выражением

$$F(\xi)=E_0C(-1)^{\beta_\sigma}\,\frac{(1+\xi)^{\alpha_{12}}}{(1-\xi)^{\alpha_{32}}},$$

$$\alpha_{12}=\alpha_1-\beta_\sigma,\quad \alpha_{32}=\alpha_3-\beta_\sigma.$$

Решение для напряженности поля в плоскости переменной z, в области Ω_2, со стороны которой выполняется условие стабильности (1)

$$E_2(z)=E_0C\cdot(-1)^{\beta_\sigma}\,\frac{\big(1+f(z)\big)^{(\frac{1}{2}-\beta_\sigma)-\beta_0}}{\big(1-f(z)\big)^{(\frac{1}{2}-\beta_\sigma)-\beta_L}},$$

$$(-1)^{\beta_\sigma}=\cos(\pi\cdot\beta_\sigma)+i\sin(\pi\cdot\beta_\sigma)=\frac{1-i\cdot M}{\sqrt{1+M^2}}.$$

Полученное решение справедливо и в случае несимметричных областей Ω_2 и Ω_1.

В случае симметрии относительно ГРД определяется также напряженность в смежной области (Ω_1): $E_1(z)=\overline{E_2(\overline{z})}$. Учитывая, что для областей, симметричных относительно ГРД, нормальная к поверхности ГРД составляющая напряженности поля (y-составляющая) создается только поверхностным зарядом $E_y=\sigma/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$, и сравнивая полученное выражение напряженности поля с (4), получим выражение распределения поверхностной плотности свободного заряда по диэлектрику, которое обеспечивает выполнение условия стабильности (1),

$$\sigma(x)=E_0C(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sin(\pi\cdot\beta_\sigma)\cdot\frac{\big(1+f(x)\big)^{(\frac{1}{2}-\beta_\sigma)-\beta_0}}{\big(1-f(x)\big)^{(\frac{1}{2}-\beta_\sigma)-\beta_L}}. \tag{8}$$

3. Анализ полученных выражений и основные закономерности

Как видно из условий краевой задачи (5) и полученных решений, напряженность поля вблизи поверхности диэлектрика, на которой обеспечивается поддержание условия стабильности (1), не зависит от диэлектрической проницаемости материала диэлектрика как со стороны вакуума (Ω_2), так и в диэлектрике (Ω_1). Напряженность определяется уровнем приложенного напряжения U (значением средней напряженности $E_0=U/L$), эмиссионными свойствами поверхности диэлектрика и геометрией конструкции.

Напряженность электрического поля в области контакта вакуум–диэлектрик–электрод может иметь интегрируемые особенности в точках $z=0$ и $z=L$ или быть ограниченной в этих точках в зависимости от соотношения угла β_σ и углов наклона электродов β_0,β_L. Критической величиной угла наклона электродов, при которой меняется характер поведения напряженности поля в точках контакта, является величина угла $\beta_c=1/2-\beta_\sigma$ (в долях π). Это значение соответствует величине угла наклона вектора напряженности поля на ГРД к положительному направлению нормали к границе.

В зависимости от соотношения между углами наклона электродов β_0,β_L и критическим углом β_c возможны варианты поведения напряженности поля, указанные в табл. (искомое решение должно быть ограничено в бесконечно удаленной точке).

Полученные решения позволяют определить характер изменения напряженности поля в области контакта вакуум–диэлектрик–электрод (асимптотики напряженности) при наличии на поверхности диэлектрика заряда, отвечающего условию стабильности. Полученные выражения в виде степенных зависимостей следующие: у отрицательного электрода ($z \to 0$)

$$E_2(d) = \mathrm{const} \cdot (d)^{\frac{\beta_c}{\beta_0} - 1} = \mathrm{const} \cdot (d)^{\left(-\frac{1-\beta_e}{2-\beta_e} - \frac{2\beta_\sigma}{2-\beta_e}\right)},$$

d — малая окрестность точки контакта ($d = z/L$), β_e — угол раскрытия электрода ($\beta_e = 2\beta_0$), напряженность поля неограниченно растет при $\beta_0 > \beta_c = 1/2 - \beta_\sigma$ (варианты 1, 2, 4 в табл.) или стремится к нулю при $\beta_0 \le \beta_c$ (варианты 3, 5 в табл.); у положительного электрода ($z \to L$)

$$E_2(d) = \mathrm{const} \cdot (d)^{\frac{1-\beta_c}{1-\beta_L} - 1} = \mathrm{const} \cdot (d)^{\left(-\frac{1-\beta_e}{2-\beta_e} + \frac{2\beta_\sigma}{2-\beta_e}\right)},$$

d — малая окрестность точки контакта ($d = 1 - z/L$), β_e — угол раскрытия электрода ($\beta_e = 2(\pi - \beta_L)$), напряженность поля неограниченно растет при $\beta_L < \beta_c = 1/2 - \beta_\sigma$ (варианты 1,4 в табл.) или стремится к нулю при $\beta_L \ge \beta_c$ (варианты 2, 3, 5 в таблице).

Константы в выражениях асимптотик определяются средней напряженностью поля E_0 и углами β_σ и β_0, β_L. Угол наклона электрода, у которого рассматривается напряженность поля, в большей степени влияет на величину константы, чем противоположный. Если противоположный электрод — острая кромка (угол раскрытия равен нулю), $\mathrm{const} = 2E_0(-1)^{\beta_\sigma}/\pi\beta_e$. По сравнению с системой без заряда на ГРД степенная зависимость напряженности поля в области контакта изменяется в соответствии с изменением показателя степени на величину $2\beta_\sigma/(2 - \beta_e)$.

Из полученных соотношений вытекает следующее: для того чтобы напряженность поля в области контакта вакуум–диэлектрик–отрицательный электрод при появлении установившегося распределения заряда не увеличивалась, угол между поверхностями электрода и диэлектрика (β_0) должен быть меньше критического $\beta_0 < \beta_c = 1/2 - \beta_\sigma$ (рис. 2).

Плотность заряда на поверхности в отличие от напряженности поля существенно зависит от диэлектрической проницаемости ε диэлектрика. Увеличение ε диэлектрика и значения M (характеризует эмиссионные свойства поверхности) приводит к росту плотности заряда. Форма распределения заряда от уровня напряжения (средней напряженности E_0) не зависит (рис. 3).

Следует отметить, что приведенная выше связь напряженности и плотности заряда на поверхности диэлектрика $E_n = \sigma/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ справедлива только для симметричной относительно поверхности диэлектрика (ГРД) картины поля. Встречающиеся в литературе попытки необоснованного ее распространения на другие случаи симметрии (например, осесимметричные системы, поверхность диэлектрика сложной формы) при расчете поля или нахождении распределения заряда приведут к некорректным результатам.

Как видно из рис. 3, распределения потенциала и плотности заряда на поверхности диэлектрика существенно

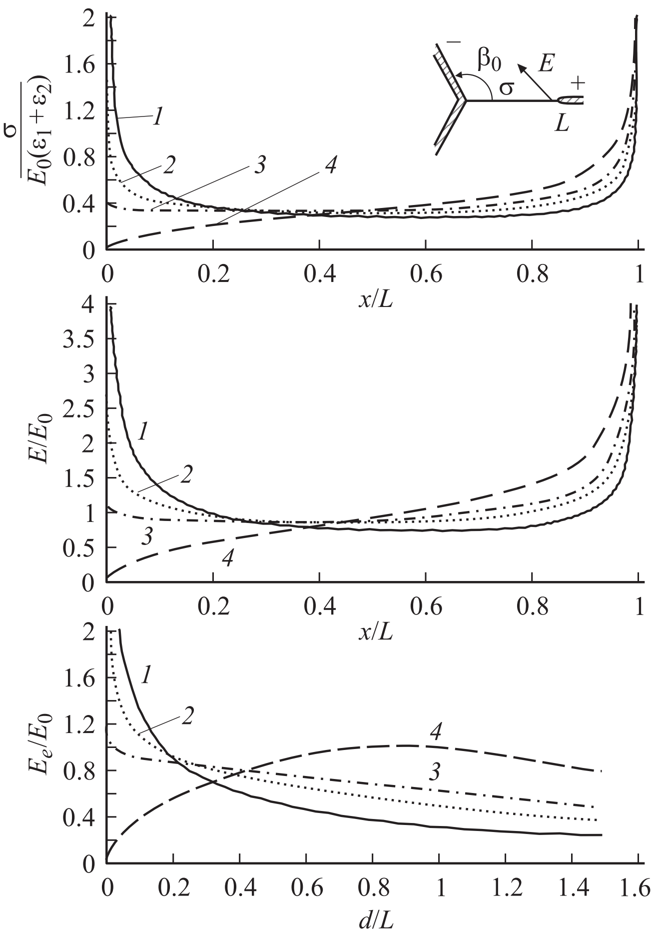

Рис. 2. Распределения напряженности E и плотности заряда σ по ГРД и напряженности по поверхности отрицательного электрода (E_e) при разных углах наклона последнего (β_0). Положительный электрод — ребро ($\beta_L = 0$). $M = -0.4$, $\beta_\sigma = 0.12$ (22°), $\beta_c = 0.38$ (68°); β_0: *1* — 3/4 (135°), *2* — 1/2 (90°), *3* — 0.4 (72°), *4* — 1/4 (45°). d — расстояние вдоль электрода от точки контакта с ГРД.

отличаются, что необходимо учитывать при интерпретации результатов зондовых измерений распределения заряда.

Поведение плотности заряда у точек контакта ГРД с электродом совпадает с поведением напряженности поля.

Суммарный заряд на поверхности Q, обеспечивающий выполнение условия (1) (получаем интегрированием (8)), пропорционален величине приложенного к промежутку напряжения U, а его плотность пропорциональна средней напряженности поля вдоль ГРД (E_0). Независимо от углов наклона электродов

$$Q = U(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,\mathrm{tg}(\pi \cdot \beta_\sigma) = -UM(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

$$Qs = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \sigma(x)dx = -E_0 M(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

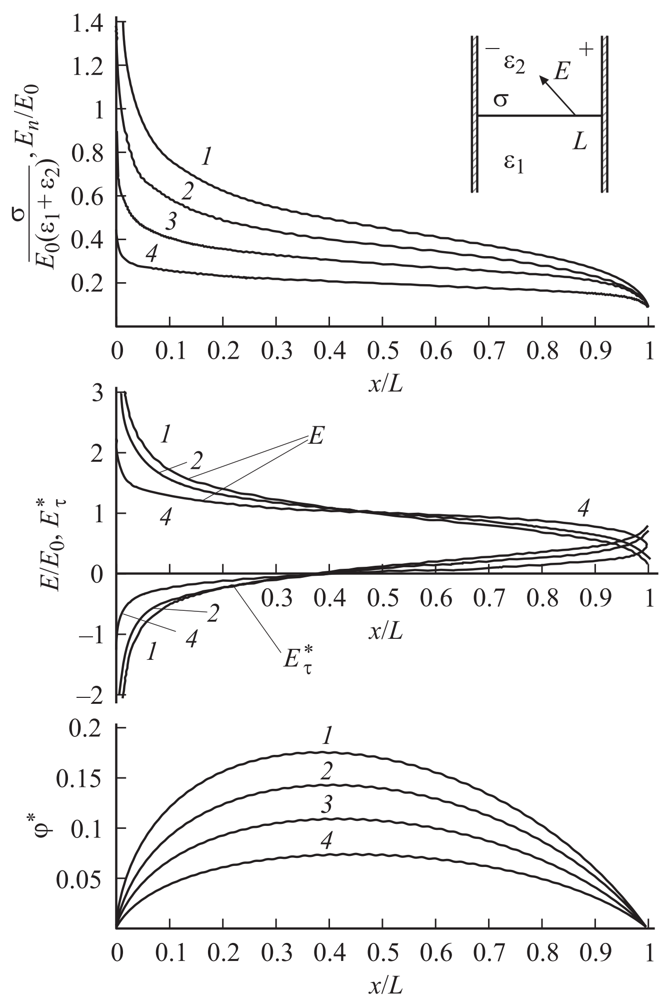

Рис. 3. Распределение плотности заряда σ, напряженности E, ее составляющих E_n и E_τ и потенциала φ поля на ГРД в случае $\beta_0 = \beta_L = 1/2$, при типичных для диэлектриков значениях постоянной M ($E_\tau^* = E_\tau/E_0 + 1$ и φ^* — обусловлены только зарядом, т. е. не включают внешнего поля напряженностью E_0). β_σ: *1* — 0.15 (27°), *2* — 0.12 (22°), *3* — 0.93 (17°), *4* — 0.63 (11°); M: *1* — −0.5, *2* — −0.4, *3* — −0.3, *4* — −0.2.

4. Некоторые частные случаи

Полученные формулы позволяют получить для типичных значений углов наклона электродов выражения напряженности поля и плотности заряда в элементарных функциях.

а) $\beta_0 = \beta_L = 1/2$. Напряженность поля имеет интегрируемую особенность в точке $z = 0$, а вдали от ГРД ограничена $E(z \to \infty) = -E_0$

$$E_2(z) = -E_0 \cdot (-1)^{\beta_\sigma} \cdot \left(\frac{1+\cos(\pi \cdot z/L)}{1-\cos(\pi \cdot z/L)}\right)^{\beta_\sigma},$$

$$\frac{\sigma(x)}{E_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \sin(\pi \cdot \beta_\sigma)\left(\frac{1+\cos(\pi \cdot z/L)}{1-\cos(\pi \cdot z/L)}\right)^{\beta_\sigma}.$$

б) $\beta_L = 0$. В точке контакта $z = L$ напряженность поля имеет интегрируемую особенность порядка $(1/2 - \beta_\sigma)$, а вдали от ГРД стремится к нулю

$$E_2(z) = -E_0 \frac{(-1)^{\beta_\sigma}}{\pi \cdot \beta_0} \frac{\left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{\frac{1}{2}-\beta_\sigma}{\beta_0}-1}}{\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{\beta_0}}\right)^{\frac{1}{2}-\beta_\sigma}},$$

$$\frac{\sigma(x)}{E_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \frac{\sin(\pi \cdot \beta_\sigma)}{\pi \cdot \beta_0} \frac{\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{\frac{1}{2}-\beta_\sigma}{\beta_0}-1}}{\left(1-\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{\beta_0}}\right)^{\frac{1}{2}-\beta_\sigma}}.$$

в) $\beta_0 = 1$. Напряженность поля имеет интегрируемую особенность порядка $(1/2 + \beta_\sigma)$ в точке $z = 0$. Вдали от ГРД стремится к нулю

$$E_2(z) = -E_0 \frac{(-1)^{\beta_\sigma}}{\pi(1-\beta_L)} \frac{\left(1-\frac{z}{L}\right)^{\frac{\frac{1}{2}+\beta_\sigma}{1-\beta_L}-1}}{\left(1-\left(1-\frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{1-\beta_L}}\right)^{\frac{1}{2}+\beta_\sigma}},$$

$$\frac{\sigma(x)}{E_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \frac{\sin(\pi \cdot \beta_\sigma)}{\pi(1-\beta_L)} \frac{\left(1-\frac{x}{L}\right)^{\frac{\frac{1}{2}+\beta_\sigma}{1-\beta_L}-1}}{\left(1-\left(1-\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{1-\beta_L}}\right)^{\frac{1}{2}+\beta_\sigma}}.$$

г) $\beta_0 = 1,\ \beta_L = 0$. Напряженность поля имеет интегрируемые особенности в обеих точках контакта $z = 0$ и $z = L$, а вдали от ГРД стремится к нулю

$$E_2(z) = -E_0 \frac{(-1)^{\beta_\sigma}}{\pi\left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{2}+\beta_\sigma}\left(1-\frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{2}-\beta_\sigma}},$$

$$\frac{\sigma(x)}{E_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \frac{\sin(\pi \cdot \beta_\sigma)}{\pi\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}+\beta_\sigma}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}-\beta_\sigma}}.$$

Распределения плотности заряда и напряженности поля, возникающие в рассмотренных ситуациях, показаны на рис. 2 и 3.

Заключение

По результатам работы можно сделать следующие общие замечания. Полученные выражения напряженности электрического поля верны как для симметричных, так и для несимметричных граничащих диэлектрических областей (вид смежной с вакуумом области Ω_1 неважен, так как решается краевая задача Гильберта, а не задача сопряжения). В то же время выражения распределений заряда верны только для симметричных относительно границы диэлектрик–вакуум областей, так как для их получения использовано соотношение $E_n = \sigma/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Последнее соотношение нельзя использовать в отсутствие указанной симметрии.

Рассмотренные закономерности поведения поля вблизи контакта вакуум–диэлектрик–электрод (в частности, выражение для значения критического угла β_c), учитывая предыдущие замечания и малый размер рассматриваемой области контакта, будут справедливы в самых разных ситуациях, встречающихся в практике экранирования электродами указанного контакта (например, в случаях неплоскопараллельных полей).

Примененный в работе подход к расчету поля по условию заданного наклона вектора напряженности поля на границе диэлектрика, показал свою эффективность в случае прямолинейных границ областей. Его можно использовать и при более сложных формах границ, а также для переменного угла наклона вектора напряженности на поверхности диэлектрика. В этом случае усложняются вид функции отображения и вид канонической функции в общем решении.

Список литературы

[1] *Бугаев С.П., Месяц Г.А.* // Импульсный разряд в диэлектриках. Новосибирск: Наука, 1985. С. 4–25.
[2] *Wetzer J.M.* // IEEE Trans. DEI. 1997. Vol. 4. P. 349–357.
[3] *Chalmers I.D., Lei J.H., Yang B.* et al. // IEEE Trans. DEI. 1995. Vol. 2. P. 225–230.
[4] *Yamamoto O., Hara T., Nakanishi I.* et al. // IEEE Trans. EI. 1993. Vol. 28. P. 707–712.
[5] *Yamamoto O., Fukuda M.* // Papers 13th Intern. Symposium on High Voltage Engineering. Netherlands, 2003.
[6] *Boersch H., Hamisch H., Ehrlich W.* // Z. Angew Physik. 1963. Bd 15. S. 518–525.
[7] *Беляев В.К.* // Техн. электродинамика. 1987. № 6. С. 40–44.
[8] *Гахов Ф.Д.* Краевый задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
[9] *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.