01;03

О решении кинетического уравнения в задаче вычисления потока тепла между концентрическими сферами

© П.С. Алешин, С.А. Савков

Орловский государственный университет,
302015 Орел, Россия

(Поступило в Редакцию 15 сентября 2003 г. В окончательной редакции 26 июля 2004 г.)

Рассмотрена задача о вычислении потока тепла в сферическом слое. Приведены результаты расчетов для модели Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) и больцмановского интеграла столкновений. Представлено общее (не зависящее от формы и способа решения кинетического уравнения) выражение зависимости потока тепла от коэффициента аккомодации энергии. Проведено сравнение с экспериментом и ранее полученными данными.

Изучение процесса теплопереноса остается одной из актуальных проблем кинетической теории газов. В частности, данные, полученные по измерению потока тепла от нагретого тела, используются для определения характера взаимодействия молекул газа с его поверхностью [1–3]. При этом большинство публикаций посвящено анализу теплообмена от одиночной сферы или между коаксиальными цилиндрами. Тогда как задача вычисления потока тепла между концентрическими сферами кроме как в рамках метода Лиза [4] вообще никем не исследовалась.

В данной работе используется вариант метода полупространственных моментов, аналогичный предложенному в [5]. Приведены результаты расчетов для БГК (Бхатнагара–Гросса–Крука) [6] и больцмановского интеграла столкновений в случае молекул, взаимодействующих как упругие твердые сферы. Методика вычисления всех необходимых моментов от последнего изложена в [7]. Представлены общие (не зависящие от формы и способа решения кинетического уравнения) выражения зависимости потока тепла от коэффициента аккомодации энергии. Проведено сравнение с экспериментом и ранее полученными результатами.

В качестве единицы длины принята величина

$$l = \frac{3\lambda}{\sqrt{\pi}}, \qquad \text{где} \quad \lambda = \frac{\varkappa}{15n_0}\sqrt{\frac{8\pi m}{k^3 T_0}} \tag{1}$$

— определенная согласно [8] средняя длина свободного пробега молекул газа, $\varkappa$ — коэффициент его теплопроводности.

Итак, рассмотрим слой газа между двумя концентрическими сферами с радиусами $R_1 < R_2$, на поверхности которых поддерживается постоянная температура $T_s^1 > T_s^2$. Перепад $\Delta T_s = T_s^1 - T_s^2$ условимся считать достаточно малым для того, чтобы ограничиться линейным приближением.

Состояние газа определяется уравнением [8]:

$$\mathbf{V}\nabla f = J_{st}[f]. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — собственная скорость теплового движения молекул газа; f — функция распределения; J_{st} — интеграл столкновений.

В силу принятого условия линейности решение уравнения (2) может быть представлено в виде

$$f = f_0(1+\varphi),$$

где

$$f_0 = n_0\left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{3/2}\exp(-C^2)$$

— равновесная (максвелловская) функция распределения; m — масса молекул; k — постоянная Больцмана; $\mathbf{C} = \mathbf{V}\sqrt{m/2kT_0}$; T_0 и n_0 — некоторые, принятые за равновесные, температура и концентрация молекул газа.

Переходя к сферической системе координат с началом в центре сфер и учитывая, что функция φ зависит лишь от r, C и C_r, из (2) имеем

$$C_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{C^2 - C_r^2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial C_r} = I_{st}[\varphi]. \tag{3}$$

I_{st} — соответствующий J_{st} линеаризованный оператор столкновений. Производная $\frac{\partial}{\partial C_r}$ берется только по проекции и не действует на функции модуля скорости.

В качестве граничных условий примем закон диффузного отражения молекул газа от поверхности каждой из сфер

$$\varphi\big|_{r=R_k} = \Phi_r^k = \frac{\Delta n_r^k}{n_0} + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{\Delta T_r^k}{T_0}, \tag{4}$$

где

$$\Delta T_r^k = T_r^k - T_0, \qquad \Delta n_r^k = n_r^k - n_0;$$

T_r^k и n_r^k температура и концентрация молекул, отразившихся от поверхности k-той сферы.

Значения T_r^k и n_r^k определяются требованием отсутствия массового движения газа

$$\int C_r\varphi\exp(-C^2)d^3C = 0 \tag{5}$$

и характером аккомодации энергии:

$$\alpha_k = \frac{E_i^k + E_r^k}{E_i^k + E_s^k}. \tag{6}$$

Здесь

$$E_i^k = \pi^{-3/2} \int\limits_{(-1)^k C_r<0} C_r C^2 \varphi(R_k) \exp(-C^2) d^3C \qquad (7)$$

— обезразмеренный поток энергии, приносимый падающими и

$$E_r^k = \pi^{-3/2} \int\limits_{(-1)^k C_r>0} C_r C^2 \Phi_r^k \exp(-C^2) d^3C \qquad (8)$$

— уносимой отразившимися от поверхности k-той сферы молекулами;

$$E_s^k = \pi^{-3/2} \int\limits_{(-1)^k C_r>0} C_r C^2 \Phi_s^k \exp(-C^2) d^3C$$

— энергия, которую уносили бы молекулы, если бы отражались с температурой T_s^k, т.е. с функцией распределения

$$\Phi_s^k = \frac{\Delta n_s^k}{n_0} + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right) \frac{T_s^k - T_0}{T_0}.$$

В силу линейности любая из характристик газа может быть представлена в виде

$$F = F^* \frac{\Delta T_r}{T_0}, \qquad \Delta T_r = T_r^1 - T_r^2.$$

Здесь и далее везде звездочкой условимся обозначать величины, отнесенные к $\Delta T_r/T_0$ или, что эквивалентно, к $\Delta T_s/T_0$ при условии полной аккомодации энергии.

Начнем с рассмотрения внутренней сферы. Из условий (5), (7) и (8) находим

$$\frac{\Delta n_r^1}{n_0} = -\frac{1 + 4I_0^1}{2} \frac{\Delta T_r}{T_0},$$

$$E_i^1 = \frac{I_1^1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta T_r}{T_0}, \qquad E_r^1 = \frac{1 - 2I_0^1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta T_r}{T_0},$$

$$I_i^1 = \pi^{-1} \int\limits_{C_r<0} C_r C^{2i} \varphi^*(R_1) \exp(-C^2) d^3C. \qquad (9)$$

Аналогично

$$\frac{\Delta n_s^1}{n_0} = -\frac{1}{2} \frac{T_s^1 - T_0}{T_0} - 2I_0^1 \frac{\Delta T_r}{T_0},$$

$$E_s^1 = \frac{T_s^1 - T_0}{T_0} - \frac{2I_0^1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta T_r}{T_0}.$$

Подставляя полученные выражения в условие (6), находим

$$\alpha_1(T_s^1 - T_0) = \Delta T_r(1 + (1 - \alpha_1)(I_1^1 - 2I_0^1)). \qquad (10)$$

Искомый поток энергии определяется соотношением

$$q = n_0 \sqrt{\frac{2k^3 T_0^3}{m}}\, Q,$$

$$Q = \pi^{-3/2} \int C_r C^2 \varphi \exp(-C^2) d^3C. \qquad (11)$$

Причем в силу закона сохранения и линейности задачи

$$Q = Q^* \frac{R^2}{r^2} \frac{\Delta T_r}{T_0}, \qquad (12)$$

где Q^* — безразмерная константа, в качестве которой без потери общности можно принять приходящееся на единицу относительной разности температур значение плотности потока энергии с поверхности внутренней сферы, вычисленное при условии полной аккомодации энергии.

С другой стороны,

$$Q\big|_{r=R_1} = E_r^1 + E_i^1 = \frac{1 - 2I_0^1 + I_1^1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta T_r}{T_0}. \qquad (13)$$

Сравнивая (12) и (13), имеем

$$Q^* = \frac{1 - 2I_0^1 + I_1^1}{\sqrt{\pi}}.$$

Подставляя полученное соотношение в (10), находим

$$\alpha_1(T_s^1 - T_0) = \left(\sqrt{\pi}(1 - \alpha_1)Q^* + \alpha_1\right)\Delta T_r. \qquad (14)$$

Перейдем к рассмотрению внешней сферы. Принимая, без потери общности, в качестве равновесных температуру и концентрацию отразившихся от ее поверхности молекул, т.е. полагая $T_0 = T_r^2$ и $n_0 = n_r^2$, получим

$$\Phi_r^2 = 0, \quad E_r^2 = 0, \quad E_i^2 = \frac{I_1^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta T_r}{T_0},$$

$$E_s^2 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{T_s^2 - T_0}{T_0},$$

$$\alpha_2(T_s^2 - T_0) = -I_1^2(1 - \alpha_2)\Delta T_r, \qquad (15)$$

$$I_1^2 = \pi^{-1} \int\limits_{C_r>0} C_r C^{2i} \varphi^*(R_2) \exp(-C^2) d^3C.$$

Учитывая, что

$$E_i^2 = Q\big|_{r=R_2} = Q^* \frac{R_1^2}{R_2^2} \frac{\Delta T_r}{T_0},$$

находим

$$I_1^2 = \sqrt{\pi} Q^* \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

В результате имеем

$$\alpha_2(T_s^1 - T_0) = -\sqrt{\pi}(1 - \alpha_2)Q^* \frac{R_1^2}{R_2^2} \Delta T_r. \qquad (16)$$

Сравнивая (14) и (16), получим

$$\Delta T_r = \left(\sqrt{\pi}Q^*\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right)\right) + 1\right)^{-1} \Delta T_s.$$

Соответственно

$$Q = \left(\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right)\right) + \frac{1}{Q^*}\right)^{-1} \frac{\Delta T_s}{T_0}. \tag{17}$$

Очевидно, что в бесстолкновительном (свободномолекулярном) режиме, т.е. в случае, когда расстояние между сферами или радиус внутренней сферы много меньше длины свободного пробега молекул газа, изменением функции распределения в объеме газа можно пренебречь и считать функцию φ^* в области интегрирования (9) и сами интегралы I_i^k равными нулю. Таким образом, в рассматриваемом пределе

$$Q^* = Q^*_{fm} = \pi^{-1/2}.$$

Соответственно

$$Q_{fm} = \pi^{-1/2}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{R_1^2}{R_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right)\right)^{-1} \frac{\Delta T_s}{T_0},$$

$$\frac{Q}{Q_{fm}} = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{R_1^2}{R_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right)\right) \times \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{R_1^2}{R_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) + \frac{Q^*_{fm}}{Q^*} - 1\right)^{-1}. \tag{18}$$

Полученное соотношение носит общий характер и не зависит ни от формы кинетического уравнения, ни от способа его решения.

Для вычисления Q^* воспользуемся общей идеей метода полупространственных моментов, а именно, представим решение уравнения (3) в виде суммы заданных полиномов скорости.

Учитывая разрывный характер функции распределения на поверхности каждой из сфер, а также тот факт, что с любой точкой в объеме газа связаны три инвариантных конуса в пространстве скоростей, границы которых молекулы пересекают только за счет столкновений между собой, запишем:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i H_i, \quad \text{где} \quad \varphi_i = a_1^i + a_2^i C^2 + a_3^i C_r + a_4^i C_r C^2,$$

$$H_1 = H(C_r - \gamma C), \quad H_2 = H(C_r) - H_1, \tag{19}$$

$$H_4 = H(-C_r - \gamma C),$$

$$H_3 = H(-C_r) - H_4, \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{r^2}},$$

$H(x) = \frac{|x|+x}{2x}$ — стандартная функция Хевисайда.

Коэффициенты a_j^i, зависящие только от расстояния до центра сфер, определяются из системы моментных уравнений, для составления которой уравнение (3) с функцией (19) необходимо умножить последовательно на $H_i \exp(-C^2)$, $C^2 H_i \exp(-C^2)$, $C_r H_i \exp(-C^2)$, $C_r C^2 H_i \exp(-C^2)$ и проинтегрировать по всему пространству скоростей. Опуская аналогичные представленным в [5,7], но существенно более громоздкие выражения, отметим, что в силу (4) искомое решение должно удовлетворять условиям

$$a_1^1 = \frac{\Delta n_r}{n_0} - \frac{3}{2}\frac{\Delta T_r}{T_0}, \quad a_2^1 = \frac{\Delta T_r}{T_0},$$

$$a_3^1 = a_4^1 = 0, \quad \text{при} \quad r = R_1, \tag{20}$$

$$a_i^3 = a_i^4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \text{при} \quad r = R_2. \tag{21}$$

Значение $\Delta n_r/n_0$ задается требованием отсутствия потока массы (5). Соответственно вместо первого соотношения из (20) можно использовать вытекающее из (5) равенство

$$4(a_1^1 - a_1^4) + 8(a_2^1 - a_2^4) + \sqrt{\pi}(2a_3^1 + 5a_4^1 + 2a_3^4 + 5a_2^4) = 0, \quad \text{при} \quad r = R_1. \tag{22}$$

Кроме этого, необходимо учесть, что представленная система дифференциальных уравнений имеет особенность на поверхности внутренней сферы, обусловленную схлопыванием центральных (т.е. соответствующих функциям φ_2 и φ_3) конусов в пространстве скоростей. Раскладывая искомое решение в ряд по степеням $\xi = r - R_1$ и учитывая требование конечности функции распределения, получим еще четыре условия

$$a_i^2 \gamma^2 = a_{i+2} \gamma^3 = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \text{при } r = R_1. \tag{23}$$

Таким образом, граничные условия задаются: функцией распределения молекул, отразившихся от внешней сферы (т.е. значением функций φ_3 и φ_4 при $r = R_2$), функцией распределения молекул, отразившихся от внутренней сферы (т.е. значением φ_1 при $r = R_1$) и требованием конечности функции φ_2 при $r \to R_1$.

Поток тепла с единицы поверхности внутренней сферы определяется соотношением

$$Q = \pi^{-3/2} \int C_r C^2 \varphi(R_1) \exp(-C^2) d^3C$$

$$= \frac{a_1^1 - a_1^4}{\sqrt{\pi}} + 3\,\frac{a_2^1 - a_2^4}{\sqrt{\pi}} + \frac{5}{8}(a_3^1 + a_3^4) + \frac{35}{16}(a_4^1 + a_2^4).$$

Результаты численного решения указанной системы уравнений с перечисленными граничными условиями при $R_1/R_2 = 0.1$, 0.5, 0.9 и 0.99 (группы кривых *1*, *2*, *3* и *4*) представлены на рис. 1. Здесь и на рис. 2, 3 сплошные линии соответствуют модели молекул, взаимодействующих как упругие твердые сферы; пунктирные — БГК модели интеграла столкновения. При $R_1/R_2 \lesssim 0.01$ значения потока тепла перестают зависеть от соотношения между радиусами сфер и практически совпадают с приведенными на рис. 2 результатами, полученными

Значения величины Q^* в случае уединенной сферы

$k = \dfrac{15}{8R_1}$	БГК модель		Молекулы—твердые сферы	
	1	2	3	4
0.05	0.10342	0.10334	0.10494	0.1064
0.1	0.18247	0.18125	0.18689	0.1885
0.2	0.28891	0.28416	0.30055	0.2996
0.4	0.39594	0.38751	0.41684	0.4095
0.6	0.44607	0.43712	0.46986	0.4595
1	0.49175	0.48395	0.51494	0.5032
2	0.52810	0.52331	0.54561	0.5361
4	0.54624	0.54384	0.55720	0.5511
6	0.55220	0.55065	0.56005	0.5559
10	0.55694	0.55593	0.56186	0.5593
20	0.56051	0.55954	0.56298	0.5616

Примечание. Первая и третья колонки — результаты изложенного варианта моментного метода, вторая — результаты решения соответствующей (3) системы интегральных уравнений [12], четвертая — представленные в [9] результаты непосредственного численного интегрирования кинетического уравнения.

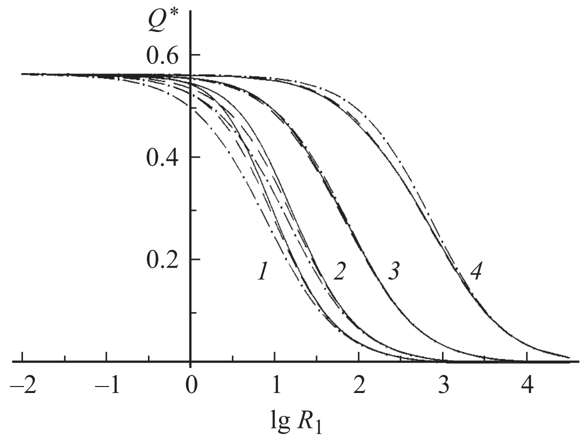

Рис. 1. Зависимость потока тепла от радиуса внутренней сферы при $R_{1/R_2} = 0.1$ (*1*), 0.5 (*2*), 0.9 (*3*), 0.99 (*4*). Здесь и далее сплошные кривые — модель молекул, взаимодействующих как упругие твердые сферы; штриховые — БГК модели интеграла столкновения; штрихпунктир — стандартному методу Лиза.

в пределе $R_1/R_2 \to 0$, что эквивалентно уединенной сфере. Там же представлены результаты, полученные непосредственным численным интегрированием [9]: $\circ$ — для БГК модели интеграла столкновений, $\bullet$ — для молекул — твердых сфер; $\times$ — вариационным методом [10]. Конкретные значения потока тепла в указанном случае приведены в таблице.

Следует заметить, что подавляющим большинством авторов для теоретической обработки экспериментальных данных применяется метод Лиза. При этом функция распределения задается соотношением

$$\varphi = (a_1 + a_2 C^2)H_1 + (a_3 + a_4)(1 - H_1),$$

а для составления системы моментальных уравнений используются: 1, C^2, C_r и $C_r C^2$, что дает (см., например, [2])

$$Q^* = \left(\frac{4}{5} R_1 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) + \sqrt{\pi}\right)^{-1}. \tag{24}$$

Вопрос о недостатках такого подхода обсуждался, в частности, в [5,7]. Значения Q^*, рассчитанные по формуле (24), представлены штрихпунктиром.

Как видно из таблицы и графиков, максимальное отличие результатов предложенного метода решения кинетического уравнения от рассчитанных в [9,12] значений не превышает 2.5% как для БГК, так и и для больцмановского интеграла столкновений. Вариационный метод дает практически такой же порядок точности. Однако его применение к рассматриваемому классу задач ограничивается модельными уравнениями. Погрешность стандартного метода Лиза достигает десяти и более процентов.

На рис. 3 приведены значения отношения Q/Q_c, вычисленные при $R_2 = 7R_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.3$, что соответствует условиям опытов [11] по измерению потока тепла

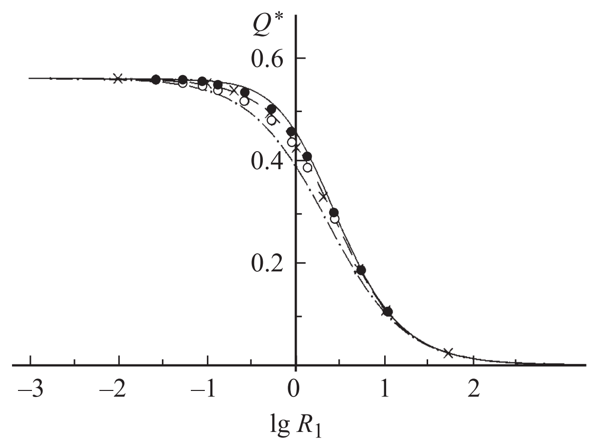

Рис. 2. Значения потока тепла от одиночной сферы. Значки — результаты, полученные непосредственным численным интегрированием [9]: $\circ$ — для БГК модели интеграла столкновений, $\bullet$ — для молекул — твердых сфер; $\times$ — результаты, полученные вариационным методом [11].

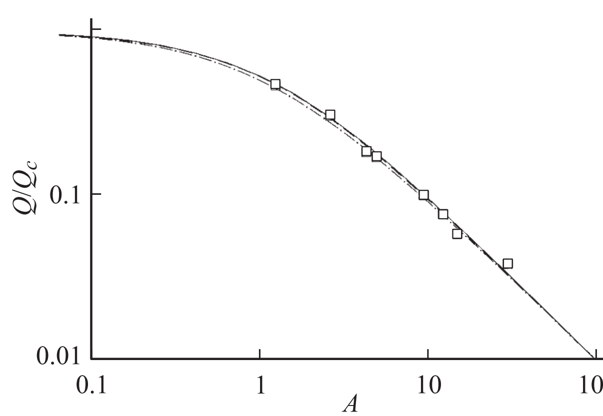

Рис. 3. Значения отношения Q/Q_c, вычисленные при $R_2 = 7R_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.3$, $\square$ — экспериментальные данные [10].

через слой гелия, заключенный между стеклянными сферами (□ — экспериментальные данные). Здесь

$$A = \frac{5\sqrt{\pi}}{4R_1}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{R_1^2}{R_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right)\right),$$

$$Q_c = \frac{5}{4R_1}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)^{-1}$$

— приходящееся на единицу относительной разности температуры значение потока тепла с единицы поверхности внутренней сферы, вычисленное в газодинамическом пределе.

Список литературы

[1] *Коленчиц О.А.* Тепловая аккомодация систем газ–твердое тело. Минск: Наука и техника, 1977.

[2] *Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А.* Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977.

[3] *Борисов С.Ф., Балахонов Н.Ф., Губанов В.А.* Взаимодействие газов с поверхностью твердых тел. М.: Наука, 1988.

[4] *Lees L.* // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1965. Vol. 13. N 1. P. 278–311.

[5] *Савков С.А., Юшканов А.А.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 11. С. 9–14.

[6] *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.A.* // Phys. Rev. 1954. Vol. 94. N 3. P. 511–525.

[7] *Савков С.А., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // ТВТ. 2001. Т. 39. № 4. С. 657–664.

[8] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.

[9] *Takata S., Sone Y., Lhuillier D., Wakabayshi M.* // Computers Math. Appl. 1998. Vol. 35. N 1/2. P. 193–214.

[10] *Cercignani C., Pagani C.D.* // Rarefied Gas Dynamics. 1967. Vol. 2. P. 555–573.

[11] *Springer G.S., Wan S.F.* // AIAA J. 1966. N 8. P. 800–801.

[12] *Савков С.А.* // ИФЖ. 2002. Т. 75. № 3. С. 111–117.