Журнал технической физики, 2005, том 75, вып. 4

04;10

Кинетический подход к получению уравнения огибающей релятивистского электронного пучка, распространяющегося в рассеивающей газоплазменной среде при наличии обратного плазменного тока произвольного радиального профиля

© А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Kolesnikov_evg@mail.ru

(Поступило в Редакцию 29 апреля 2004 г.)

С помощью кинетических методов получены уравнения переноса, уравнение вириала, условие динамического равновесия и уравнение огибающей аксиально-симметричного параксиального релятивистского электронного пучка, распространяющегося в рассеивающей газоплазменной среде при наличии обратного плазменного тока, радиальный профиль плотности которого отличается от соответствующего профиля пучка. Найденные уравнения включают дополнительные члены, учитывающие указанное отличие.

Введение

В последнее время внимание исследователей все больше привлекает проблема транспортировки релятивистских электронных пучков (РЭП) в плотных газоплазменных средах [1–27]. Одним из важных вопросов при решении этой проблемы является изучение поперечной эволюции пучка в рассеивающем фоновом газе.

Вследствие сильной неравновесности процесса распространения РЭП в газоплазменной среде, а также доминирующего влияния, которое оказывает на этот процесс коллективное электромагнитное поле, возбуждаемое зарядами и токами частиц пучка и плазмы, естественной методологической основой для построения моделей транспортировки РЭП в газоплазменной среде является аппарат кинетических уравнений Власова–Больцмана с самосогласованным полем и следующих из них уравнений для моментов функции распределения частиц пучка и фазовых средних. В общем случае указанные модели наряду с самосогласованным полем должны учитывать воздействие на частицы пучка внешних электромагнитных полей, а также эффект рассеяния частиц пучка в столкновениях с частицами фонового газа.

В отличие от известных работ [6–12,20–25] в настоящей статье получим основные уравнения поперечной динамики параксиальных моноэнергетичных РЭП в ситуации, когда радиальный профиль обратного плазменного тока $J_{pz}(\mathbf{r}_\perp)$ отличается от радиальной конфигурации плотности тока самого пучка $J_{bz}(\mathbf{r}_\perp)$. Последнее предположение существенно усложняет получение основных уравнений поперечной динамики РЭП, включая и вывод уравнения огибающей пучка с помощью кинетического уравнения.

Необходимо отметить, что исследованию генерации обратного плазменного тока при инжекции РЭП в плотные газы, а также изучению радиальной структуры плотности указанного тока посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ [13–19]. Было показано, что плотность обратного плазменного тока во многих ситуациях имеет радиальную конфигурацию, существенно отличающуюся от радиальной структуры плотности тока самого пучка, что оправдывает приведенное выше предположение.

Кроме того, в отличие от [6,22–25] будем считать, что имеет место полная зарядовая компенсация. В плотных газоплазменных средах указанная ситуация реализуется при достаточно высоких значениях омической скалярной проводимости σ, когда выполнено условие

$$\tau_c \ll \tau_m, \tag{1}$$

где $\tau_c = (4\pi\sigma)^{-1}$ — время зарядовой нейтрализации, $\tau_m = 4\pi\sigma R_b^2/c^2$ — скиновое время (время затухания равновесного обратного плазменного тока). Здесь R_b — характерный радиус пучка, c — скорость света.

Известно, что в параксиальном приближении [6,23,24] продольное движение частиц пучка является детерминированным, в то же время распределение частиц РЭП по поперечным импульсам и координатам носит стохастический характер и описывается соответствующим кинетическим уравнением.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением представляющего основной практический интерес случая параксиального азимутально-симметричного пучка с осью симметрии, совпадающей с направлением распространения пучка вдоль оси z цилиндрической системы координат.

Аналогично работам [6–8] представим пучок в виде совокупности тонких поперечных сегментов S^τ, каждый из которых инжектируется в момент времени $t = \tau$ и содержит фиксированное число частиц.

Предположим, что все частицы данного сегмента имеют одинаковую релятивистскую массу $m\gamma$ и продольную скорость $v_z = \beta c$ (пренебрегаем разбросом γ в пределах сегмента). Таким образом, полагается, что на выходе из инжектора пучок является моноэнергетическим и, кроме того, среда, в которой он распространяется, однородной. Тогда при сделанных предположениях все частицы сегментов S^τ одинаковым образом эволюционируют по координате z и в любой момент времени имеют одинаковую энергию $E(t)$ и релятивистскую массу $m_r = m\gamma = E(t)/c^2$, причем в процессе распространения сегменты S^τ не пересекаются [6,24,25].

Для фиксированного сегмента S^τ введем в рассмотрение функцию распределения частиц сегмента $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ по поперечным координатам $\mathbf{r}_\perp$ и импульсам $\mathbf{p}_\perp$, эволюция которой будет описываться кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\perp}{\gamma m}\circ\nabla_{\mathbf{r}_\perp} f^\tau + \mathbf{F}_\perp\circ\nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = I_{sc}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{F}_\perp$ — поперечная компонента силы, действующей на частицу пучка со стороны коллективного самосогласованного электромагнитного поля системы плазма–пучок, I_{sc} — интеграл столкновений.

В ситуации полной зарядовой компенсации имеем

$$\mathbf{F}_\perp = q\beta\nabla_{\mathbf{r}_\perp} A_z(t, \mathbf{r}_\perp), \qquad (3)$$

где q — заряд частиц пучка, $\beta = v_z/c$; $A_z(t, \mathbf{r}_\perp)$ является решением уравнения

$$\Delta_{\mathbf{r}_\perp} A_z = -\frac{4\pi}{c}\big(J_{bz}(t, \mathbf{r}_\perp) + J_{pz}(t, \mathbf{r}_\perp)\big), \qquad (4)$$

которое имеет вид

$$A_z = (t, \mathbf{r}_\perp) = A_z^{(b)}(t, \mathbf{r}_\perp) + A_z^{(p)}(t, \mathbf{r}_\perp), \qquad (5)$$

где

$$A_z^{(b)}(t, \mathbf{r}_\perp) = -\frac{2}{c}\int J_{bz}(t, \mathbf{r}'_\perp)\ln\left|\frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp}{R_c}\right| d\mathbf{r}'_\perp, \qquad (6)$$

$$A_z^{(p)}(t, \mathbf{r}_\perp) = -\frac{2}{c}\int J_{pz}(t, \mathbf{r}'_\perp)\ln\left|\frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp}{R_c}\right| d\mathbf{r}'_\perp \qquad (7)$$

— соответственно аксиальные компоненты векторного потенциала, обусловленные током пучка и обратным плазменным током. Здесь R_c — радиус экранировки коллективного электромагнитного поля фоновой плазмой, т. е. предполагается выполнение условия $A_z\big|_{r_\perp \ge R_c} = 0$.

В условиях доминирующей роли процессов многократного кулоновского рассеяния на малые углы интеграл столкновений в уравнении (2) может быть записан в виде [6,26]

$$I_{sc} = \frac{m\gamma S}{2}\Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau. \qquad (8)$$

Величина S характеризует среднюю скорость изменения поперечной кинетической энергии частицы пучка $E_\perp = p_\perp^2/(2m\gamma)$ в результате многократного кулоновского рассеяния и для конкретной рассеивающей среды может быть рассмотрена как известная функция полной энергии частицы $E = m\gamma c^2$. Заметим, что интеграл столкновений (8) является частным случаем интеграла столкновений Фоккера–Планка [6,26], в котором вектор скорости переноса по поперечному импульсу $\mathbf{p}_\perp$ равен нулю вследствие изотропности рассеяния, а тензор обобщенных коэффициентов диффузии в силу изотропности и упругого характера рассеяния является диагональным и не зависит от поперечного импульса $\mathbf{p}_\perp$.

Для замыкания системы уравнений (2)–(8) они должны быть дополнены уравнением, связывающим плотности тока плазмы $J_{pz}(\mathbf{r}_\perp)$ и соответствующую плотность пучка $J_{bz}(\mathbf{r}_\perp)$.

В отличие от [6,24,25] в рассматриваемой ситуации плотность обратного тока плазмы не может быть представлена в виде

$$J_{pz}(\mathbf{r}_\perp) = -\alpha_m J_{bz}(\mathbf{r}_\perp),$$

где α_m — коэффициент токовой (магнитной) нейтрализации, который в указанных работах полагался не зависящим от $\mathbf{r}_\perp$ (т. е. J_{pz} и J_{bz} имеют одинаковые радиальные профили с равными характерными поперечными радиусами).

Для нормированной к 1 функции распределения $f^\tau(\int f^\tau d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{p}_\perp = 1)$ плотность тока определяется выражением

$$J_{bz}(\mathbf{r}_\perp, t) = I_b(t)\chi_b(\mathbf{r}_\perp, t), \qquad (9)$$

где $I_b(t)$ — полный ток пучка,

$$\chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) = \int f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)\,d\mathbf{p}_\perp \qquad (10)$$

— пространственная концентрация частиц пучка, отнесенная к числу частиц N_0 в сегменте S^τ.

Плотность обратного плазменного тока $J_{pz}(\mathbf{r}_\perp, t)$ может быть определена из уравнения [27]

$$\frac{\partial J_{pz}}{\partial t} + \frac{J_{pz}}{\tau_m} = -\frac{\partial J_{bz}}{\partial t}, \qquad (11)$$

где τ_m — монопольное скиновое время.

Для удобства J_{pz} можно представить в виде, аналогичном (9),

$$J_{pz}(\mathbf{r}_\perp, t) = I_p(t)\chi_p(\mathbf{r}_\perp, t), \qquad (12)$$

где $I_p(t)$ — полный обратный плазменный ток; $\chi_p(\mathbf{r}_\perp, t)$ — концентрация частиц плазмы, отнесенная к числу частиц плазменного тока в сегменте пучка S^τ.

Нетрудно видеть, что решение уравнения (11) имеет вид

$$J_{pz}(\mathbf{r}_\perp, t) = I_p(t)\chi_p(\mathbf{r}_\perp, t) = -\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\partial(\chi_b I_b)}{\partial t'}\exp\left[\int\limits_{t}^{t'}\frac{dt''}{\tau_m(t'')}\right]. \qquad (13)$$

С учетом (3), (5) и (8) кинетическое уравнение (2) может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial f^{\tau}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_{\perp}}{m\gamma} \circ \nabla_{\mathbf{r}_{\perp}} f^{\tau} + \left[q\beta\nabla_{\mathbf{r}_{\perp}}\left(A_z^{(b)} + A_z^{(p)}\right)\right] \circ \nabla_{\mathbf{p}_{\perp}} f^{\tau} = \frac{\gamma m S}{2}\Delta_{\mathbf{p}_{\perp}} f^{\tau}, \tag{14}$$

где потенциалы $A_z^{(b)}$ и $A_z^{(p)}$ определяются соотношениями (6) и (7).

Уравнения переноса

Из уравнения (14) могут быть получены уравнения для первых моментов функции распределения f^{τ}, которыми определяются основные макроскопические характеристики пучка.

Интегрирование уравнения (14) по пространству поперечных импульсов дает уравнение

$$\frac{\partial \chi_b}{\partial t} + \nabla_{\perp} \circ \left(\chi_b \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{\gamma m}\right) = 0, \tag{15}$$

где $\chi_b(\mathbf{r}_{\perp}, t)$ — плотность частиц пучка в сегменте S^{τ}, определяемая интегралом (10); $\nabla_{\perp} \equiv \nabla_{\mathbf{r}_{\perp}}$;

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, t) = \frac{1}{\chi_b}\int \mathbf{p}_{\perp} f^{\tau} d\mathbf{p}_{\perp} \tag{16}$$

— средний поперечный импульс.

В силу того что $\tilde{\mathbf{p}}_{\perp}/m\gamma = \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$ (где $\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$ — средняя поперечная скорость частиц пучка), уравнение (15) представляет собой обычное уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения числа частиц рассматриваемого сегмента пучка.

Умножая уравнение (14) на $\mathbf{p}_{\perp}$ и интегрируя по поперечным импульсам, получим уравнение переноса поперечного импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}) + \nabla_{\perp} \circ \left(\chi_b \frac{\widetilde{\mathbf{p}_{\perp}\mathbf{p}_{\perp}}}{\gamma m}\right) - \chi_b q\beta\nabla_{\perp}\left(A_z^{(b)} + A_z^{(p)}\right) = 0, \tag{17}$$

где

$$\chi_b \widetilde{\mathbf{p}_{\perp}\mathbf{p}_{\perp}} = \int f^{\tau}(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{p}_{\perp}, t)\mathbf{p}_{\perp}\mathbf{p}_{\perp} d\mathbf{p}_{\perp}. \tag{18}$$

Уравнение (17) с учетом (15) может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{v}_{\perp} \circ \nabla_{\perp}\right)\mathbf{p}_{\perp} = -\frac{\nabla_{\perp} \circ \tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{\perp}}{\chi_b} - q\mathbf{E}_{\perp}^{\mathrm{eff}}, \tag{19}$$

где $\mathbf{E}_{\perp}^{\mathrm{eff}} = \nabla_{\perp}\left(\beta A_z^{(b)} + \beta A_z^{(p)}\right)$ — поперечная компонента эффективного электрического поля,

$$\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{\perp} = \int (\mathbf{p}_{\perp} - \tilde{\mathbf{p}}_{\perp})(\mathbf{v}_{\perp} - \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}) f^{\tau} d\mathbf{p}_{\perp} \tag{20}$$

— тензор напряжений.

Наконец, умножая (14) на $p_{\perp}^2/2m\gamma$ и интегрируя по пространству поперечных импульсов, получим уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\chi_b \frac{\tilde{p}_{\perp}^2}{2m\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{\chi_b p_{\perp}^2}{2m\gamma} + \nabla_{\perp} \circ \left(\frac{\chi_b \widetilde{\mathbf{p}_{\perp} p_{\perp}^2}}{2m^2\gamma^2}\right) - q\beta\nabla_{\perp}\left(A_z^{(b)} + A_z^{(p)}\right) \circ \frac{\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}}{m\gamma} = \chi_b S, \tag{21}$$

где

$$\chi_b \tilde{p}_{\perp}^2 = \int f^{\tau} p_{\perp}^2 d\mathbf{p}_{\perp}, \tag{22}$$

$$\chi_b \widetilde{\mathbf{p}_{\perp} p_{\perp}^2} = \int f^{\tau} \mathbf{p}_{\perp} p_{\perp}^2 d\mathbf{p}_{\perp}. \tag{23}$$

Третий член в левой части (21) характеризует скорость изменения средней энергии поперечного движения частиц сегмента пучка S^{τ}, связанного с наличием потока энергии с плотностью

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\chi_b \widetilde{\mathbf{p}_{\perp} p_{\perp}^2}}{2m^2\gamma^2} = \frac{\chi_b \widetilde{\mathbf{v}_{\perp} p_{\perp}^2}}{2m\gamma}. \tag{24}$$

Четвертый член в левой части (21) может быть записан в виде

$$-\frac{q\beta\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_{\perp}}{m\gamma} \circ \nabla_{\perp}\left(A_z^{(b)} + A_z^{(p)}\right) = \mathbf{J}_{\perp} \circ \mathbf{E}_{\perp}^{\mathrm{eff}}, \tag{25}$$

где $\mathbf{J}_{\perp} = -q\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_{\perp}/m\gamma = -q\chi_b\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$ и $\mathbf{E}_{\perp}^{\mathrm{eff}}$ представлено в (19).

Как видно из (21), этот член характеризует скорость изменения энергии поперечного движения, обусловленного работой сил, действующих на частицы пучка со стороны самосогласованного коллективного электромагнитного поля.

Наконец, второй член в левой части (21) и $\chi_b S$ характеризуют скорости изменения энергии поперечного движения, вызываемого соответственно неупругими и упругими столкновениями частиц пучка с частицами газоплазменной среды.

Уравнение вириала. Условие динамического равновесия

Умножим уравнение переноса импульса (17) скалярно на $\mathbf{r}_{\perp}$ и проинтегрируем полученное выражение по пространству поперечных координат. После ряда преобразований получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma m}{4}\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}\right) = 2(E_{\perp} - T_B) - 4\left(\frac{I_p}{I_b}\right)T_B \int \chi_b \mathbf{r}_{\perp} \circ \nabla_{\perp} \int \chi_p' \ln\left|\frac{\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp}'}{R_c}\right| d\mathbf{r}_{\perp}' d\mathbf{r}_{\perp}, \tag{26}$$

где

$$E_\perp = \int \chi_b \frac{\tilde{p}_\perp^2}{2m\gamma} d\mathbf{r}_\perp \tag{27}$$

— средняя кинетическая энергия поперечного движения частиц сегмента пучка,

$$\Re^2 = 2\int \chi_b r_\perp^2 d\mathbf{r}_\perp \tag{28}$$

— удвоенный среднеквадратичный радиус сегмента пучка,

$$T_B = I_b \frac{q\beta}{2c} = \frac{m\gamma v_z^2}{2}\left(\frac{I_b}{I_A}\right) \tag{29}$$

— так называемая эффективная температура Беннетта (I_b — полный ток пучка, $I_A = \beta\gamma mc^3/q$ — предельный ток Альфвена, v_z — аксиальная компонента скорости частиц пучка); кроме того, в уравнении (26) I_p — полный обратный ток плазмы, $\chi'_p = \chi_p(\mathbf{r}'_\perp, t)$.

Упрощая последний член в правой части уравнения (26), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma m}{4}\frac{d\Re^2}{dt}\right) = 2\left\{E_\perp - T_B\left[1 + \frac{I_p}{I_b}(2 - C_p)\right]\right\}, \tag{30}$$

где

$$C_p = 2\int \chi_p \chi'_b \frac{\mathbf{r}_\perp \circ (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)}{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|^2} d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{r}'_\perp. \tag{31}$$

Указанное уравнение является обобщением соответствующего известного уравнения [6,23–25] на случай $\chi_p \neq \chi_b$. Для простоты введем следующее обозначение формфактора

$$\Gamma = 1 + (2 - C_p)\frac{I_p}{I_b}. \tag{32}$$

Нетрудно показать, что при $\chi_b = \chi_p$ имеет место соотношение $C_p = 1$. Тогда $\Gamma = 1 + I_p/I_b = 1 - \alpha_m$, где $\alpha_m = -I_p/I_b$ — коэффициент токовой нейтрализации для ситуации $\chi_b = \chi_p$.

Введем в рассмотрение средний вириал

$$V = -\frac{q\beta}{2}\int \chi_b \mathbf{r}_\perp \circ \nabla_\perp \left(A_z^{(b)} + A_z^{(p)}\right) d\mathbf{r}_\perp. \tag{33}$$

Выполняя интегрирование в (33), получим

$$V = T_B \Gamma. \tag{34}$$

Тогда из (30) находим уравнение вириала

$$E_\perp - \frac{d}{dt}\left(\frac{m\gamma}{8}\frac{d\Re^2}{dt}\right) = V. \tag{35}$$

Полагая в (35) производную $d\Re^2/dt = 0$, получим необходимое условие динамического равновесия рассматриваемого сегмента пучка

$$E_\perp = \Gamma T_B = \left[1 + \frac{I_p}{I_b}(2 - C_p)\right] T_B. \tag{36}$$

Равенство (36) является обобщением известного условия равновесия Беннета [6,22] на случай отличия радиального профиля плотности пучка и обратного плазменного тока ($\chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) \neq \chi_p(\mathbf{r}_\perp, t)$).

Уравнение для средней полной поперечной энергии частиц пучка

Рассмотрим далее полную энергию частиц сегмента пучка Ψ, которую определим как сумму средней кинетической энергии поперечного движения $E_\perp$ и средней потенциальной энергии частиц в эффективном коллективном электрическом поле $\mathbf{E}_\perp^{\text{eff}} = -\nabla_\perp\left(-\beta A_z^{(b)} - \beta A_z^{(p)}\right)$

$$\Psi = E_\perp + \Lambda_\beta, \tag{37}$$

где

$$\Lambda_\beta = -\frac{1}{2}\int \chi_b q\beta \left(A_z^{(b)} + A_z^{(p)}\right) d\mathbf{r}_\perp. \tag{38}$$

Для нахождения уравнения для средней поперечной энергии частиц пучка продифференцируем (37) по времени. После ряда соответствующих преобразований получим

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dE_\perp}{dt} + \frac{d\Lambda_\beta}{dt} = -\frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \frac{\Lambda_\beta}{q\beta I_n}\frac{d}{dt}(q\beta I_n)$$
$$+ \int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp + q\beta I_n \int \left\{\nabla_\perp\left(\frac{A_z^{(b)} + A_z^{(p)}}{I_n}\right) \circ \left(\frac{\chi_b \mathbf{p}_\perp}{\gamma m}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi_b\left(A_z^{(b)} + A_z^{(p)}\right)}{2I_n}\right)\right\} d\mathbf{r}_\perp, \tag{39}$$

где $I_n = I_b + I_p$ — полный ток системы плазма–пучок.

После ряда преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\frac{dE_\perp}{dt} = \int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp - \frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} - \Lambda_\beta \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\Lambda_\beta}{T_B}\right) + q\beta I_o L, \tag{40}$$

где

$$L = -\frac{1}{c}\iint \left\{\frac{I_p}{I_b}\chi'_p \frac{\partial \chi_b}{\partial t}\right.$$
$$\left. - \chi_b \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{I_p}{I_b}\chi'_p\right)\right\} \ln\left|\frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp}{R_c}\right| d\mathbf{r}'_\perp d\mathbf{r}. \tag{41}$$

Очевидно, что (40) можно записать в виде

$$\frac{dE_\perp}{dt} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{enc}} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{los}} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_\beta + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\chi_b \neq \chi_p}, \tag{42}$$

где

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{enc}} = \int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp, \tag{43}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{los}} = -\frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}, \tag{44}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_\beta = -\Lambda_\beta \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\Lambda_\beta}{T_B}\right), \tag{45}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\chi_p \neq \chi_b} = q\beta I_b L \tag{46}$$

— соответственно скорости изменения средней поперечной кинетической энергии частиц сегмента пучка за счет упругих и неупругих столкновений частиц пучка с частицами фоновой газоплазменной среды (формулы (43) и (44)); (45) — соответствующая скорость за счет работы сил, действующих на частицы со стороны самосогласованного эффективного поперечного электрического поля; (46) — скорость изменения $E_\perp$ в результате работы сил, действующих на частицы в ситуации $\chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) \neq \chi_p(\mathbf{r}_\perp, t)$.

Уравнение для среднеквадратичного радиуса сегмента пучка (уравнение огибающей пучка)

Определим вид уравнения для среднеквадратичного радиуса пучка или так называемое уравнение огибающей параксиального релятивистского аксиально-симметричного пучка заряженных частиц при наличии эффектов многократного упругого рассеяния, неламинарности пучка и наличия обратного плазменного тока, имеющего иную радиальную конфигурацию, чем сам пучок (т.е. $\chi_p(\mathbf{r}_\perp, t) \neq \chi_b(\mathbf{r}_\perp, t)$). Для этого обе части уравнения для средней полной поперечной энергии частиц пучка (40) умножим на лоренц-фактор γ. Тогда получим

$$\frac{d(\gamma E_\perp)}{dt} = \gamma \Lambda_\beta \frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{T_B}{\Lambda_\beta}\right)\right] + \gamma \int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp - 2\gamma T_B L^*, \tag{47}$$

где $L^* = -cL$, c — скорость света, L определено в (41).

Обратимся теперь к уравнению вириала в форме (30). После умножения (30) на $\gamma/2$ и дифференцирования полученного уравнения по t имеем

$$\frac{d}{dt}(\gamma E_\perp) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\gamma \frac{d}{dt}\left[\frac{\gamma m}{4}\frac{d}{dt}\mathfrak{R}^2\right]\right\} + \frac{d}{dt}(\gamma \Gamma T_B), \tag{48}$$

Γ определено в (32) и (31).

Приравнивая правые части (47) и (48), приходим к уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\gamma \frac{d}{dt}\left[\frac{\gamma m}{4}\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}\right]\right\} = \gamma \Lambda_\beta \frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{T_B}{\Lambda_\beta}\right)\right]$$
$$+ \gamma \int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp - 2\gamma T_B L^* - \frac{d}{dt}(\gamma \Gamma T_B). \tag{49}$$

После умножения (49) на $2\mathfrak{R}^2$ и ряда преобразований получим

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma^2 \mathfrak{R}^3 \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \gamma \frac{d\gamma}{dt}\mathfrak{R}^3 \frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right) = \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma}{m}\left\{\Lambda_\beta \frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{T_B}{\Lambda\beta}\right)\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}(\gamma \Gamma T_B) + \int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp - 2T_B L^*\right\}. \tag{50}$$

В результате интегрирования (50) имеем

$$\gamma^2 \mathfrak{R}^3 \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \gamma^2 \mathfrak{R}^3 \frac{d\gamma}{dt}\frac{1}{\gamma}\frac{d\mathfrak{R}}{dt}$$
$$= \int_\tau^t \left[\frac{\mathfrak{R}^2\gamma}{m}\left\{\Lambda_\beta \frac{d}{dt'}\left[\ln\left(\frac{T_B}{\Lambda_\beta}\right)\right] - \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt'}(\gamma \Gamma T_B)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp - 2T_B L^*\right\}\right] dt'. \tag{51}$$

В итоге приходим к искомому уравнению огибающей пучка

$$\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \frac{4\Gamma T_B}{m\gamma \mathfrak{R}} = \frac{1}{\gamma^2 \mathfrak{R}^3}$$
$$\times \int_\tau^t \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma}{m}\left\{\int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp - 2T_B L^* - \Gamma T_B \frac{d\tilde{\Gamma}}{dt'}\right.$$
$$\left. - \Lambda_\beta \frac{d\ln\Gamma}{dt'}\right\} dt' + \frac{K_0}{\gamma^2 \mathfrak{R}^3}, \tag{52}$$

где

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\Lambda_\beta}{\Gamma T_B} - \ln\left(\frac{\mathfrak{R}^2}{2R_c^2}\right), \tag{53}$$

K_0 — константа интегрирования, τ — время инжекции рассматриваемого сегмента пучка.

Обобщение уравнения для среднеквадратичного радиуса квазистационарного пучка

Предположим, что состояние пучка в произвольном сегменте S^τ в любой момент времени является близким к состоянию динамического равновесия, т.е. приближенно выполняется условие (36)

$$E_\perp \approx \Gamma T_B = \left[1 + \frac{I_p}{I_b}(2 - C_p)\right] T_B, \tag{54}$$

где T_B — эффективная температура Беннета (см. (29)); C_p — коэффициент, определяемый формулой (31).

Рассмотрим задачу о временно́й эволюции среднеквадратичного радиуса квазиравновесного пучка. Обратимся к уравнению (40). Воспользуемся условием динамического равновесия (54). Тогда получим

$$\frac{d(\Gamma T_B)}{dt} + \frac{d\Lambda_\beta}{dt} = -\frac{\Gamma T_B}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \Lambda_\beta \frac{d}{dt}(\ln T_B)$$
$$+ \int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp - 2T_B L^*, \tag{55}$$

где $L^* = -cL$.

Добавим и вычтем в правой части (55) величину $\Lambda_\beta d/dt(\ln\Gamma)$. В результате находим

$$\frac{d(\Gamma T_b)}{dt}+\frac{d\Lambda_\beta}{dt}=-\frac{\Gamma T_B}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\Lambda_\beta\frac{d}{dt}\ln(\Gamma T_B)$$

$$-\Lambda_\beta\frac{d}{dt}\ln\Gamma+\int\chi_b S d\mathbf{r}_\perp-2T_B L^*. \quad (56)$$

Далее продифференцируем (53) по времени. Тогда получим

$$\frac{1}{\Re^2}\frac{d\Re^2}{dt}+\frac{d\tilde{\Gamma}}{dt}=\frac{1}{\Gamma T_B}\left(\frac{d\Lambda_\beta}{dt}-\frac{\Lambda_\beta}{\Gamma T_B}\frac{d(\Gamma T_B)}{dt}\right). \quad (57)$$

Выражая величину $d\Lambda_\beta/dt-\Lambda_\beta d/dt\ln(\Gamma T_B)$ из (57) и подставляя в (56), получим

$$\frac{d(\Gamma T_B)}{dt}+\Gamma T_B\left(\frac{1}{\Re^2}\frac{d\Re^2}{dt}+\frac{d\tilde{\Gamma}}{dt}\right)$$

$$=-\frac{\Gamma T_B}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}-\Lambda_\beta\frac{d}{dt}\ln\Gamma+\int\chi_b S dr_\perp-2T_B L^*. \quad (58)$$

После деления обеих частей (58) на ΓT_B и ряда преобразований окончательно имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\gamma\Re^2\Gamma T_B\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma T_B}\int\chi_b S d\mathbf{r}_\perp-\frac{d\tilde{\Gamma}}{dt}-\frac{1}{\Gamma T_B}\left(\Lambda_\beta\frac{d}{dt}\ln\Gamma+2T_B L^*\right). \quad (59)$$

Уравнение (59) является обобщением известного уравнения Нордсика [6] на случай наличия обратного плазменного тока произвольного радиального профиля, а также учета фазового перемешивания траекторий частиц в ангармоническом коллективном поле системы плазма–пучок.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., 1980. 167 с.
[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М., 1977. 277 с.
[3] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М., 1984. 432 с.
[4] *Лоусон Д.* Физика пучков заряженных частиц. М., 1980. 438 с.
[5] *Дэвидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М., 1978. 215 с.
[6] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[7] *Lee E.P.* // Livermore Lab. Report UCID-16490. 1974. P. 14.
[8] *Lee E.P., Cooper R.K.* // Part. Accelerators. 1976. Vol. 7. P. 83–95.
[9] *Надеждин Е.Р.* // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 21. С. 73–76.
[10] *Надеждин Е.Р.* // Физика плазмы. 1991. Т. 17. № 3. С. 327–335.
[11] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1988. Т. 14. № 5. С. 619–622.
[12] *Fernsler R.F., Hubbard R.F., Lampe M.* // J. Appl. Phys. 1994. Vol. 75. N 7. 3278–3299.
[13] *Мхеидзе Г.П., Месяц Г.А.* // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Под ред. В.Е. Фортова. М., 2000. Т. 4. С. 108–126.
[14] *Бондарь Ю.Ф., Гоманько А.А., Королев А.А.* и др. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 12. С. 1116–1120.
[15] *Бондарь Ю.Ф., Гоманько А.А., Ермаков А.А.* и др. // ПТЭ. 1987. № 6. С. 139–141.
[16] *Бондарь Ю.Ф., Кабанов С.Н., Королев А.А.* и др. // Препринт ИОФАН. № 57. М., 1986. 50 с.
[17] *Бондарь Ю.Ф., Мхеидхе Г.П., Савин А.А.* // Краткие сообщения по физике (ФИАН). 1986. № 10. С. 17–19.
[18] *Арланцев С.В., Мхеидзе Г.П., Савин А.А.* и др. // Препринт ИОФАН. № 184. М., 1987. 49 с.
[19] *Григорьев В.П., Поташев А.Г.* // Изв. вузов. Физика. 1990. Т. 33. № 12. С. 59–65.
[20] *Власов М.А., Денисова И.П., Никонов С.В.* // РЭ. 1984. Т. 29. № 8. С. 1595–1599.
[21] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // РЭ. 1990. Т. 35. № 1. С. 218–220.
[22] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 7. С. 108–111.
[23] *Мануйлов А.С.* // Деп. в ВИНИТИ. № 6028-85. Л., 1985. 23 с.
[24] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1977. Т. 67. Вып. 11. С. 62–65.
[25] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 76–78.
[26] *Либов Р.* Введение в теорию кинетических уравнений. М., 1974. 371 с.
[27] *Lee E.P.* // Livermore Lab. Report UCID-18940. 1981. P. 33.